第九讲 决策论

——单目标决策

管理就是决策！

——西蒙(A.Simon)

【单目标决策】

9.1 决策的分类

- 1.按性质的重要性分类：可将决策分为**战略决策**、**策略决策**和**执行决策**，或叫战略计划、管理控制和运行控制。
- 2.按决策的结构分类：分为**程序决策**和**非程序决策**。
- 3.按定量和定性分类：分为**定量决策**和**定性决策**，描述决策对象的指标都可以量化时可用定量决策，否则只能用定性决策。总的发展趋势是尽可能地把决策问题量化。
- 4.按决策环境分类：可将决策问题分为**确定型**的、**风险型**的和**不确定型**的三种。
- 5.按决策过程的连续性分类：可分为**单项决策**和**序贯决策**。

9.2 决策过程

构造人们决策行为的模型主要有两种方法：

一种是面向决策结果的方法；

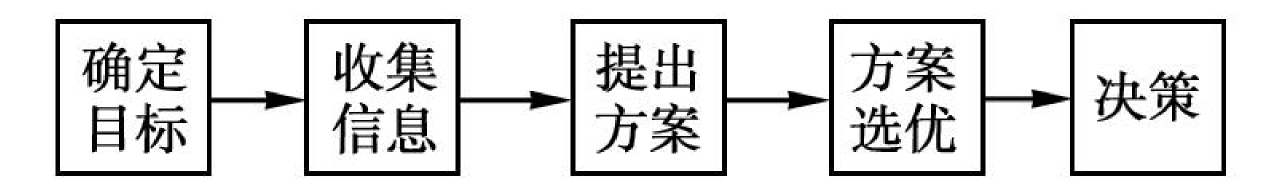
另一种是面向决策过程的方法。

(1)面向决策结果的方法认为：

若决策者能正确地预见到决策结果，其核心是决策的结果和正确的预测。通常的单目标和多目标决策是属这类型的。

(2)面向决策过程的方法认为：

- 若决策者了解了决策过程，掌握了过程和能控制过程，他就能正确地预见决策的结果。对于面向决策结果的方法的程序比较简单，见图9-1。



由上图可知，任何决策都有一个过程和程序，绝非决策者灵机一动拍板就行。

面向决策过程的方法一般包括：

预决策→决策→决策后三个互相依赖的阶段。

决策问题的要素构成：

- (1) **决策者**，他的任务是进行决策。决策者可以是个人、委员会或某个组织。一般指领导者或领导集体。
- (2) **可供选择的方案(替代方案)、行动或策略**。参谋人员的任务是为决策者提供各种可行方案。
- (3) **决策准则**。准则是衡量选择方案，包括目的、目标、属性、正确性的标准，在决策时有单一准则和多准则。
- (4)**事件**是指不为决策者所控制的客观存在的将发生的状态。
- (5)**结果**。每一事件的发生将会产生某种结果，如获得收益或损失。
- (6)**决策者的价值观。**如决策者对货币额或不同风险程度的主观价值观念。

9.3 不确定型的决策

不确定型的决策——是指决策者对环境情况一无所知。这时决策者是根据自己的主观倾向进行决策，由决策者的主观态度不同基本可分为四种准则：

1、悲观主义准则

2、乐观主义准则

3、等可能性准则

4、最小机会准则

例1

- 设某工厂是按批生产某产品并按批销售，每件产品的成本为30元，批发价格为每件35元。若每月生产的产品当月销售不完，则每件损失1元。工厂每投产一批是10件，最大月生产能力是40件，决策者可选择的生产方案为0、10、20、30、40五种。假设决策者对其产品的需求情况一无所知，试问这时决策者应如何决策?

用决策矩阵描述这个问题

- 决策者可选的行动方案有五种，这是他的策略集合，记作｛S_i｝，$i=1,2,\ldots$，5。经分析他可断定将发生五种销售情况：即销量为0，10，20，30，40，但不知它们发生的概率。这就是事件集合，记作｛E_j｝，$j=1,2,\ldots$，5。每个"策略–事件"对都可以计算出相应的收益值或损失值。如当选择月产量为20件时，而销出量为10件，这时收益额为
    - $10\times(35-30)-1\times(20-10)=40$(元)
- 可以一一计算出各"策略–事件"对应的收益值或损失值，记作a_{ij}。将这些数据汇总在矩阵中。

决策矩阵表9-1

S_i \ E_j		事件				
		0	10	20	30	40
决策	0	0	0	0	0	0
	10	−10	50	50	50	50
	20	−20	40	100	100	100
	30	−30	30	90	150	150
	40	−40	20	80	140	200

这就是决策矩阵。根据决策矩阵中元素所示的含义不同，可称为收益矩阵、损失矩阵、风险矩阵、后悔值矩阵等。下面讨论决策者是如何应用决策准则进行决策的。

(1)悲观主义(max min)决策准则——*小中取大*（最大最小收益值法）

- **悲观主义决策准则**亦称保守主义决策准则。当决策者面临着各事件的发生概率不清时，决策者考虑可能由于决策错误而造成重大经济损失。由于自己的经济实力比较脆弱，他在处理问题时就较谨慎。他分析各种最坏的可能结果，从中选择最好者，以它对应的策略为决策策略，用符号表示为 max min 决策准则。在收益矩阵中先从各策略所对应的可能发生的"策略–事件"对的结果中选出最小值，将它们列于表的最右列。再从此列的数值中选出最大者，以它对应的策略为决策者应选的决策策略。
- 计算见表9-2。

