第12章 电路方程的矩阵形式

本章重点

首 页

●重点

1. 关联矩阵、割集矩阵、基本回路矩阵和基本割集矩阵的概念

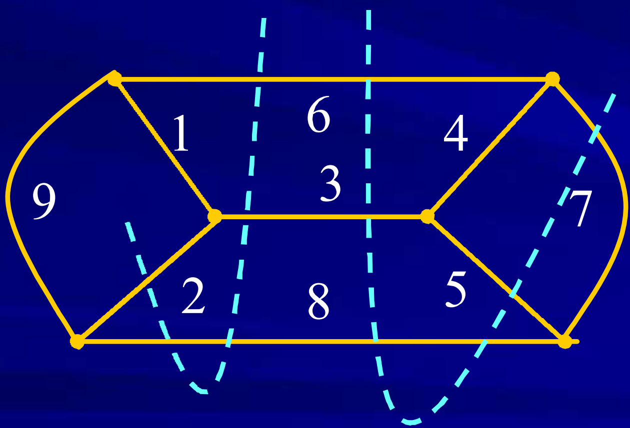
2. 回路电流方程、结点电压方程和割集电压方程的矩阵形式

12.1 割集

割集Q

连通图G中支路的集合，具有下述性质：

- 把Q中全部支路移去，图分成二个分离部分。
- 任意放回Q 中一条支路，仍构成连通图。

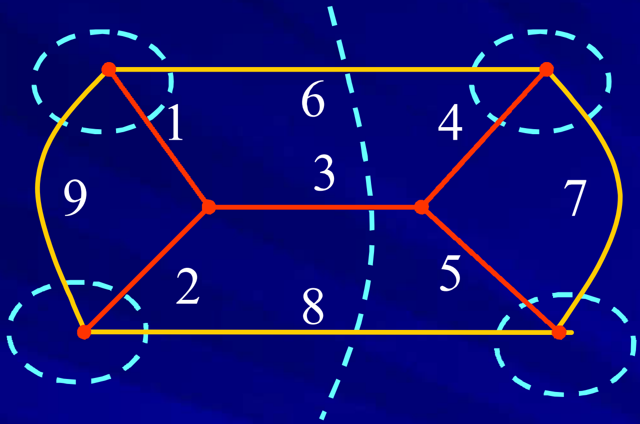


割集：(1 9 6) (2 8 9)
(3 6 8) (4 6 7) (5 7 8)

问题

(3 6 5 8 7) , (3 6 2 8)是割集吗?

基本割集 → 只含有一个树枝的割集。割集数 =n-1



注意

① 连支集合不能构成割集。

②属于同一割集的所有支路的电流应满足KCL。当一个割集的所有支路都连接在同一个结点上，则割集的KCL方程变为结点上的KCL方程 。

注意

③对应一组线性独立的KCL方程的割集称为独立割集，基本割集是独立割集，但独立割集不一定是单树支割集。

12.2 关联矩阵、回路矩阵、割集矩阵

1. 图的矩阵表示

图的矩阵表示是指用矩阵描述图的拓扑性质，即KCL和KVL的矩阵形式。有三种矩阵形式：

结点 —— 支路 关联矩阵

回路 —— 支路 回路矩阵

割集 —— 支路 割集矩阵

2. 关联矩阵A

用矩阵形式描述结点和支路的关联性质。n个结点b条支路的图用n×b的矩阵描述：

$$A_a = \begin{array}{c|c} & \text{支路}\,b \longrightarrow \\ \hline \text{结点}\,n \downarrow & \begin{bmatrix} n \times b \end{bmatrix} \end{array}$$

注意

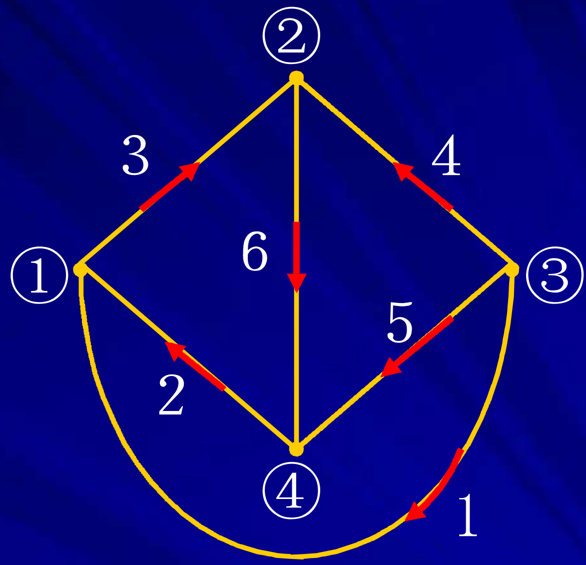
每一行对应一个结点，每一列对应一条支路。

矩阵A_a的每一个元素定义为：

$$a_{jk} \begin{cases} a_{jk}=1 & \text{支路 } k \text{ 与结点 } j \text{ 关联，方向背离结点；} \\ a_{jk}=-1 & \text{支路 } k \text{ 与结点 } j \text{ 关联，方向指向结点；} \\ a_{jk}=0 & \text{支路 } k \text{ 与结点 } j \text{ 无关。} \end{cases}$$

例

$$A_a=\begin{array}{c|cccccc} \text{结}\backslash\text{支} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$



特点

①每一列只有两个非零元素，一个是+1，一个是-1，A_a的每一列元素之和为零。

②矩阵中任一行可以从其他n-1行中导出，即只有n-1行是独立的。

$$
A_a = \begin{array}{c} \text{结}\backslash\text{支} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{pmatrix} \end{array}
$$

支路 b

$$
A_a = \text{结点 } n\text{-}1 \begin{bmatrix} (n\text{-}1) \times b \end{bmatrix}
$$

降阶关联矩阵 A

特点 A的某些列只具有一个+1或一个－1，这样的列对应与划去结点相关联的一条支路。被划去的行对应的结点可以当作参考结点。

关联矩阵A的作用

①用关联矩阵A表示矩阵形式的KCL方程;

设: $[i]=\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 \end{bmatrix}^T$

n-1个独立方程

以结点④为参考结点

$$[A][\,i\,]=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -i_1-i_2+i_3 \\ i_3-i_4+i_6 \\ i_1+i_4+i_5 \end{bmatrix}=0$$

矩阵形式的KCL: $[\,A\,][\,i\,]=0$

②用矩阵$[A]^{\mathrm{T}}$表示矩阵形式的KVL方程。

设：$[u]=[u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5\ u_6]^{\mathrm{T}}$　　$[u_n]=\begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \end{bmatrix}$

$$[A]^{\mathrm{T}}[u_{\mathrm{n}}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -u_{\mathrm{n1}}+u_{\mathrm{n3}} \\ -u_{n1} \\ u_{n1}-u_{n2} \\ -u_{\mathrm{n2}} \\ u_{n3} \\ u_{n2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

矩阵形式的KVL　$[u]=[A]^T[u_n]$

2. 回路矩阵B

独立回路与支路的关联性质可以用回路矩阵B描述。

$$[B]=\begin{array}{cc} & \text{支路}b \\ \text{独立回路}\ l & \begin{bmatrix} l\times b \end{bmatrix}\end{array}$$

注意

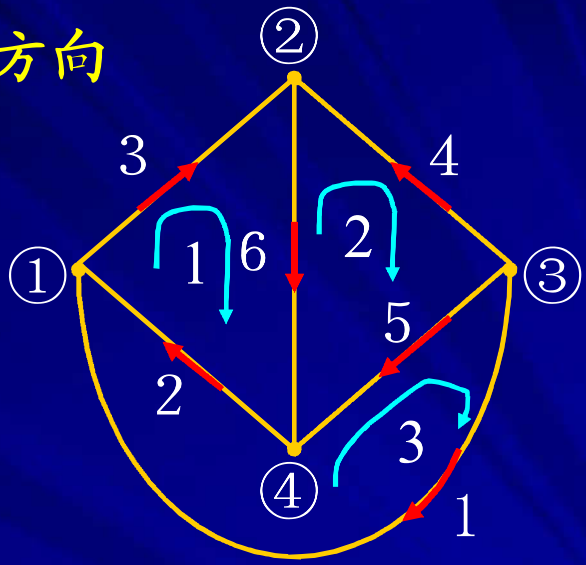
每一行对应一个独立回路，每一列对应一条支路。

矩阵B的每一个元素定义为：

$$b_{ij}\begin{cases} 1 & \text{支路 } j \text{ 在回路 } i \text{ 中，且方向一致；} \\ -1 & \text{支路 } j \text{ 在回路 } i \text{ 中，且方向相反；} \\ 0 & \text{支路 } j \text{ 不在回路 } i \text{ 中。} \end{cases}$$

例　取网孔为独立回路，顺时针方向

$$[B]=\begin{array}{c|c} \text{回}\backslash\text{支} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



注意　给定B可以画出对应的有向图。

基本回路矩阵B_f

独立回路对应一个树的单连枝回路得基本回路矩阵$[B_f]$

规定 ① 连支电流方向为回路电流方向;

② 支路排列顺序为先连支后树支，回路顺序与连支顺序一致。

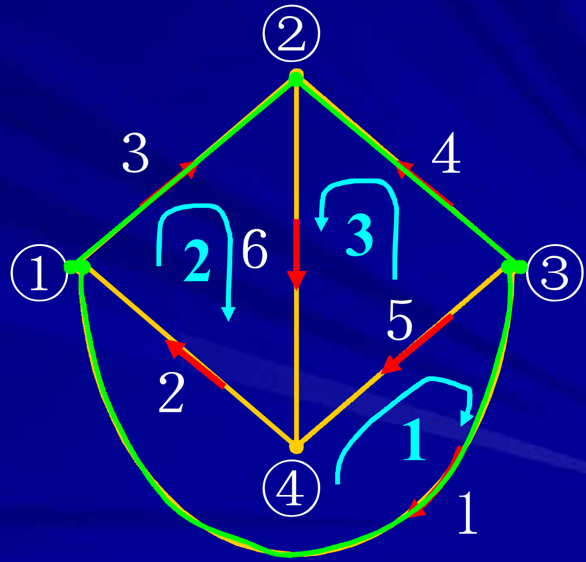
例 选 2、5、6为树，连支顺序为1、 3 、 4 。

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\
[B] = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]
\end{array}
$$

