文章编号:1001-506X(2016)02-0357-05
网址:www.sys-ele.com

基于 LPV 的超空泡航行体 H_∞ 抗饱和控制

韩云涛,强宝琛,孙 尧,白 涛
(哈尔滨工程大学自动化学院,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要:针对超空泡航行体在运动过程中面临的执行器饱和问题,提出一种基于线性变参数(linear parameter varing,LPV)的抗饱和控制方法。首先在航行体动力学模型基础上考虑执行器饱和非线性因素,将滑行力和执行器分别建模为时变参数的仿射函数,最终得到系统矩阵仿射依赖于时变参数的 LPV 模型,同时,该模型也考虑了噪声干扰条件下控制器的鲁棒性。基于该 LPV 模型,运用多面体理论和 Lyapunov 方法设计了不依赖于时变参数的静态状态反馈控制器。仿真结果表明,所设计的控制器可以保证航行体在执行器发生饱和时仍能渐近跟踪给定深度指令,且在零初始条件下具有对噪声的 H_∞ 抑制性能。

关键词:超空泡航行体;滑行力;线性变参数;执行器饱和
中图分类号:TP 273 **文献标志码**:A **DOI**:10.3969/j.issn.1001-506X.2016.02.18

H_∞ anti-windup control for a supercavitating vehicle based on LPV

HAN Yun-tao, QIANG Bao-chen, SUN Yao, BAI Tao
(*College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

Abstract: In order to solve the actuator saturation problem that occurs in the dynamic process of the high speed supercavitating vehicle, an anti-windup controller based on the linear parameter varing (LPV) method is proposed. First, the dynamic model is expanded into a model which takes the actuator saturation nonlinearity into consideration. By modeling the planing force and the actuators as affine functions of time-varying parameters, the resulting system matrixes of the LPV model depend affinely on the time-varying parameters. Also the noise disturbance is included to make the controller robust. Based on this model, the polyhedron method and the Lyapunov theory are applied to design a static state feedback controller that has no dependence on the time-varying parameters. Simulation results show that the designed controller can guarantee the tracking performance of the closed-loop system in face of the actuator saturation, and achieve the given H_∞ performance under zero initial conditions.

Keywords: supercavitating vehicle; planing force; linear parameter varing (LPV); actuator saturation

0 引 言

航行体在水中高速运动时,贴近其表面的液体压力会降低,产生空化现象。随着航行体速度的增加,会形成超空泡。超空泡航行体与常规水下航行器受力方式显著不同,其支撑力主要来源于空化器与尾部滑行力。剧烈的非线性滑行力及空泡形态变化等都给超空泡航行体的稳定性与控制带来了巨大的挑战[1-2]。

国内外许多学者对超空泡航行体的数学模型进行研究[3-5]。文献[3]中采用小角度近似条件对航行体纵向模型进行处理,被引用较多。文献[1-11]均针对不同模型设计了具有不同特点的控制器。由于实际系统的空化器和尾舵偏转范围受到物理条件制约,受限后会影响整个系统动态性能提高,严重时甚至会导致系统失稳,因此在设计控制器时考虑执行器的饱和问题就显得尤为重要。文献[12]中,针对航行体执行器饱和问题,运用两步法设计了抗饱和补偿器:首先在忽略饱和非线性情况下设计出满足一定性能指标的线性控制器,然后加入抗饱和补偿器以改善系统进入非线性区域时的性能,此种方法设计的饱和补偿器对于系统稳定性的影响有待于进一步研究[13-14]。文献[15]针对空化器和尾舵不同时发生饱和的情况,以最小化航行体状态变量的期望加速度与实际加速度的偏差为目标,通过重新分配空化器和尾舵的输出,弱化了执行器饱和对系统动态性能的影响。

收稿日期:2015-02-02; **修回日期**:2015-06-10; **网络优先出版日期**:2015-11-06。
网络优先出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2422.TN.20151106.1400.006.html
基金项目:国家自然科学基金(51209049,51309058);国家科学技术部国际合作基金(2014DFR10010);黑龙江省自然科学基金(QC2012C033)资助课题

为使超空泡航行体在执行器出现饱和时仍具有渐近稳定性，本文提出一种基于线性变参数(linear parameter varing, LPV)的抗饱和控制方法。首先将基准控制模型转换为执行器具有饱和非线性特性的新模型。由于变换过程中考虑各输入通道解耦、扇形有界且饱和阈值为常值的静态执行器饱和非线性，所以通过滑行力和执行器建模得到的系统时变调度参数具有确定的变化范围，且最终得到的 LPV 模型的系统矩阵是时变参数的仿射函数，同时该模型也考虑了噪声干扰对系统的影响。然后，运用多面体理论和 Lyapunov 方法设计了控制器，该控制器以线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)形式给出，易于计算控制器参数。本文设计的控制器在初始阶段就考虑执行器饱和的影响，且能处理空化器和尾舵同时饱和的情况，始终能够保证航行体的全局渐近稳定性。最后，通过数值仿真检验控制器在系统面临噪声干扰和执行器饱和情况时的性能。