表9-2

E_j \ S_i		事件					min
		0	10	20	30	40	
决策	0	0	0	0	0	0	0←max
	10	-10	50	50	50	50	-10
	20	-20	40	100	100	100	-20
	30	-30	30	90	150	150	-30
	40	-40	20	80	140	200	-40

- 根据max min决策准则有
  - max (0，-10，-20，-30，-40)=0
- 它对应的策略为S1，即为决策者应选的策略。在这里是"什么也不生产"，这结论似乎荒谬，但在实际中表示先看一看，以后再作决定。上述计算用公式表示为

$$S_k^* \to \max_i \min_j (a_{ij})$$

(2)乐观主义(max max)决策准则——*大中取大*（最大最大收益值法）

- 持乐观主义(max max)决策准则的决策者对待风险的态度与悲观主义者不同，当他面临情况不明的策略问题时，他绝不放弃任何一个可获得最好结果的机会，以争取好中之好的乐观态度来选择他的决策策略。决策者在分析收益矩阵各策略的"策略–事件"对的结果中选出最大者，记在表的最右列。再从该列数值中选择最大者，以它对应的策略为决策策略。
- 见表9-3。

表9-3

E_j \ S_i		事件					max
		0	10	20	30	40	
决策	0	0	0	0	0	0	0
	10	−10	50	50	50	50	50
	20	−20	40	100	100	100	100
	30	−30	30	90	150	150	150
	40	−40	20	80	140	200	200←max

- 根据max max决策准则有
  - max (0,50,100,150,200)=200
- 它对应的策略为S_5。用公式表示为

$$S_k^* \to \max_i \max_j (a_{ij})$$

(3)等可能性(Laplace)准则

- 等可能性(Laplace)准则是19世纪数学家Laplace提出的。他认为：当一个人面临着某事件集合，在没有什么确切理由来说明这一事件比那一事件有更多发生机会时，只能认为各事件发生的机会是均等的。即每一事件发生的概率都是1/事件数。决策者计算各策略的收益期望值，然后在所有这些期望值中选择最大者，以它对应的策略为决策策略，见表15-5。然后按下式决定决策策略。

$$S_k^* \to \max_i \{E(S_i)\}$$

表9-4

S_i \ E_j		事件					$E(S_i)=\sum_j pa_{ij}$
		0	10	20	30	40	
决策	0	0	0	0	0	0	0
	10	−10	50	50	50	50	38
	20	−20	40	100	100	100	64
	30	−30	30	90	150	150	78
	40	−40	20	80	140	200	80←max

在本例中 P=1/5，期望值

$$E(S_i)=\sum_j pa_{ij}$$

max｛E(Si)｝=max｛0，38，64，78，80｝=80

它对应的策略 S_5 为决策策略。

(4)最小机会损失准则–*萨凡奇决策准则*

（最小最大后悔值法）

- 最小机会损失决策准则亦称**最小遗憾值决策准则或Savage决策准则**。首先将收益矩阵中各元素变换为每一“策略–事件”对的机会损失值(遗憾值，后悔值)。其含义是：当某一事件发生后，由于决策者没有选用收益最大的策略，而形成的损失值。若发生k事件，各策略的收益为a_{ik}，i=1,2，…，5，其中最大者为：

$$a_{ik} = \max_{i}(a_{ik})$$

这时各策略的机会损失值为:

$$a'_{ik} = \{\max_{i}(a_{ik}) - a_{ik}\}, i = 1, \cdots, 5$$

计算结果见表9-5（机会损失矩阵）

E_j / S_i		事件 0	10	20	30	40	max
决策	0	0	50	100	150	200	200
	10	10	0	50	100	150	150
	20	20	10	0	50	100	100
	30	30	20	10	0	50	50
	40	40	30	20	10	0	40—min

从所有最大机会损失值中选取最小者，它对应的策略为决策策略。用公式表示为：

$$S_k^* \to \min_i \max_j (a_{ij}^{'})$$

本例的决策策略为

$$\min(200,150,100,50,40)=40 \to S_5$$

在分析产品废品率时，应用本决策准则就比较方便。

(4)折中主义准则

（max min综合加权法）

当用min max 决策准则或 max max 决策准则来处理问题时，有的决策者认为这样太极端了。于是提出把这两种决策准则给予综合，令a为乐观系数，且0≤a≤1。并用以下关系式表示

$$H_i = \alpha a_{i\max} + (1-\alpha) a_{i\min}$$

$a_{i\max}$, $a_{i\min}$分别表示第i个策略可能得到的最大收益值与最小收益值。设α =1/3，

将计算得的Hi值记在表9-6的右端。

表9-6

E_j / S_i		事件					H_i
		0	10	20	30	40	
决策	0	0	0	0	0	0	0
	10	−10	50	50	50	50	10
	20	−20	40	100	100	100	20
	30	−30	30	90	150	150	30
	40	−40	20	80	140	200	40←max

然后选择 $S_k^* \to \max_i \{H\ \}$

本例的决策策略为

max（0, 10, 20, 30, 40）=40→S5

【小 结】

- 在不确定性决策中是因人因地因时选择决策准则的，但在实际中当决策者面临不确定性决策问题时，他首先是获取有关各事件发生的信息，使不确定性决策问题转化为风险决策，风险决策将是讨论的重点。