(回＼支)

$$
\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \end{array}}_{B_l} \quad \underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 5 & 6 \end{array}}_{B_t}
$$

$$
= [1 \;\; B_t]
$$



回路矩阵[*B*]的作用

①用回路矩阵[*B*]表示矩阵形式的KVL方程;

设 $[u]=[\underbrace{u_1\ u_3\ u_4}_{u_l}\ \underbrace{u_2\ u_5\ u_6}_{u_t}]$

$$[B][u]=\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-1&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_3\\u_4\\u_2\\u_5\\u_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1-u_2-u_5\\u_3+u_2+u_6\\u_4-u_5+u_6\end{bmatrix}=0$$

l个独立KVL方程

矩阵形式的KVL：$[B][u]=0$

注意 连支电压可以用树支电压表示。

$$[B_f][u]=0 \longrightarrow [1 \quad B_t]\begin{bmatrix} u_l \\ u_t \end{bmatrix}=0$$

$$u_l+B_tu_t=0 \qquad u_l=-B_tu_t$$

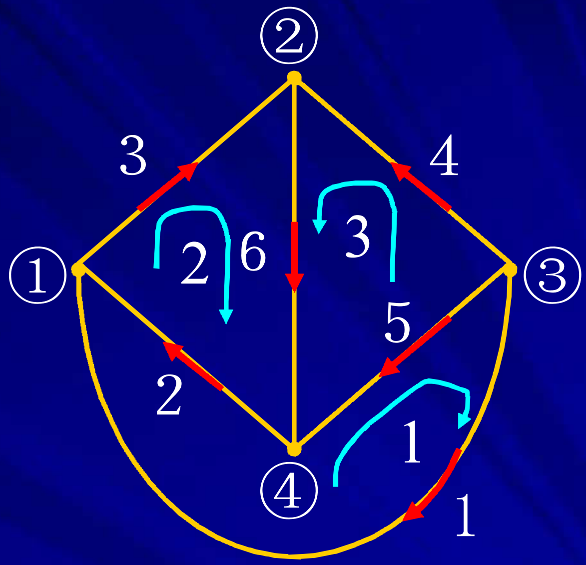
②用回路矩阵$[B]^T$表示矩阵形式的KCL方程

设：$[i]=[i_1 \; i_3 \; i_4 \; i_2 \; i_5 \; i_6 \;]^T$

$$[i_l]=\begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \\ i_{l3} \end{bmatrix}$$

独立回路电流

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \\ i_{l3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \\ i_{l3} \\ -i_{l1}+i_{l2} \\ -i_{l1}-i_{l3} \\ i_{l2}+i_{l3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_2 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}$$



矩阵形式的KCL： $[B]^{\mathrm{T}}[i_l]=[i]$

注意　树支电流可以用连支电流表出。

$$[B_f]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ B_t^T \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ B_t^T \end{bmatrix}[i_l] = \begin{bmatrix} i_l \\ i_t \end{bmatrix} \rightarrow B_t^T i_l = i_t$$

3. 基本割集矩阵 $[Q_f]$

割集与支路的关联性质可以用割集矩阵描述，这里主要指基本割集矩阵。

注意

$$[Q]= \begin{array}{c|c} & \text{支路}\,b \\ \hline \text{割集数} & \left[\;(n-1)\times b\;\right] \end{array}$$

每一行对应一个基本割集，每一列对应一条支路.

矩阵Q的每一个元素定义为：

$$q_{ij}\begin{cases} 1 & \text{支路 } j \text{ 在割集 } i \text{ 中，且与割集方向一致；} \\ -1 & \text{支路 } j \text{ 在割集 } i \text{ 中，且与割集方向相反；} \\ 0 & \text{支路 } j \text{ 不在割集 } i \text{ 中。} \end{cases}$$

返回　上页　下页

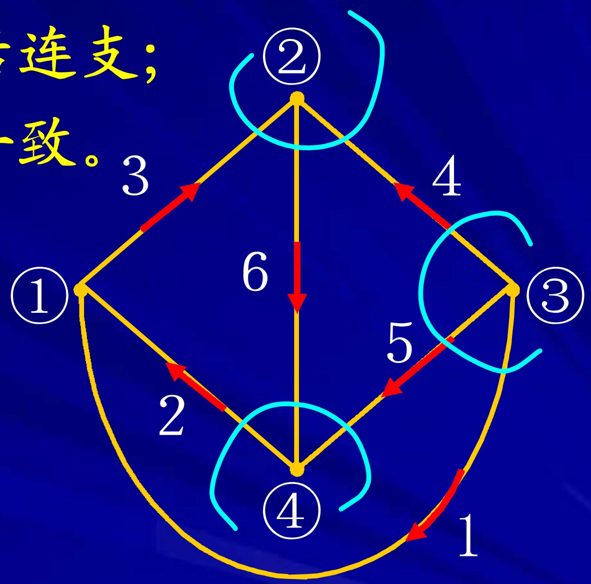
规定 基本割集矩阵$[Q_f]$

①割集方向为树支方向;

②支路排列顺序先树支后连支;

③割集顺序与树支次序一致。

例 选 1、2、3支路为树

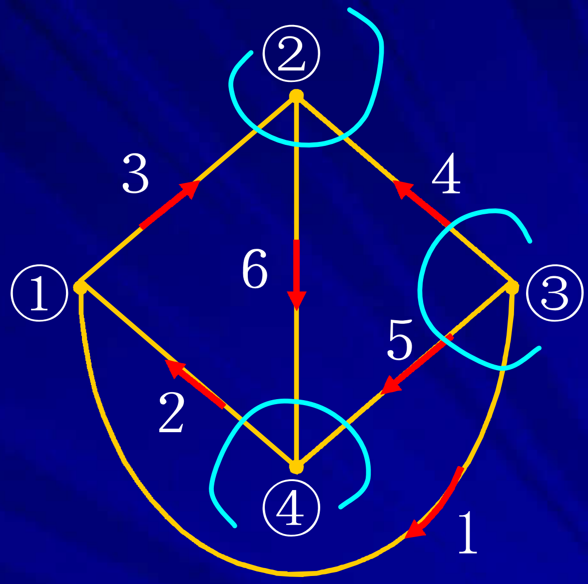


$$Q_1: \{1, 4, 5\}$$

$$Q_2: \{2, 5, 6\}$$

$$Q_3: \{3, 4, 6\}$$

$$
[Q_f]=\begin{array}{c} \text{割集}\backslash\text{支} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \\
\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{Q_t} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{Q_l} \end{array}
$$



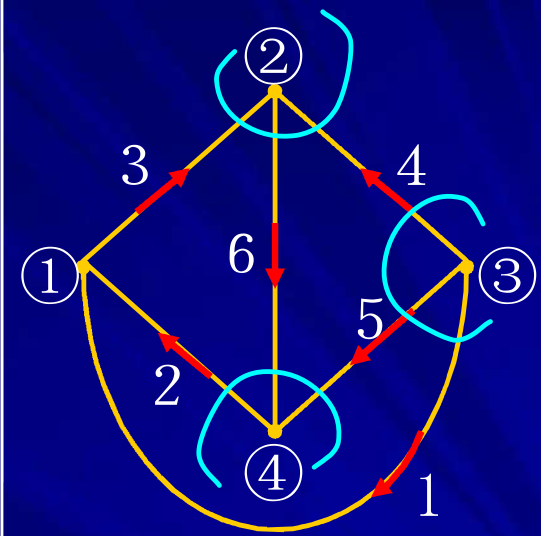
$$=[1 \quad Q_l]$$

基本割集矩阵$[Q_f]$的作用

①用基本割集矩阵$[Q_f]$表示矩阵形式的KCL方程。

设　$[i]=[i_1\ i_2\ i_3\ i_4\ i_5\ i_6]^{\mathrm{T}}$

$$[Q_f][i]=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&-1&-1\\0&0&1&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\i_3\\i_4\\i_5\\i_6\end{bmatrix}$$



$$=\begin{bmatrix}i_1+i_4+i_5\\i_2-i_5-i_6\\i_3+i_4-i_6\end{bmatrix}=0$$

n-1个独立KCL方程

矩阵形式的KCL：$[Q_f][i]=0$

②用$[Q_f]^T$表示矩阵形式的KVL方程

设树枝电压（或基本割集电压）：$u_t=[\ u_1\ u_2\ u_3\ ]^T$

$$[Q_f]^T[u_t]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\\0 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{t1}\\u_{t2}\\u_{t3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{t1}\\u_{t2}\\u_{t3}\\u_{t1}+u_{t3}\\u_{t1}-u_{t2}\\-u_{t2}-u_{t3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\end{bmatrix}=[u]$$

矩阵形式的KVL：$[\ Q_f]^T[u_t\ ]=[u]$

注意 连支电压可以用树支电压表示。

$$[u]=\begin{bmatrix}u_t\\u_l\end{bmatrix}=[Q_f]^T[u_t]=\begin{bmatrix}1\\Q_l^T\end{bmatrix}[u_t]$$