9.4 风险决策

风险决策——是指决策者对客观情况不甚了解，但对将发生各事件的概率是已知的。决策者往往通过调查，根据过去的经验或主观估计等途径获得这些概率。在风险决策中一般采用期望值作为决策准则，常用的有:

最大期望收益决策准则

最小机会损失决策准则。

9.4.1最大期望收益决策准则

(Expected Monetary Value,EMV)

决策矩阵的各元素代表"策略–事件"对的收益值，各事件发生的概率为p_j

先计算各策略的期望收益值：

$$\sum_j p_j a_{ij},\ i=1,2,\cdots,n$$

然后从这些期望收益值中选取最大者，它对应的策略为决策应选策略。即

$$\max_i \sum_j p_j a_{ij} \to S_k^*$$

以例1的数据进行计算，见表9-7

S / p / E_j		事件					EMV
	S	0	10	20	30	40	EMV
E_j	p	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	
决策	0	0	0	0	0	0	0
	10	-10	50	50	50	50	44
	20	-20	40	100	100	100	76
	30	-30	30	90	150	150	84←max
	40	-40	20	80	140	200	80

这时max (0,44,76,84,80)=84→S_4，即选择策略S_4=30。EMV决策准则适用于一次决策多次重复进行生产的情况，所以它是平均意义下的最大收益。

9.4.2最小机会损失决策准则

(Expected Opportunity Loss,EOL)

- 矩阵的各元素代表"策略–事件"对的机会损失值。设各事件发生的概率为p_j，先计算各策略的期望损失值。

$$\sum_j p_j a_{ij}' \quad j = 1,2,\cdots,n$$

然后从这些期望损失值中选取最小者，它对应的策略应是决策者所选策略。即

$$\min_i\left(\sum_j p_j a_{ij}'\right) \to S_k^*$$

9.4.3 EMV与EOL决策准则的关系

从本质上讲EMV与EOL决策准则是一样的。

- 设a_{ij}为决策矩阵的收益值。因为当发生的事件的所需量等于所选策略的生产量时，收益值最大，即在收益矩阵的对角线上的值都是其所在列中的最大者。于是机会损失矩阵可通过以下求得，见表9-8。

表9-8

S_i \ E_j, P	E_1	E_2	$\cdots$	E_n
P	P_1	P_2	$\cdots$	p_n
S_1	$a_{11}-a_{11}$	$a_{22}-a_{12}$	…	$a_{nn}-a_{1n}$
S_2	$a_{11}-a_{21}$	$a_{22}-a_{22}$	…	$a_{nn}-a_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	$a_{11}-a_{n1}$	$a_{22}-a_{n2}$	…	$a_{nn}-a_{nn}$

第i策略的机会损失：

$$
\begin{aligned}
EOL_i &= p_1(a_{11}-a_{1i}) + p_2(a_{22}-a_{2i}) + \cdots \\
&\quad + p_n(a_{nn}-a_{ni}) \\
&= p_1a_{11} + p_2a_{22} + \cdots + p_na_{nn} \\
&\quad - (p_1a_{1i} + p_2a_{2i} + \cdots + p_na_{ni}) \\
&= K - (p_1a_{1i} + p_2a_{2i} + \cdots + p_na_{ni}) \\
&= K - EMV_i
\end{aligned}
$$

故当EMV为最大时，EOL便为最小。所以在决策时用这两个决策准则所得结果是相同的。

9.4.4 全情报的价值(EVPI)

当决策者耗费了一定经费进行调研，获得了各事件发生概率的信息，应采用“随机应变”的战术。这时所得的期望收益称为**全情报的期望收益**记作EPPL。这收益应当大于至少等于**最大期望收益**，即EPPL≥EMV*。则

$$EPPL-EMV^{*}=EVPI$$

- 称为对**全情报的价值**。这就是说明获取情报的费用不能超过EVPI值，否则就没有增加收入。
- 实际应用时考虑费用构成很复杂，这里仅说明全情报价值的概念和其意义。

9.4.5 主观概率

风险决策时决策者要估计各事件出现的概率，而许多决策问题的概率不能通过随机试验去确定，根本无法进行重复试验。如估计某企业倒闭的可能性，只能由决策者根据他对这事件的了解去确定。这样确定的概率反映了决策者对事件出现的信念程度，称为主观概率。客观概率论者认为概率如同重量、容积、硬度等一样，是研究对象的物理属性。

而主观概率论者则认为概率是人们对现象的知识的现状的测度，而不是现象本身的测度，因此不是研究对象的物理属性。主观概率论者不是主观臆造事件发生的概率，而是依赖于对事件作周密的观察，去获得事前信息。事前信息愈丰富，则确定的主观概率就愈准确。主观概率论者并不否认实践是第一性的观点。所以主观概率是进行决策的依据。确定主观概率时，一般采用专家估计法。

(1)直接估计法

- 直接估计法是要求参加估计者直接给出概率的估计方法。
- 例如推荐三名大学生考研究生时，请五位任课教师估计他们谁得第一的概率。若各任课教师作出如下的估计,见表9-9。

表9-9

教师代号	权数	学 生 1	学 生 2	学 生 3	Σ
1	0.6	0.6	0.2	0.2	
2	0.7	0.4	0.5	0.1	
3	0.9	0.5	0.3	0.2	
4	0.7	0.6	0.3	0.1	
5	0.8	0.2	0.5	0.3	
加权求和		1.67	1.35	0.68	3.7
归一化后		0.451	0.365	0.184	1

- 由表15-10的末行得到学生1的概率是0.451，他是最高者。

(2) 间接估计法

- 参加估计者通过排队或相互比较等间接途径给出概率的估计方法。
- 例如估计五个球队(Ai，i=1,…，5)比赛谁得第一的问题，请十名专家作出估计，每位都给出一个优胜顺序的排列名单，排队名单汇总在表9-10。

表9-10

名次 / 专家号	qj					评定者
	1	2	3	4	5	权数 ω_i
1	A_2	A5	A1	A3	A4	0.7
2	A3	A1	A4	A4	A2	0.8
3	A5	A3	A2	A1	A4	0.6
4	A1	A2	A5	A4	A3	0.7
5	A5	A2	A1	A3	A4	0.9
6	A2	A5	A3	A1	A4	0.8
7	A5	A1	A3	A2	A4	0.7
8	A5	A2	A4	A1	A3	0.9
9	A2	A1	A5	A4	A3	0.7
10	A5	A2	A3	A1	A4	0.8

分别从表15-11查得每队被排的名次的次数，如A1所处各名次的意见为：

qj	次数nj	评定权数ωi
1	1	ω4=0.7
2	3	ω2=0.8，ω7=0.7，ω9=0.7
3	2	ω1=0.7，ω5=0.9
4	4	ω10=0.8，ω3=0.6，ω8=0.9 ,$\omega_6 = 0.8$
5	0	

然后计算加权平均数

$$\omega(A_1) = \frac{1\times\omega_4 + 2(\omega_2+\omega_7+\omega_9) + 3(\omega_1+\omega_5) + 4(\omega_3+\omega_6+\omega_8+\omega_{10})}{\sum \omega_i} = 3$$

采用同样方法得到

ω(A2)=2.26； ω(A3)=3.43； ω(A4)=4.56； ω(A5)=1.78

这就可以按此加权平均数给出各队的估计名次，即

A5＞A2＞A1＞A3＞A4

下面再将各队的估计名次转换成概率，这时需假设各队按估计名次出现的概率是等可能的。

(A5→1)表示A5的估计名次为1，其余类推。那么

(A5→1)：(A2→2)：(A1→3)：(A3→4)：(A4→5)

=1：1：1：1：1

因所有事件发生的概率和为1，即

$$\sum_j p_j = 1$$

- 于是各队按估计名次出现的主观概率为
  - P(A5→1)=1/5;
  - P(A2→2)=1/5;
  - P(A1→3)=1/5
  - P(A3→4)=1/5;
  - P(A4→5)=1/5
- 当然决策者还可根据了解的情况，作其他的假设，这样就能得到另外的结果。

9.4.6 修正概率的方法——贝叶斯公式的应用

- 前面曾提到决策者常常碰到的问题是没有掌握充分的信息，于是决策者通过调查及做试验等途径去获得更多的更确切的信息，以便掌握各事件发生的概率，这可以利用贝叶斯公式来实现，它体现了最大限度的利用现有信息，并加以连续观察和重新估计，

其步骤为：

- ① 先由过去的经验或专家估计获得将发生事件的事前(先验)概率。
- ② 根据调查或试验计算得到条件概率，利用贝叶斯公式：

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum P(B_i)P(A|B_i)} \quad i=1,2,\cdots,n$$

计算出各事件的事后(后验)概率。

例2

某钻探大队在某地区进行石油勘探，主观估计该地区有油的概率为P(O)=0.5；无油的概率为P(D)=0.5。为了提高钻探的效果，先做地震试验。根据积累的资料得知：凡有油地区做试验结果亦好的概率为P(F｜O)=0.9；做试验结果不好的概率为P(U｜O)=0.1。凡无油地区做试验结果好的概率为P(F｜D)=0.2；做试验结果不好的概率为P(U｜D)=0.8。问在该地区做试验后，有油与无油的概率各是多少?

解 :先计算做地震试验好与不好的概率。

- 做地震试验好的概率

$$P(F)=P(O)\cdot P(F \mid O)+P(D)\cdot P(F \mid D)$$

$$=0.5\times0.9+0.5\times0.2$$

$$=0.55$$

- 做地震试验不好的概率

$$P(U)=P(O)\cdot P(U \mid O)+P(D)\cdot P(U \mid D)$$

$$=0.5\times0.1+0.5\times0.8=0.45$$

- 利用贝叶斯公式计算各事件的事后(后验)概率。

用贝叶斯公式计算各事件的事后（后验）概率

做地震试验好的条件下有油的概率 $P(O|F)=\dfrac{P(O)\cdot P(F|O)}{P(F)}=\dfrac{0.45}{0.55}=\dfrac{9}{11}$

做地震试验好的条件下无油的概率 $P(D|F)=\dfrac{P(D)\cdot P(F|D)}{P(F)}=\dfrac{0.10}{0.55}=\dfrac{2}{11}$