$$\rightarrow u_l=Q_l^T u_t$$

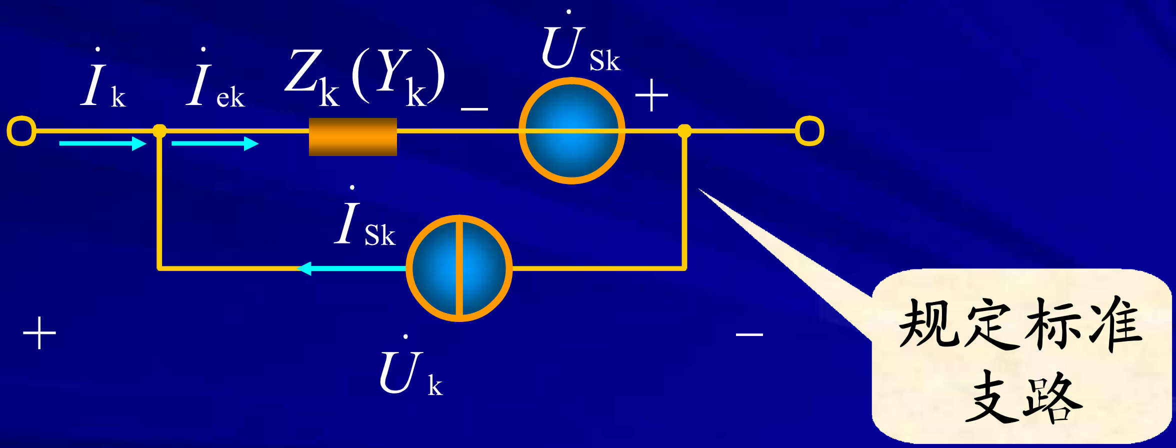
小结

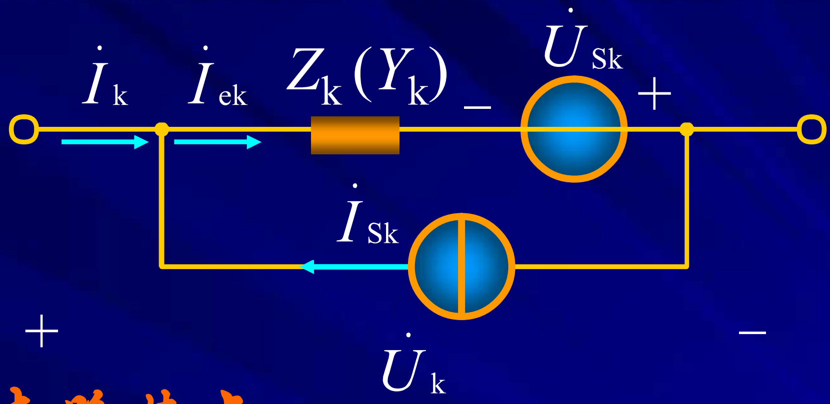
	A	B	Q
KCL	$[A][i]=0$	$[B]^T[i_l]=[i]$ $B_t^T i_l=i_t$	$[Q_f][i]=0$ $i_t=-Q_l i_l$
KVL	$[A]^T[u_n]=[u]$	$[B][u]=0$ $u_l=-B_t u_t$	$[Q]^T[u_t]=[u]$ $u_l=Q_l^T u_t$

12.3 回路电流方程的矩阵形式

1.复合支路

反映元件性质的支路电压和支路电流关系的矩阵形式是网络矩阵分析法的基础。





复合支路特点

①支路的独立电压源和独立电流源的方向与支路电压、电流的方向相反;

②支路电压与支路电流的方向关联;

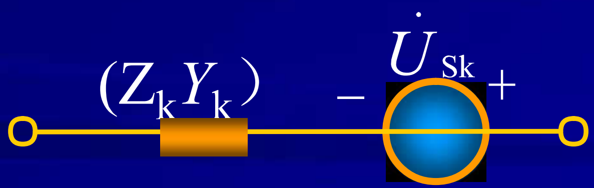
③支路的阻抗（或导纳）只能是单一的电阻、电容、电感，而不能是它们的组合。

即 $$Z_K = \begin{cases} R_k \\ j\omega L_k \\ \dfrac{1}{j\omega C_K} \end{cases}$$

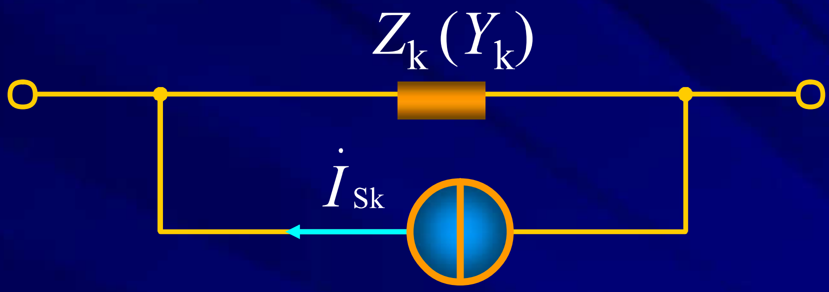
注意

复合支路定义了一条支路最多可以包含的不同元件数及连接方法，但允许缺少某些元件。

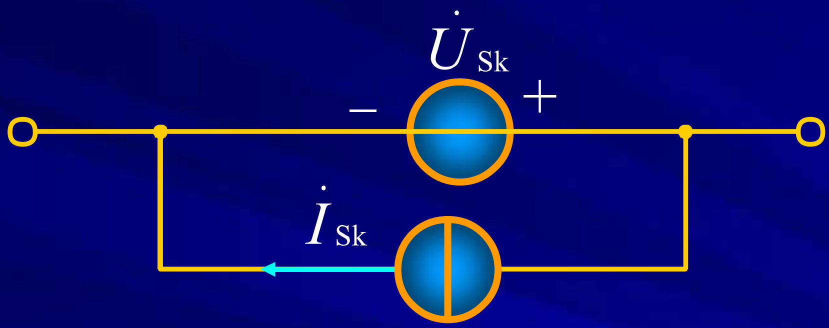
$\dot{U}_{Sk} = 0 \quad \dot{I}_{Sk} = 0$



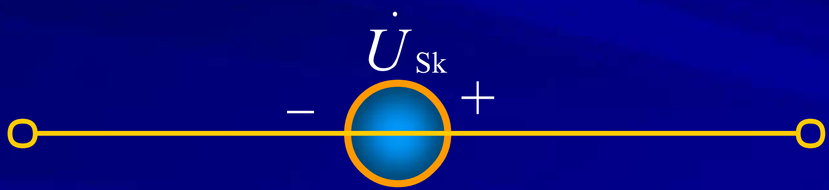
$\dot{I}_{Sk} = 0$



$\dot{U}_{Sk}=0$

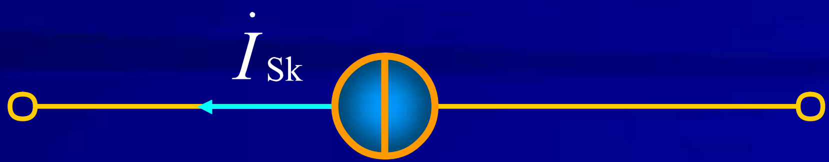


$Z_k(Y_k)=0$



$\dot{I}_{Sk}=0$

$Z_k(Y_k)=0$



$\dot{U}_{Sk}=0$

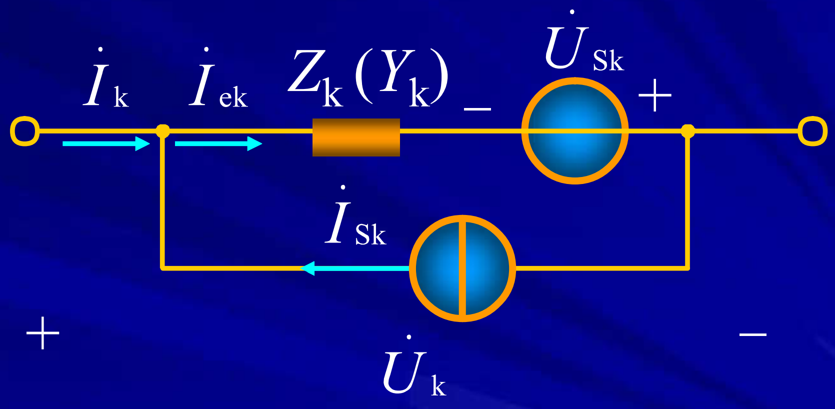
$Z_k(Y_k)=0$

2. 支路阻抗矩阵形式

①电路中电感之间无耦合

$$\dot{U}_k = (\dot{I}_k + \dot{I}_{Sk})Z_k - \dot{U}_{Sk}$$

如有 b 条支路，则有：



$$\dot{U}_1 = (\dot{I}_1 + \dot{I}_{S1})Z_1 - \dot{U}_{S1}$$

$$\dot{U}_2 = (\dot{I}_2 + \dot{I}_{S2})Z_2 - \dot{U}_{S2}$$

… … … …

$$\dot{U}_b = (\dot{I}_b + \dot{I}_{Sb})Z_b - \dot{U}_{Sb}$$

设 $\left[\dot{I}\right]=\left[\dot{I}_1\,\dot{I}_2\cdots\cdots\dot{I}_b\right]^{\mathrm{T}}$ → 支路电流列向量

$\left[\dot{U}\right]=\left[\dot{U}_1\,\dot{U}_2\cdots\cdots\dot{U}_b\right]^{\mathrm{T}}$ → 支路电压列向量

$\left[\dot{U}_s\right]=\left[\dot{U}_{s1}\,\dot{U}_{s2}\cdots\cdots\dot{U}_{sb}\right]^{\mathrm{T}}$ → 电压源的电压列向量

$\left[\dot{I}_s\right]=\left[\dot{I}_{s1}\,\dot{I}_{s2}\cdots\cdots\dot{I}_{sb}\right]^{\mathrm{T}}$ → 电流源的电流列向量

$[Z]=\mathrm{diag}[Z_1\,Z_2\cdots\cdots Z_b]$ → 阻抗矩阵

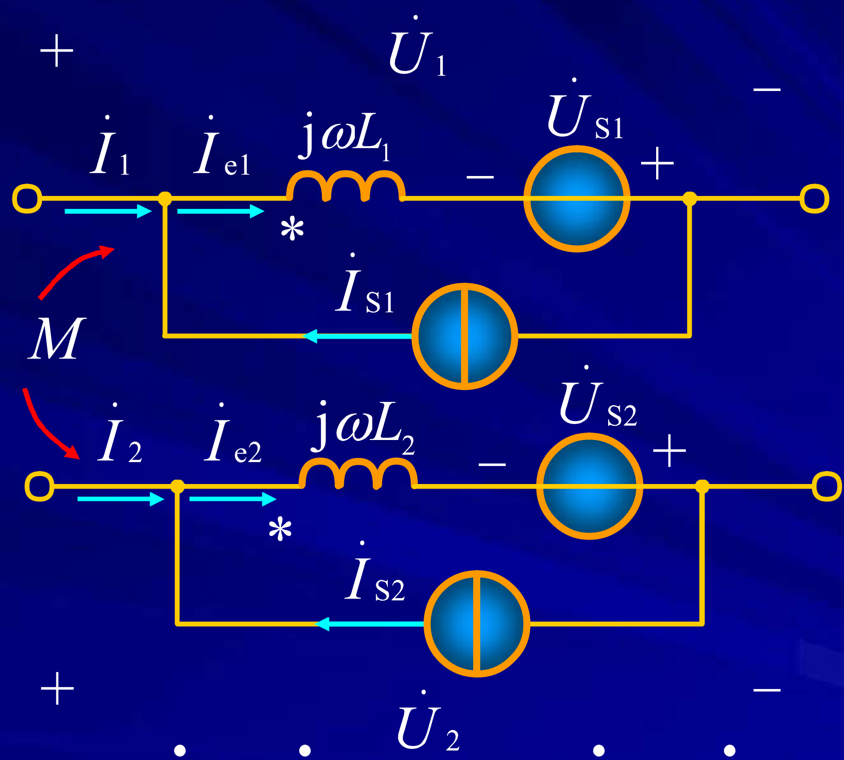
整个电路的支路电压、电流关系矩阵：

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \vdots \\ \dot{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Z_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 + \dot{I}_{s1} \\ \vdots \\ \dot{I}_b + \dot{I}_{sb} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{U}_{s1} \\ \vdots \\ \dot{U}_{sb} \end{bmatrix}$$

b×b阶对角阵

$$\left[\dot{U}\right] = [Z]\left[\dot{I}\right] + [Z]\left[\dot{I}_s\right] - \left[\dot{U}_s\right]$$