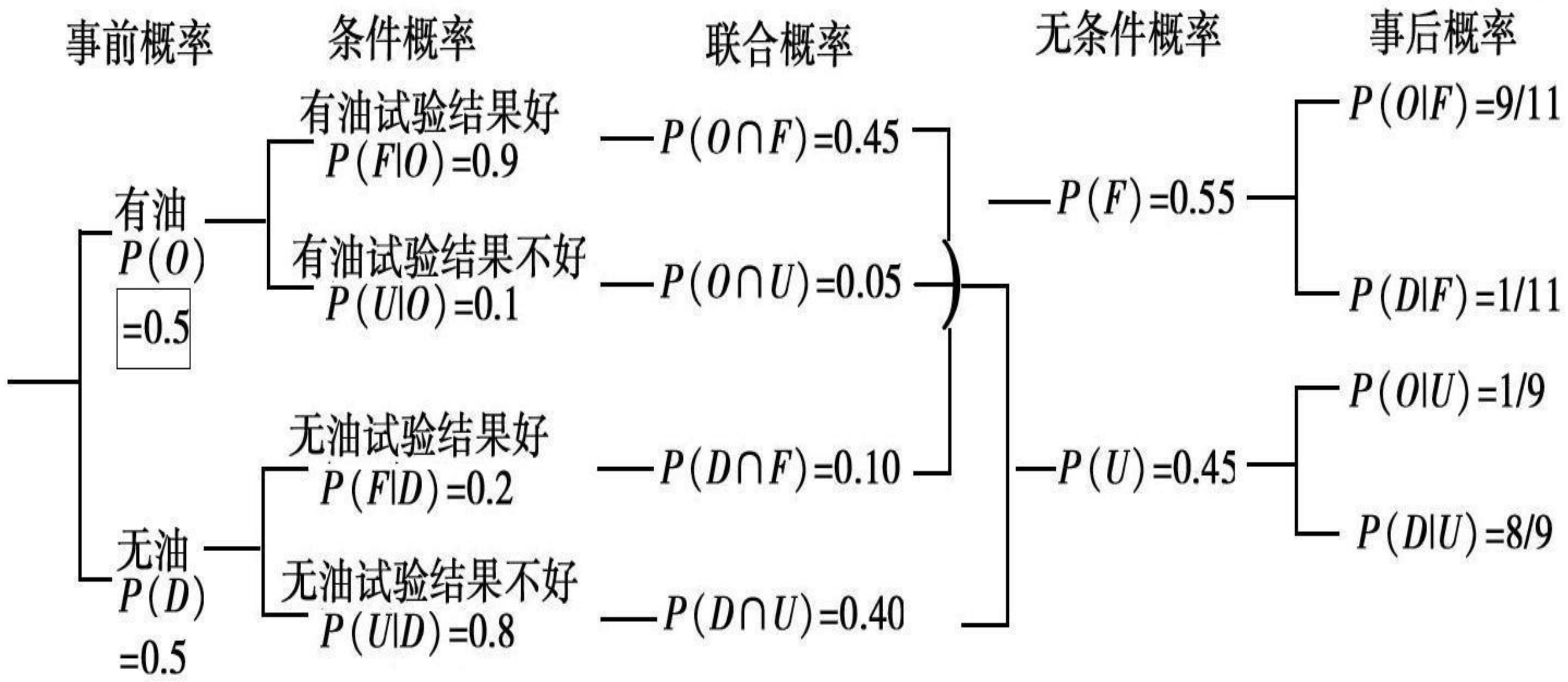
做地震试验不好的条件下有油的概率

$$P(O|U)=\frac{P(O)\cdot P(U|O)}{P(U)}=\frac{0.05}{0.45}=\frac{1}{9}$$

做地震试验不好的条件下无油的概率

$$P(D|U)=\frac{P(D)\cdot P(U|D)}{P(U)}=\frac{0.40}{0.45}=\frac{8}{9}$$

以上计算可在图上进行



事前概率
条件概率
联合概率
无条件概率
事后概率
有油
P(O)
=0.5
无油
P(D)
=0.5
有油试验结果好
P(F|O)=0.9
有油试验结果不好
P(U|O)=0.1
无油试验结果好
P(F|D)=0.2
无油试验结果不好
P(U|D)=0.8
P(O∩F)=0.45
P(O∩U)=0.05
P(D∩F)=0.10
P(D∩U)=0.40
P(F)=0.55
P(U)=0.45
P(O|F)=9/11
P(D|F)=1/11
P(O|U)=1/9
P(D|U)=8/9

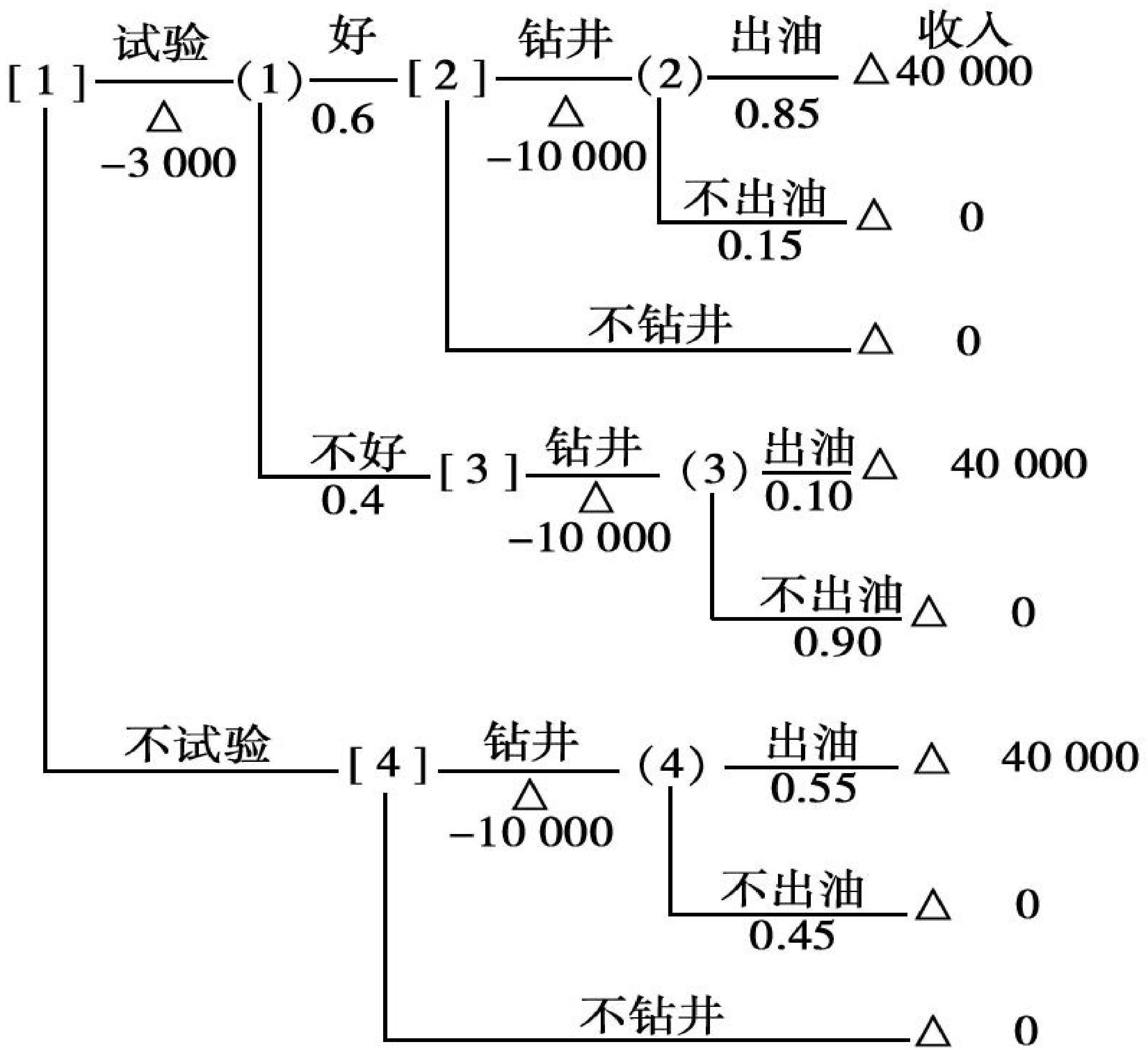
9.5 决策树

- 有些决策问题，当进行决策后又产生一些新情况，并需要进行新的决策，接着又有一些新情况，又需要进行新的决策。这样决策、情况、决策……构成一个序列，这就是序列决策。描述序列决策的有力工具之一是**决策树**，决策树是由决策点，事件点及结果构成的树形图。一般选用最大收益期望值和最大效用期望值或最大效用值为决策准则，
- 下面用例子说明。

例3

- 　　设有某石油钻探队，在一片估计能出油的荒田钻探。可以先做地震试验，然后决定钻井与否。或不做地震试验，只凭经验决定钻井与否。做地震试验的费用每次3000元，钻井费用为10000元。若钻井后出油，这井队可收入40000元，若不出油就没有任何收入。各种情况下估计出油的概率已估计出，并标在图上。问钻井队的决策者如何作出决策使收入的期望值为最大。