②电路中电感之间有耦合



$$\dot{U}_1 = j\omega L_1(\dot{I}_{S1}+\dot{I}_1)+j\omega M(\dot{I}_{S2}+\dot{I}_2)-\dot{U}_{S1}$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2(\dot{I}_{S2}+\dot{I}_2)+j\omega M(\dot{I}_{S1}+\dot{I}_1)-\dot{U}_{S2}$$

$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1(\dot{I}_{S1}+\dot{I}_1)+\mathrm{j}\omega M(\dot{I}_{S2}+\dot{I}_2)-\dot{U}_{S1}$$

$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_2(\dot{I}_{S2}+\dot{I}_2)+\mathrm{j}\omega M(\dot{I}_{S1}+\dot{I}_1)-\dot{U}_{S2}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{j}\omega L_1 & \mathrm{j}\omega M\\ \mathrm{j}\omega M & \mathrm{j}\omega L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_{S1}+\dot{I}_1\\ \dot{I}_{S2}+\dot{I}_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\dot{U}_{S1}\\ \dot{U}_{S2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\\ \vdots\\ \dot{U}_\mathrm{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{j}\omega L_1 & \mathrm{j}\omega M & & 0\\ \mathrm{j}\omega M & \mathrm{j}\omega L_2 & & \\ & & Z_3 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & Z_\mathrm{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_{S1}+\dot{I}_1\\ \vdots\\ \dot{I}_{\mathrm{Sb}}+\dot{I}_\mathrm{b}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\dot{U}_{S1}\\ \vdots\\ \dot{U}_{sb}\end{bmatrix}$$

$$[Z]=\begin{bmatrix} \mathrm{j}\omega L_1 & \mathrm{j}\omega M & & & 0 \\ \mathrm{j}\omega M & \mathrm{j}\omega L_2 & & & \\ & & Z_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & Z_b \end{bmatrix}$$

Z不是对角阵

如1支路至g支路间均有互感

$$\dot{U}_1 = Z_1\dot{I}_{e1} \pm \mathrm{j}\omega M_{12}\dot{I}_{e2} \pm \mathrm{j}\omega M_{13}\dot{I}_{e3} \pm \cdots \pm \mathrm{j}\omega M_{1g}\dot{I}_{eg} - \dot{U}_{S1}$$

$$\dot{U}_2 = \pm \mathrm{j}\omega M_{21}\dot{I}_{e1} + Z_2\dot{I}_{e2} \pm \mathrm{j}\omega M_{23}\dot{I}_{e3} \pm \cdots \pm \mathrm{j}\omega M_{2g}\dot{I}_{eg} - \dot{U}_{S2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

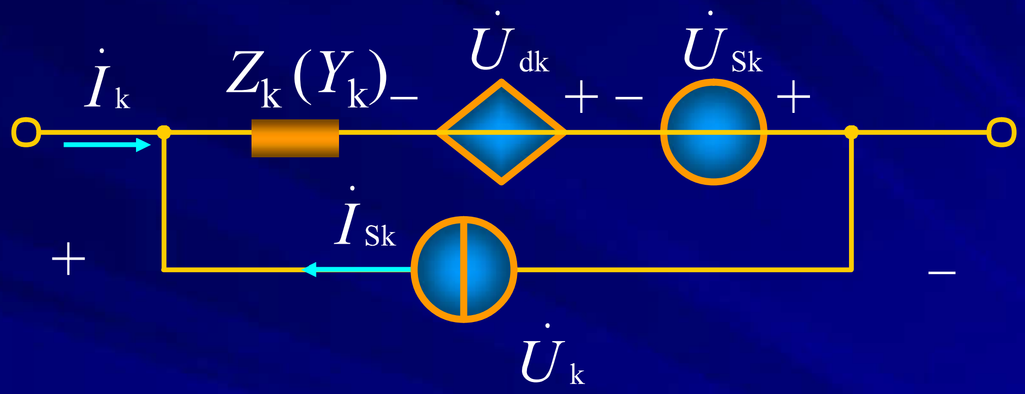
$$\dot{U}_g = \pm \mathrm{j}\omega M_{g1}\dot{I}_{e1} \pm \mathrm{j}\omega M_{g2}\dot{I}_{e2} \pm \mathrm{j}\omega M_{g3}\dot{I}_{e3} \pm \cdots \pm Z_g\dot{I}_{eg} - \dot{U}_{Sg}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_g \\ \dot{U}_h \\ \vdots \\ \dot{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & \pm\mathrm{j}\omega M_{12} & \cdots & \pm\mathrm{j}\omega M_{1g} & 0 & \cdots & 0 \\ \pm\mathrm{j}\omega M_{21} & Z_2 & \cdots & \pm\mathrm{j}\omega M_{2g} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pm\mathrm{j}\omega M_{g1} & \pm\mathrm{j}\omega M_{g2} & \cdots & \pm Z_g & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Z_h & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & Z_b \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 + \dot{I}_{S1} \\ \dot{I}_2 + \dot{I}_{S2} \\ \vdots \\ \dot{I}_g + \dot{I}_{Sg} \\ \dot{I}_h + \dot{I}_{Sh} \\ \vdots \\ \dot{I}_b + \dot{I}_{Sb} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{U}_{S1} \\ \dot{U}_{S2} \\ \vdots \\ \dot{U}_{Sg} \\ \dot{U}_{Sh} \\ \vdots \\ \dot{U}_{Sb} \end{bmatrix}$$

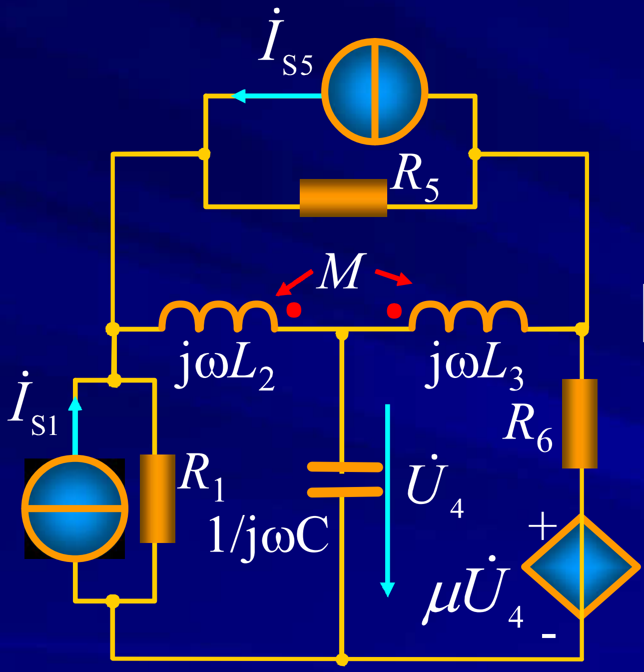
$$\dot{U} = Z(\dot{I} + \dot{I}_S) - \dot{U}_S$$

③电路中有受控电压源



[Z]的非主对角元素将有与受控电压源的控制系数有关的元素。

例 写出图示电路的阻抗矩阵



$$
[Z]=\begin{bmatrix}
R_1 & \cdots & & & & 0 \\
0 & j\omega L_2 & \pm j\omega M & \cdots & & 0 \\
0 & \pm j\omega M & j\omega L_3 & \cdots & & 0 \\
0 & \cdots & & 1/j\omega C \cdots & & 0 \\
0 & & \cdots & & R_5 & 0 \\
0 & & \cdots & \mu/j\omega C & & R_6
\end{bmatrix}
$$

3. 回路电流方程的矩阵形式

KVL： $[B][\dot{U}_b]=0$

KCL： $[\dot{I}_b]=[B]^T[\dot{I}_l]$

回路电流$[i_l]$
(b-n+1)×1阶

支路方程： $[\dot{U}_b]=[Z][\dot{I}_b]+[Z][\dot{I}_S]-[\dot{U}_S]$

$$[B][\dot{U}_b]=[B][Z][\dot{I}_b]+[B][Z][\dot{I}_S]-[B][\dot{U}_S]=0$$

$$[B][Z][B]^T[\dot{I}_l]=[B][\dot{U}_S]-[B][Z][\dot{I}_S]$$

$$[B][Z][B]^T\left[\dot{I}_l\right]=[B]\left[\dot{U}_S\right]-[B][Z]\left[\dot{I}_S\right]$$

$[Z_l]=[B][Z][B]^{\mathrm{T}}$ → 回路阻抗阵，主对角线元素为自阻抗，其余元素为互阻抗。

$\left[\dot{U}_{lS}\right]=[B]\left[\dot{U}_{S}\right]-[B][Z]\left[\dot{I}_{S}\right]$ → 回路电压源向量

$[Z_l]\left[\dot{I}_l\right]=\left[\dot{U}_{lS}\right]$ → 回路矩阵方程

小结 回路分析法的步骤:

①从已知网络，写出 $[B]$ $[Z]$ $\left[\dot{U}_S\right]$ $\left[\dot{I}_S\right]$

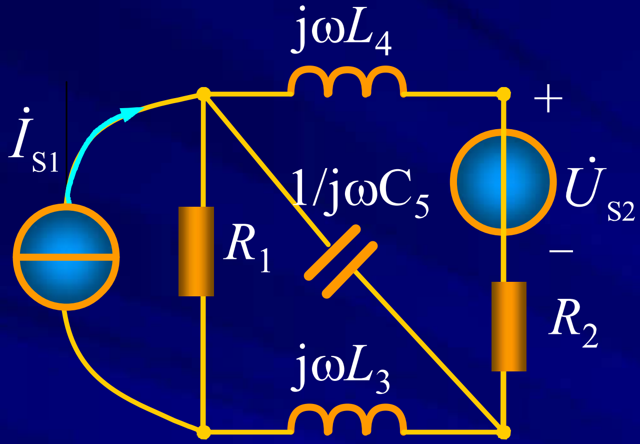
②求出 $[Z_l]$ $\left[\dot{U}_{ls}\right]$ 列出回路方程

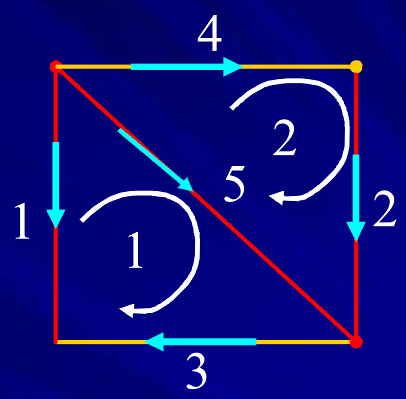
$$[Z_l]\left[\dot{I}_l\right]=\left[\dot{U}_{lS}\right]$$

③求出 $\left[\dot{I}_l\right]$ 由KCL解出 $\left[\dot{I}_b\right]=[B]^T\left[\dot{I}_l\right]$

根据支路方程解出 $\left[\dot{U}_b\right]$

例　用矩阵形式列出电路的回路电流方程。





解　做出有向图，选支路1，2，5为树枝。

$$
[B]=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$Z = \mathrm{diag}\left[R_1, R_2, \mathrm{j}\omega L_3, \mathrm{j}\omega L_4, \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_5}\right]$$

$$\dot{U}_S = [0\ \ -\dot{U}_{S2}\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$$

$$\dot{I}_S = [\dot{I}_{S1}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$$

把上式各矩阵代入回路电流方程的矩阵形式

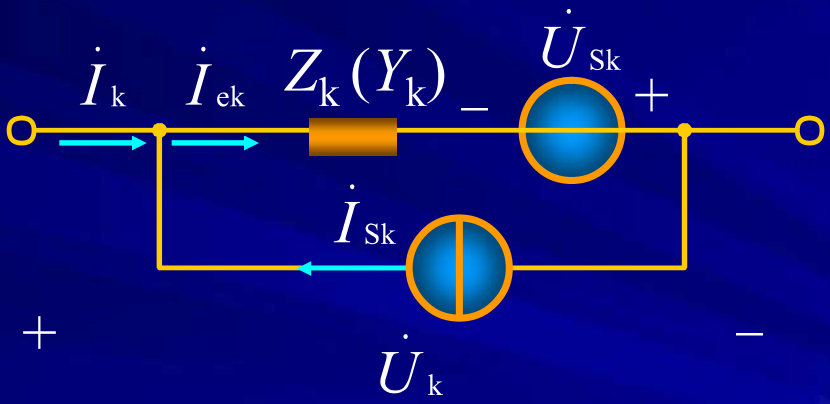
$$[B][Z][B]^T\left[\dot{I}_l\right] = [B]\left[\dot{U}_S\right] - [B][Z]\left[\dot{I}_S\right]$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + \mathrm{j}\omega L_3 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_5} & -\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_5} \\ -\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_5} & R_2 + \mathrm{j}\omega L_4 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{l1} \\ \dot{I}_{l2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \dot{I}_{S1} \\ -\dot{U}_{S2} \end{bmatrix}$$

12.4 结点电压方程的矩阵形式

1. 支路导纳矩阵形式

①电路中不含互感和受控源



$$\dot{U}_k = (\dot{I}_k + \dot{I}_{Sk})Z_k - \dot{U}_{Sk}$$

$$\dot{I}_k = Y_k\dot{U}_k + Y_k\dot{U}_{Sk} - \dot{I}_{Sk}$$

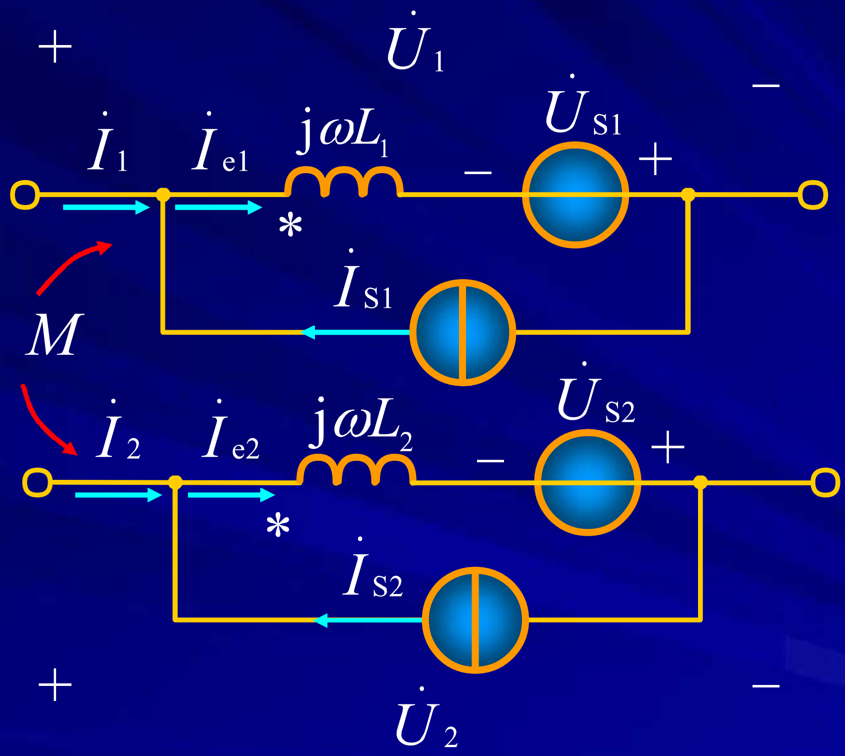
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \vdots \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 + \dot{U}_{s1} \\ \vdots \\ \dot{U}_b + \dot{U}_{sb} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{I}_{s1} \\ \vdots \\ \dot{I}_{sb} \end{bmatrix}$$

$$\left[\dot{I}\right] = [Y]\left[\dot{U}\right] + [Y]\left[\dot{U}_S\right] - \left[\dot{I}_S\right]$$

$$[Y]=[Z]^{-1}=\begin{bmatrix} Y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{Z_b} \end{bmatrix}$$

b×b阶对角阵

②电路中电感之间有耦合



$$[Z_{11}]=\begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix}$$

$$[Y]=[Z]^{-1}=\begin{bmatrix} Z_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{Z_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{Z_b} \end{bmatrix}$$

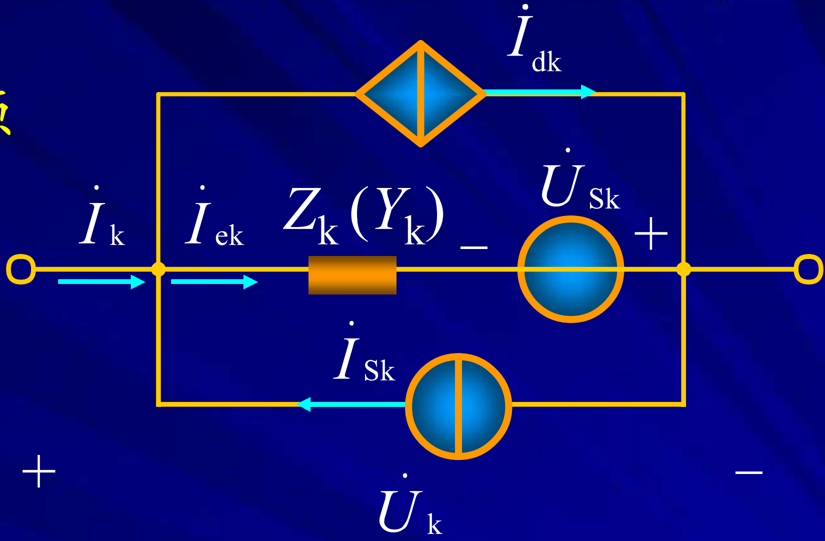
$$[Z_{11}]^{-1}=\begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{L_2}{\Delta} & -\dfrac{M}{\Delta} \\ -\dfrac{M}{\Delta} & \dfrac{L_1}{\Delta} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = j\omega(L_1L_2-M^2)$$

③电路中有受控电源

(a) $\dot{I}_{dk}$ 为VCCS

设： $\dot{I}_{dk}=g_{kj}\dot{U}_{ej}$



$$\dot{I}_{ek}=Y_k\dot{U}_{ek}=Y_k(\dot{U}_k+\dot{U}_{Sk})$$

$$\dot{I}_{dk}=g_{kj}\dot{U}_{ej}=g_{kj}(\dot{U}_j+\dot{U}_{Sj})$$

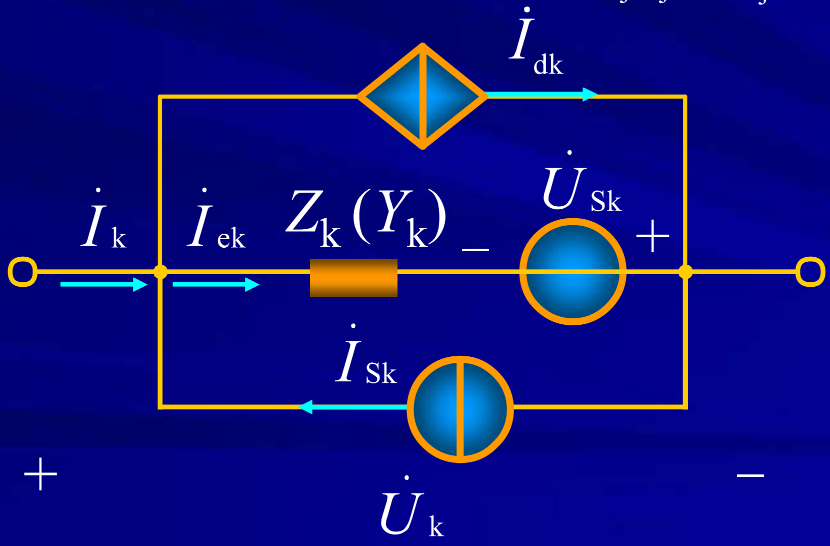
$$\dot{I}_k=Y_k(\dot{U}_k+\dot{U}_{Sk})+g_{kj}(\dot{U}_j+\dot{U}_{Sj})-\dot{I}_{Sk}$$