解：用决策树来求解上述决策问题，并将有关数据标在图上，见图。



[ ] 表示决策点；

() 表示事件点；

Δ 表示收益点；

负值表示支付。

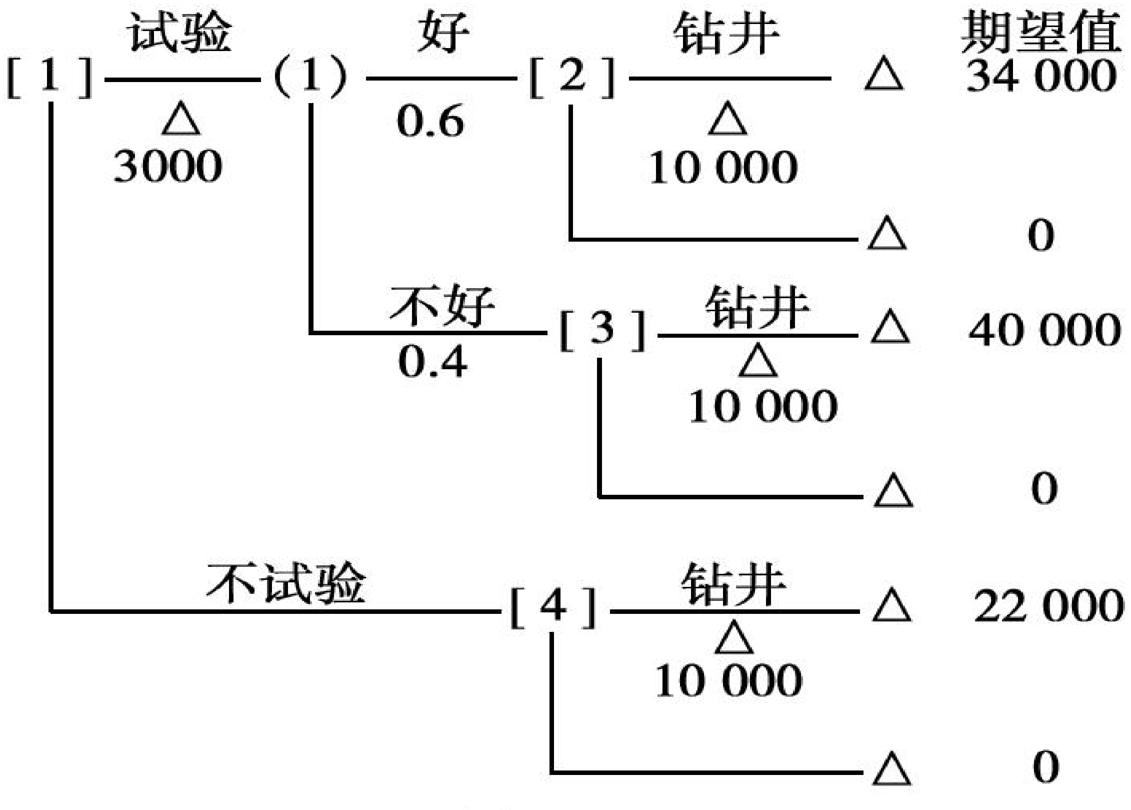
采用逆决策顺序方法求解，

- 图表明这是两级随机决策问题，计算步骤是：第1步　计算各事件点的收入期望值
- 事件点收入期望值

  (2)　$40000 \times 0.85 + 0 \times 0.15 = 34000$

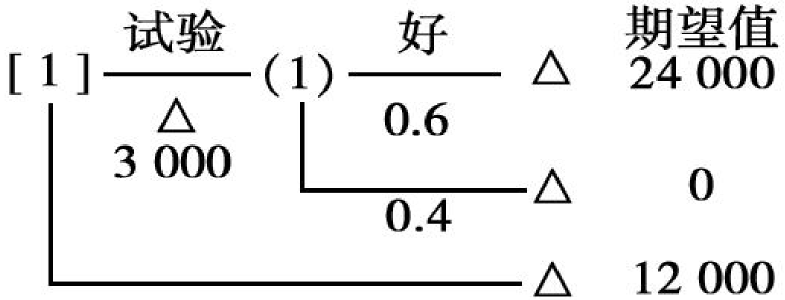
  (3)　$40000 \times 0.10 + 0 \times 0.90 = 4000$

  (4)　$40000 \times 0.55 + 0 \times 0.46 = 22000$
- 将收入期望值标在相应的各点处，这时可将原决策树简化为下图。



试验
好
钻井
期望值
[1]
(1)
[2]
△
34 000
△
3000
0.6
△
10 000
△
0
不好
[3]
钻井
△
40 000
0.4
△
10 000
△
0
不试验
[4]
钻井
△
22 000
△
10 000
△
0

(a)



试验
好
期望值
[1]
(1)
△
24 000
△
3 000
0.6
△
0
0.4
△
12 000

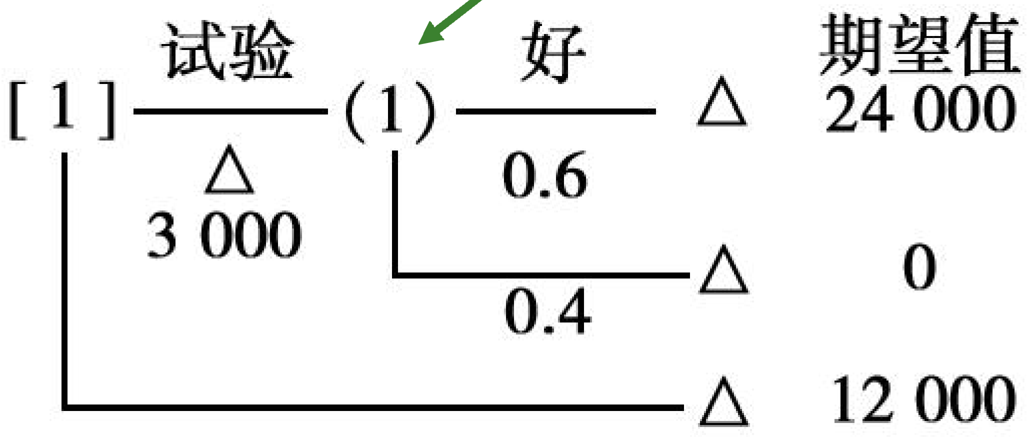
(b)

第2步

- 按最大收入期望值决策准则在图15-8(a)上给出各决策点的抉择。在决策点［2］按
  - max ［(34000-10000)，0］=24000
- 所对应的策略为应选策略，即钻井，在决策点［3］按
  - max ［(4000-10000)，0］=0
- 所对应的策略为应选策，即不钻井，在决策点［4］按
  - max ［(22000-10000)，0］=12000
- 所对应的策略为应选策略，即钻井。