(2) $\dot{I}_{dk}$ 为CCCS

设：$\dot{I}_{dk} = \beta_{kj}\dot{I}_{ej}$

$$\dot{I}_{ej} = Y_j(\dot{U}_j + \dot{U}_{Sj})$$

$$\Rightarrow \dot{I}_k = Y_k(\dot{U}_k + \dot{U}_{Sk}) + \beta_{kj}Y_j(\dot{U}_j + \dot{U}_{Sj}) - \dot{I}_{Sk}$$



考虑b个支路时:

若: $\dot{I}_{k} = Y_{k}(\dot{U}_{k} + \dot{U}_{Sk}) + g_{kj}(\dot{U}_{j} + \dot{U}_{Sj}) - \dot{I}_{Sk}$

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \vdots\\ \dot{I}_k\\ \vdots\\ \dot{I}_j\\ \vdots\\ \dot{I}_b\end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & k & & j & & \end{array}\\ \begin{bmatrix} Y_1 & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & \\ & & Y_k & & g_{kj} & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & Y_j & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & Y_b\end{bmatrix}\end{array} \begin{bmatrix}\dot{U}_1+\dot{U}_{S1}\\ \vdots\\ \dot{U}_k+\dot{U}_{Sk}\\ \vdots\\ \dot{U}_j+\dot{U}_{Sj}\\ \vdots\\ \dot{U}_b+\dot{U}_{Sb}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\dot{I}_{s1}\\ \vdots\\ \dot{I}_{sk}\\ \vdots\\ \dot{I}_{sj}\\ \vdots\\ \dot{I}_{Sb}\end{bmatrix}$$

若： $\dot{I}_{k}=Y_{k}(\dot{U}_{k}+\dot{U}_{Sk})+\beta_{kj}Y_{j}(\dot{U}_{j}+\dot{U}_{Sj})-\dot{I}_{Sk}$

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \vdots\\ \dot{I}_k\\ \vdots\\ \dot{I}_j\\ \vdots\\ \dot{I}_b\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} & & \qquad k & & \qquad j & & \end{array}\\ \begin{bmatrix} Y_1 & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & \\ & & Y_k & & \beta_{kj}Y_j & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & Y_j & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & Y_b\end{bmatrix}\end{array}\begin{bmatrix}\dot{U}_1+\dot{U}_{S1}\\ \vdots\\ \dot{U}_k+\dot{U}_{Sk}\\ \vdots\\ \dot{U}_j+\dot{U}_{Sj}\\ \vdots\\ \dot{U}_b+\dot{U}_{Sb}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\dot{I}_{s1}\\ \vdots\\ \dot{I}_{sk}\\ \vdots\\ \dot{I}_{sj}\\ \vdots\\ \dot{I}_{Sb}\end{bmatrix}$$

2. 结点电压方程的矩阵形式

支路方程: $\left[\dot{I}\right]=[Y]\left[\dot{U}\right]+[Y]\left[\dot{U}_{\mathrm{S}}\right]-\left[\dot{I}_{\mathrm{S}}\right]$

KCL　$[A]\left[\dot{I}\right]=0$

$$\Rightarrow [A][Y]\left[\dot{U}\right]+[A][Y]\left[\dot{U}_{\mathrm{S}}\right]-[A]\left[\dot{I}_{\mathrm{S}}\right]=0$$

KVL　$\left[\dot{U}\right]=[A]^{\mathrm{T}}\left[\dot{U}_{\mathrm{n}}\right]$

$$\Rightarrow [A][Y][A]^{\mathrm{T}}\left[\dot{U}_{\mathrm{n}}\right]=[A]\left[\dot{I}_{\mathrm{S}}\right]-[A][Y]\left[\dot{U}_{\mathrm{S}}\right]=\left[\dot{I}_{\mathrm{sn}}\right]$$

$$\underbrace{[A][Y][A]^{\mathrm{T}}}_{[Y_n]}\left[\dot{U}_{n}\right]=[A]\left[\dot{I}_{S}\right]-[A][Y]\left[\dot{U}_{S}\right]=\left[\dot{I}_{sn}\right]$$

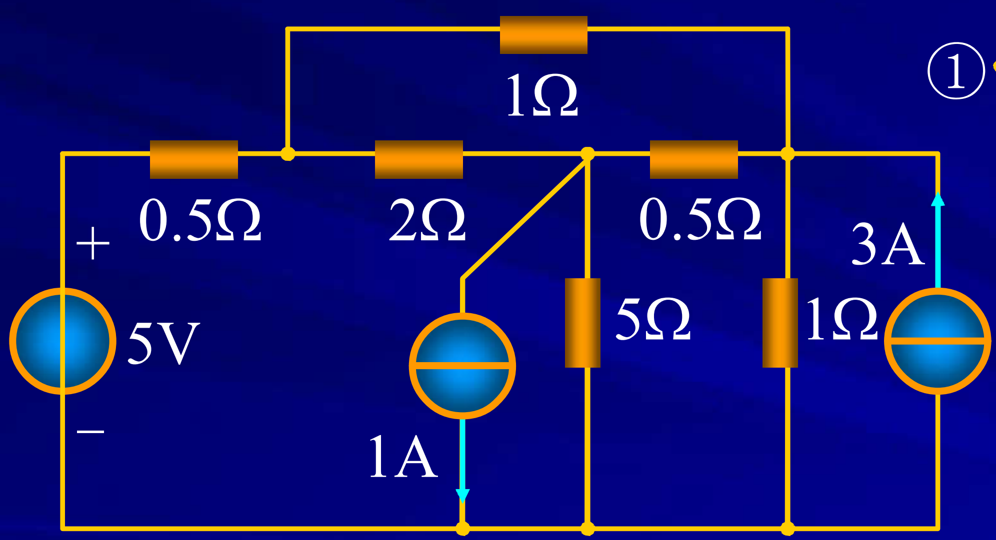
结点导纳阵

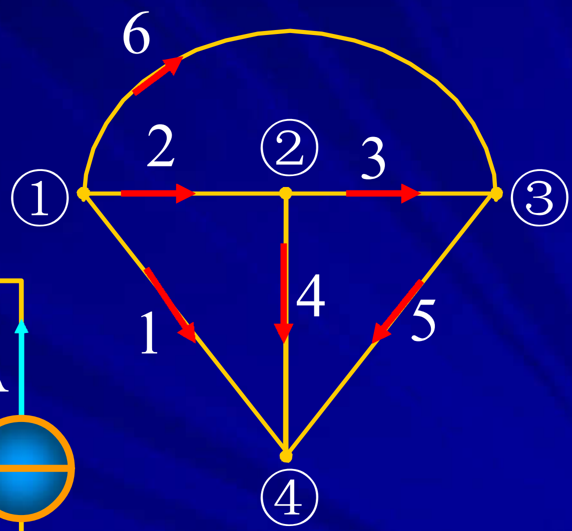
独立电源引起的流入结点的电流列向量

$$\boxed{[Y_n]\left[\dot{U}_{n}\right]=\left[\dot{I}_{Sn}\right]}$$

小结　结点分析法的步骤

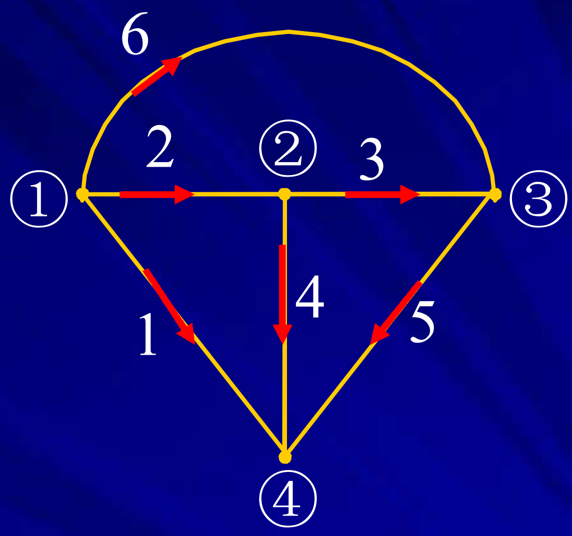
第一步：把电路抽象为有向图





第二步：形成矩阵[A]

$$[A]=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$



第三步：形成矩阵[Y]

$$[Y]=\begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 0.5 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 0.2 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

第四步：形成[U_S]、[I_S]

$$[U_S]=[\ -5\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ]^T$$

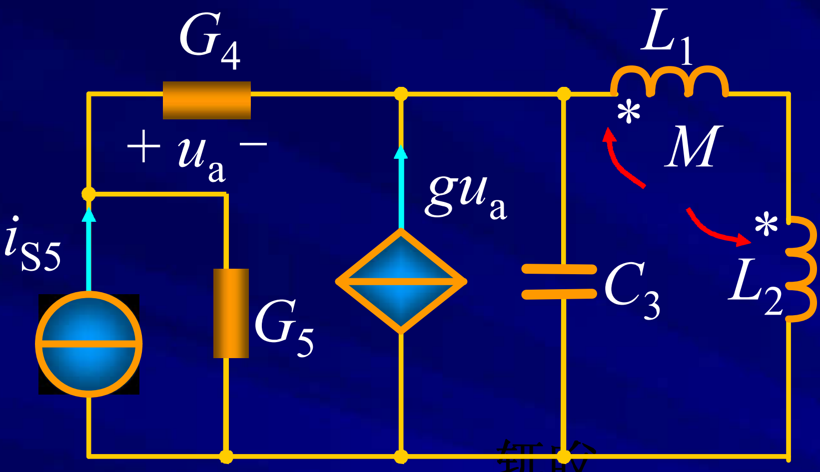
$$[I_S]=[0\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 3\ \ 0\ ]^T$$

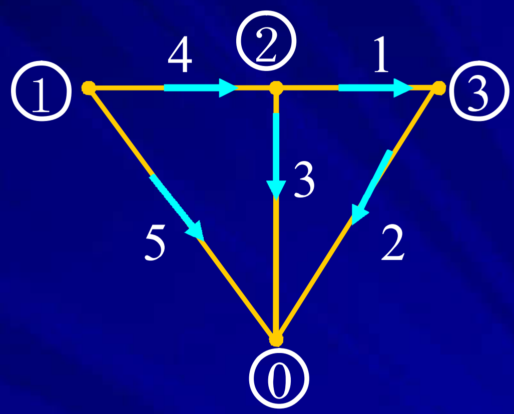
第五步：用矩阵乘法求得结点方程

$$[A][Y][A]^{\mathrm{T}}\left[\dot{U}_{\mathrm{n}}\right]=[A]\left[\dot{I}_{\mathrm{S}}\right]-[A][Y]\left[\dot{U}_{\mathrm{S}}\right]=\left[\dot{I}_{\mathrm{sn}}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 3.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 2.7 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{U}_{\mathrm{n1}} \\ \dot{U}_{\mathrm{n2}} \\ \dot{U}_{\mathrm{n3}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

例　用矩阵形式列出电路的结点电压方程。

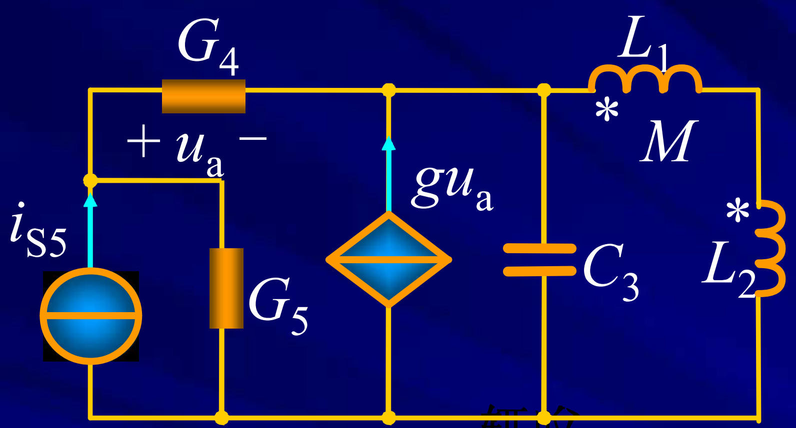


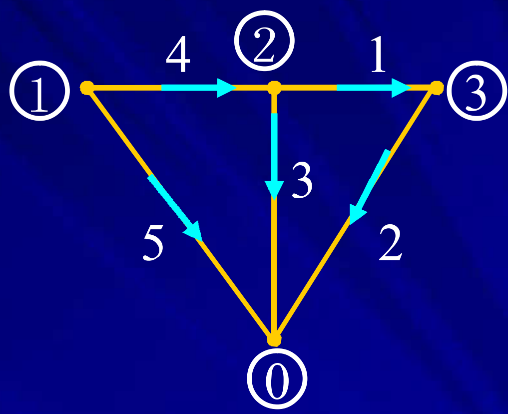


解　做出有向图

$$[A]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\dot{I}_S]=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dot{I}_{S5}]$$





$$[Y]=\begin{bmatrix} \dfrac{L_2}{\Delta} & \dfrac{-M}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{-M}{\Delta} & \dfrac{L_1}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega C_3 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix}$$

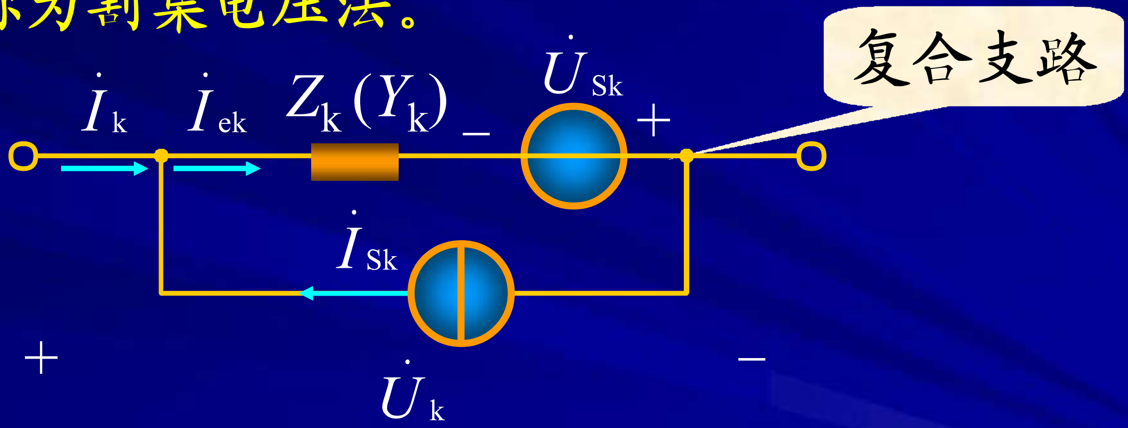
注意g的位置

代入 $[A][Y][A]^{\mathrm{T}}\left[\dot{U}_{\mathrm{n}}\right]=[A]\left[\dot{I}_{\mathrm{S}}\right]-[A][Y]\left[\dot{U}_{\mathrm{S}}\right]$

$$\begin{bmatrix} G_4+G_5 & -G_4 & 0 \\ -g-G_4 & g+G_4+j\omega L_3+\dfrac{L_2}{\Delta} & -\dfrac{L_2+M}{\Delta} \\ 0 & -\dfrac{L_2+M}{\Delta} & \dfrac{L_1+L_2+2M}{\Delta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_{\mathrm{n1}} \\ \dot{U}_{\mathrm{n2}} \\ \dot{U}_{\mathrm{n3}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{I}_{\mathrm{S5}} \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

*12.6 割集电压方程的矩阵形式

割集电压是指由割集划分的两分离部分之间的一种假想电压。以割集电压为电路独立变量的分析法称为割集电压法。



用导纳表示的支路方程:

$$\left[\dot{I}_b\right]=[Y]\left[\dot{U}_b\right]+[Y]\left[\dot{U}_S\right]-\left[\dot{I}_S\right]$$

$$\left[\dot{I}_{\mathrm{b}}\right]=[Y]\left[\dot{U}_{\mathrm{b}}\right]+[Y]\left[\dot{U}_{\mathrm{S}}\right]-\left[\dot{I}_{\mathrm{S}}\right]$$

KCL： $$[Q_f]\left[\dot{I}_{\mathrm{b}}\right]=0$$

以树支电压为未知量

KVL： $$\left[\dot{U}_{\mathrm{b}}\right]=[Q_f]^{\mathrm{T}}\left[\dot{U}_{\mathrm{t}}\right]$$

$$[Q_f]\left[\dot{I}_{\mathrm{b}}\right]=[Q_f][Y]\left[\dot{U}_{\mathrm{b}}\right]+[Q_f][Y]\left[\dot{U}_{\mathrm{S}}\right]-[Q_f]\left[\dot{I}_{\mathrm{S}}\right]=0$$

结合以上方程有：

$$[Q_f][Y][Q_f]^{\mathrm{T}}\left[\dot{U}_{\mathrm{t}}\right]=[Q_f]\left[\dot{I}_{\mathrm{S}}\right]-[Q_f][Y]\left[\dot{U}_{\mathrm{S}}\right]$$

$$[Q_f][Y][Q_f]^{\mathrm{T}}\left[\dot{U}_{\mathrm{t}}\right]=[Q_f]\left[\dot{I}_{\mathrm{S}}\right]-[Q_f][Y]\left[\dot{U}_{\mathrm{S}}\right]$$

$$[Y_{\mathrm{t}}]=[Q][Y][Q]^{\mathrm{T}} \rightarrow$$

割集导纳矩阵，主对角线元素为相应割集各支路的导纳之和，总为正；其余元素为相应两割集之间共有支路导纳之和。

$$\left[\dot{I}_{\mathrm{t}}\right]=[Q_f]\left[\dot{I}_{\mathrm{S}}\right]-[Q_f][Y]\left[\dot{U}_{\mathrm{S}}\right] \rightarrow$$ 割集电流源向量

$$[Y_t]\left[\dot{U}_{\mathrm{t}}\right]=\left[\dot{I}_{\mathrm{t}}\right]$$

割集矩阵方程

注意 割集电压法是结点电压法的推广，或者说结点电压法是割集电压法的一个特例。若选择一组独立割集，使每一割集都由汇集在一个结点上的支路构成时，割集电压法便成为结点电压法。

小结 割集分析法的步骤：

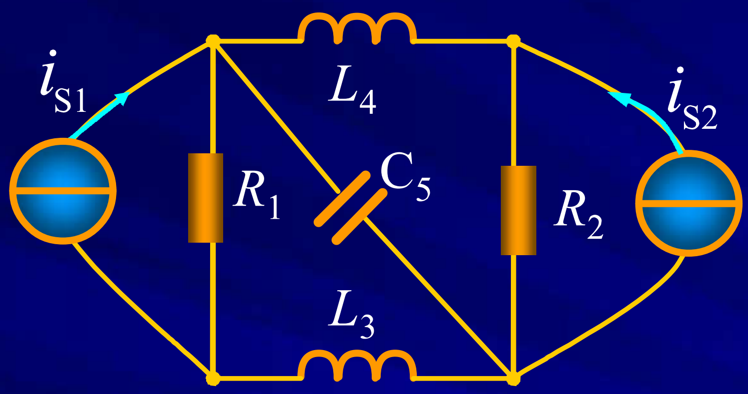
①选定一个树，写出 $[Q_f], [Y], [\dot{U}_S], [\dot{I}_S]$