第3步

- 在决策树上保留各决策点的应选方案，把淘汰策略去掉，得到图15-8(b)，这时再计算事件点(1)的收入期望值。
  - 24000×0.60+0×0.40=14400
- 将它标在(1)旁。



(b)

第4步

- 决策点［1］有两个方案：做地震试验和不做地震试验，各自的收入期望值为(14400-3000)和12000。按
  - max ［(14400-3000)，12000］=12000
- 所对应的策略为应选策略，即不做地震试验。
- 这个决策问题的决策序列为：选择不做地震试验，直接判断钻井，收入期望值为12000元。

9.7 灵敏度分析

灵敏度分析的意义

通常在决策模型中自然状态的概率和损益值往往由估计或预测得到，不可能十分正确，此外实际情况也在不断地变化，现需分析为决策所用的数据可在多大范围内变动，原最优决策方案继续有效，进行这种分析称为灵敏度分析.

下面用例来说明。

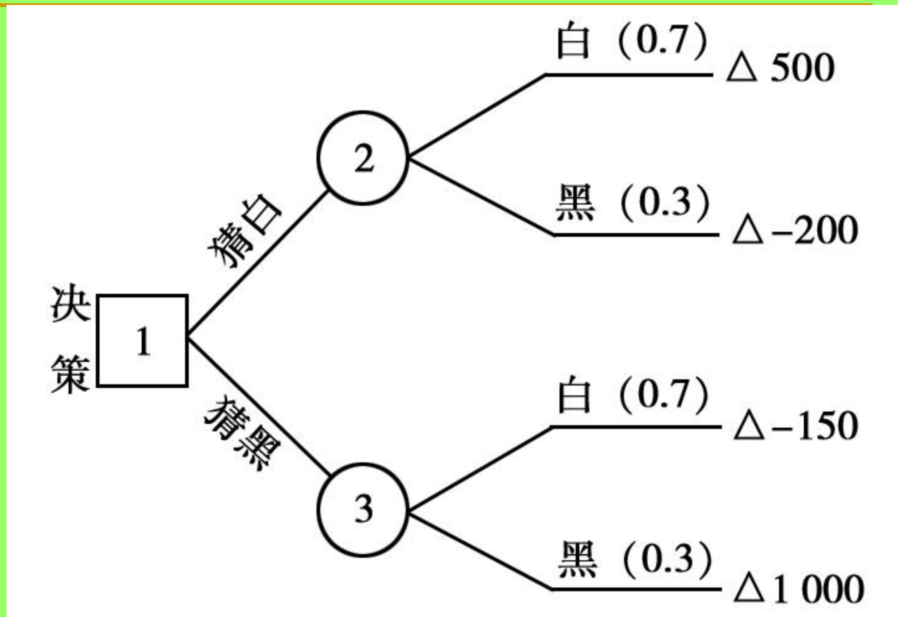
例5

假设有外表完全相同的木盒100只，将其分为两组，一组内装白球，有70盒，另一组内装黑球，有30盒。现从这100盒中任取一盒，请你猜，如这盒内装的是白球，猜对了得500分，猜错了罚200分；如这盒内装的是黑球，猜对了得1000分，猜错了罚150分。为使期望得分最多，应选那一方案。

有关数据列于下表:

概率 方案	自然状态	
	白 0.7	黑 0.3
猜白	500	-200
猜黑	-150	1000

解：先画出决策树



见图，计算各方案的期望值。

- “猜白”的期望值为
  - $0.7\times500+0.3\times(-200)=290$
- “猜黑”的期望值为
  - $0.7\times(-150)+0.3\times1000=195$

比较

- 经比较可知"猜白"方案是最优，现假定出现白球的概率从0.7变为0.8，这时各方案的期望值为
- "猜白"的期望值为：　0.8×500+0.2×(-200)=360
- "猜黑"的期望值为：　0.8×(-150)+0.2×1000=80
- 可见猜白方案仍是最优。再假定出现白球的概率从0.7变为0.6，这时各方案的期望值为
- "猜白"的期望值为：　0.6×500+0.4×(-200)=220
- "猜黑"的期望值为：　0.6×(-150)+0.4×1000=310

转折点

- 现在的最优方案不是猜白，而是猜黑了。可见由于各自然状态发生的概率的变化，可引起最优方案的改变。那么转折点如何确定?

转折概率

设p为出现白球的概率，(1-p)为出现黑球的概率。当这两个方案的期望值相等时，即

$$p\times500+(1-p)\times(-200)$$

$$=p\times(-150)+(1-p)\times1000$$

- 求得p=0.6486，称它为转折概率。即当p＞0.6486，猜白是最优方案；当p＜0.6486，猜黑是最优方案。p可推导，表示为

关系式

$$p = \frac{a_{12} - a_{22}}{a_{12} - a_{22} + {}_{21} - a_{11}}$$

若这些数据在某允许范围内变动，而最优方案保持不变，这方案就是比较稳定的。反之，这些数据在某允许范围内稍加变动，则最优方案就有变化，这方案就是不稳定的。

由此可以得出那些非常敏感的变量，那些不太敏感的变量，以及最优方案不变条件下，这些变量允许变化的范围。

本讲结束!

Thank you!