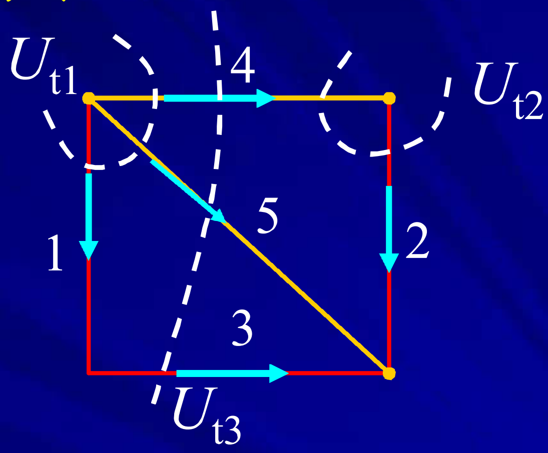
②计算 $[Y_t]\ [\dot{I}_t]$，列出割集方程 $[Y_t][\dot{U}_t]=[\dot{I}_t]$

③求出 $[\dot{U}_t]$，由KVL解出 $[\dot{U}_b]$

根据支路方程解出 $[\dot{I}_b]$

例 以运算形式列出电路的割集电压方程的矩阵形式，设动态元件的初始条件为零。





解 做出有向图，选支路1，2，3为树枝。

$$
Q_f = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

用拉氏变换表示时，有：

$$U_S(s)=0 \qquad I_S(s)=[I_{S1}(s) \quad I_{S2}(s) \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$Y(s)=\mathrm{diag}\left[\frac{1}{R_1},\frac{1}{R_2},\frac{1}{sL_3},\frac{1}{sL_4},sC_5\right]$$

代入割集方程：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{sL_4}+sC_5 & -\frac{1}{sL_4} & \frac{1}{sL_4}+sC_5 \\ -\frac{1}{sL_4} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{sL_4} & -\frac{1}{sL_4} \\ \frac{1}{sL_4}+sC_5 & -\frac{1}{sL_4} & \frac{1}{sL_3}+\frac{1}{sL_4}+sC_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{t1}(s) \\ U_{t2}(s) \\ U_{t3}(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{S1}(s) \\ I_{S2}(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

12.6* 状态方程

1. 网络的状态与状态变量

● 网络状态

指能和激励一道唯一确定网络现时和未来行为的最少量的一组信息。

● 状态变量

电路的一组独立的动态变量X，

$$X=[x_1, x_2 \ldots\ldots x_n]^T ,$$

它们在任何时刻的值组成了该时刻的状态，如独立的电容电压（或电荷），电感电流（或磁通链）就是电路的状态变量。

● 状态变量法

借助于状态变量，建立一组联系状态变量和激励函数的一阶微分方程组，称为状态方程。只要知道状态变量在某一时刻值$X(t_0)$,再知道输入激励$e(t)$，就可以确定$t>t_0$后电路的全部性状(响应)。

状态变量　$X(t_0)$

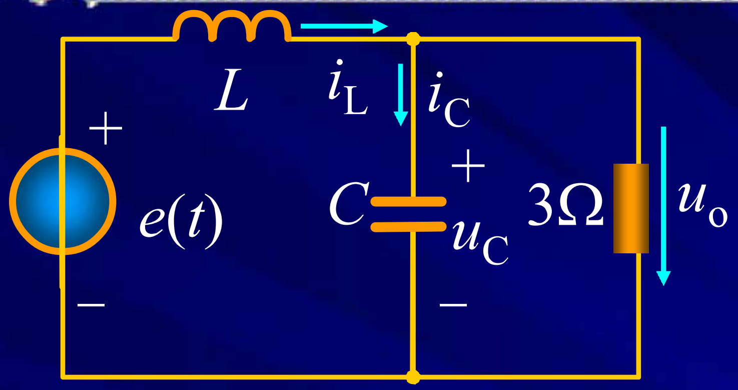
激　励　$e(t)$ $(t \geq t_0)$

→ $Y(t)$ $(t \geq t_0)$ 响应

注意

这里讲的为数最少的变量必须是互相独立的。

例



已知:

$$e(t) = 20\sin(\omega t + 30^{o})$$

$$u_C(0_-) = 3\text{V}$$

$$i_L(0_-) = 0$$

求: $i_C(0_+), u_L(0_+), i_R(0_+), u_R(0_+).$

解

$$\left.\begin{array}{l} u_C(0_-) = 3\text{V} \\ i_L(0_-) = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_R(0_+) = 3\text{V} \\ u_L(0_+) = 7\text{V} \\ i_R(0_+) = 1\text{A} \\ i_C(0_+) = -1\text{A} \end{array}\right.$$

$$e(0)=10\text{V}$$

同理可推广至任一时刻t_1

由 $e(t_1)$ 　$u_C(t_1)$ 　$i_L(t_1)$ $\xrightarrow{\text{求出}}$ $u_R(t_1)$ 　$u_L(t_1)$ 　$i_R(t_1)$ 　$i_C(t_1)$

表明

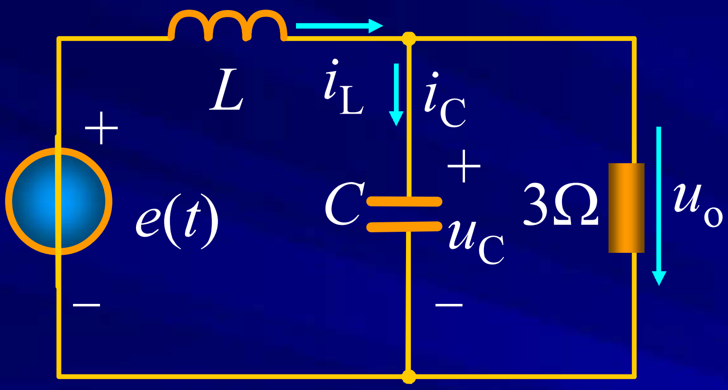
(1) 状态变量和储能元件有关

(2) 有几个独立的储能元件，就有几个状态变量

(3) 状态变量的选择不唯一。

2. 状态方程的列写

每一个状态方程中只含有一个状态变量的一阶导数。对简单电路采用直观编写法。



设 u_c、i_L 为状态变量

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = i_L - \frac{u_C}{R}$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = e(t) - u_C$$

整理得

$$\begin{cases} \dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{i_L}{C} - \dfrac{u_C}{RC} \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{e(t)}{L} - \dfrac{u_C}{L} \end{cases}$$

状态方程

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} e(t)$$

特点　① 联立的一阶微分方程组

② 左端为状态变量的一阶导数

③ 右端含状态变量和输入量

一般形式

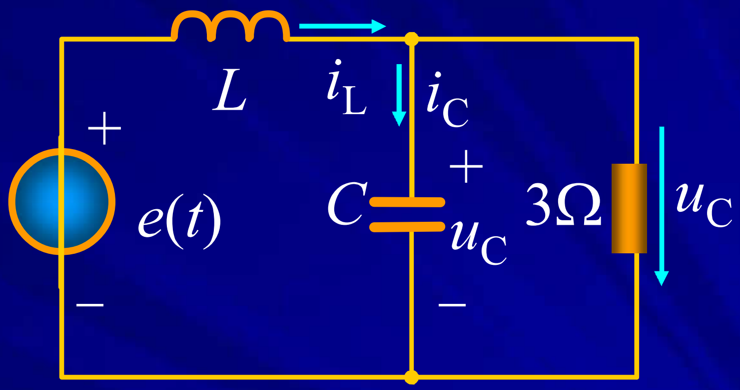
$$\left[\dot{X}\right] = [A]\ [X] + [B]\ [V]$$

$$[X] = [x_1, x_2 \cdots x_n]^T$$

$$\left[\dot{X}\right] = \left[\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \quad \cdots \quad \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\right]^T$$

电路的输出方程 → 电路中某些感兴趣的量与状态变量和输入量之间的关系

$$\begin{bmatrix} u_L \\ i_C \\ u_R \\ i_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\dfrac{1}{R} & 1 \\ 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [e(t)]$$

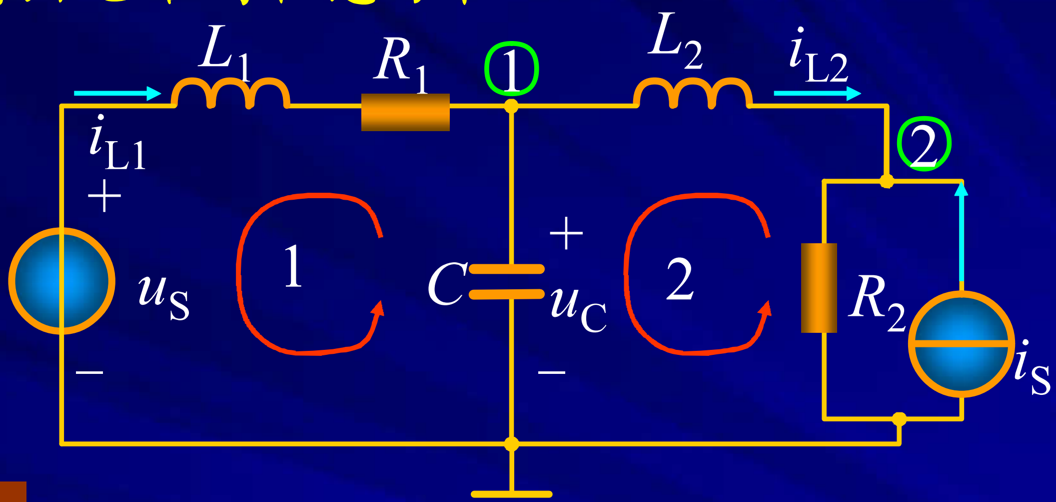


特点　①代数方程

②用状态变量和输入量表示输出量

一般形式　　$[Y]=[C][X]+[D][V]$

例　列出电路的状态方程



解

对结点①列出KCL方程

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_{L_1}-i_{L_2}$$

对回路1和回路2列出KVL方程

$$\begin{cases} L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_{L_1}}{\mathrm{d}t} = -u_C - R_1 i_{L_1} + u_S \\ L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_{L_2}}{\mathrm{d}t} = u_C - R_2(i_{L_2} + i_S) \end{cases}$$

把以上方程整理成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L_1}}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L_2}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{R_1}{L_1} & 0 \\ \dfrac{1}{L_2} & 0 & -\dfrac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

若以结点①、②的电压作为输出，则有

$$u_{n1}=u_C$$

$$u_{n2}=(i_{L_2}+i_S)R_2$$

整理并写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ i_{L_2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$