1 系统数学模型

1.1 动力学模型

国内外学者对于超空泡航行体动力学模型有多种表述形式，其中引用较多的是文献[3]提出的基准控制模型，该模型表示为

$$\begin{cases}\dot{z}=w-V\theta\\ \dot{\theta}=q\\ \boldsymbol{M}_I\begin{bmatrix}\dot{w}\\ \dot{q}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_I\begin{bmatrix}w\\ q\end{bmatrix}+\boldsymbol{B}_I\begin{bmatrix}\delta_e\\ \delta_c\end{bmatrix}+\boldsymbol{F}_{\text{grav}}+\begin{bmatrix}1/mL\\ 1/m\end{bmatrix}F_p\end{cases}\tag{1}$$

式中，z 为航行体纵向深度；θ 为航行体俯仰角；w 为纵向速度；q 为航行体俯仰角速度。尾舵相对于航行体中心线的偏转角 δ_e 和空化器轴线相对于航行体中心线的偏转角 δ_c 组成系统的控制输入，定义在体坐标系下的水平速度为 V，沿 x 轴向前，在模型中，假设 V 为常量，m 为密度比，L 为航行体长度，F_p 为滑行力，其余矩阵为

$$\boldsymbol{A}_I=C_zV\begin{bmatrix}\dfrac{1-n}{mL} & \dfrac{-n}{m}+\dfrac{7}{9C_z}\\ \dfrac{-n}{m} & \dfrac{-nL}{m}+\dfrac{17L}{36C_z}\end{bmatrix},\boldsymbol{F}_{\text{grav}}=\begin{bmatrix}\dfrac{7}{9}\\ \dfrac{17L}{36}\end{bmatrix}g$$

$$\boldsymbol{B}_I=C_zV^2\begin{bmatrix}\dfrac{-n}{mL} & \dfrac{1}{mL}\\ \dfrac{-n}{m} & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{M}_I=\begin{bmatrix}\dfrac{7}{9} & \dfrac{17L}{36}\\ \dfrac{17L}{36} & \dfrac{11R^2}{60}+\dfrac{133L^2}{405}\end{bmatrix}$$

式中，$C_z=1/2C_xR_1^2$；$C_x=C_{x0}(1+\sigma)$；$R_1=R_n/R$；空泡半径 $R_c=R_n\left(0.82\dfrac{1+\sigma}{\sigma}\right)^{1/2}k_2$；$K_2=[1-(1-\dfrac{4.5\sigma}{1+\sigma})K_1^{40/17}]^{1/2}$；$K_1=\dfrac{L}{R_n}(\dfrac{1.92}{\sigma}-3)^{-1}-1$；$R_n$ 为空化器半径；R 为航行体半径；C_{x0} 为升力系数；n 为尾舵效力系数；σ 为空化数；g 为重力加速度。

同文献[9,12]，滑行力表达式为

$$F_p=V^2\left(1-\left(\frac{R'}{h'+R'}\right)^2\right)\left(\frac{1+h'}{1+2h'}\right)\alpha\tag{2}$$

式中，$R'=(R_c-R)/R$。浸入深度 h' 和浸入角 α 分别为

$$h'=\begin{cases}0,\ (R_c-R)/R>(L/R)\mid w/V\mid\\ (L/R)\mid w/V\mid,\ \text{其他}\end{cases}\tag{3}$$

$$\alpha=\begin{cases}(w-\dot{R}_c)/V,\ w/V>0\\ (w+\dot{R}_c)/V,\ \text{其他}\end{cases}\tag{4}$$

其中，空泡半径变化率表示为

$$\dot{R}_c=-\frac{20}{19}(0.82\frac{1+\sigma}{\sigma})^{1/2}$$

$$V(1-\frac{4.5\sigma}{1+\sigma})K_1^{23/17}(K_2(\frac{1.92}{\sigma}-3))^{-1}$$

1.2 基于 LPV 的执行器饱和模型

本文运用 LPV 方法设计控制器。当同时考虑执行器饱和非线性和噪声干扰情况时，原动力学方程式(1)可描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\text{sat}(u)+\boldsymbol{G}+\boldsymbol{D}F_p+\boldsymbol{M}\boldsymbol{\omega}\tag{5}$$

式中，状态变量 $x=[z\quad\theta\quad w\quad q]^{\mathrm{T}}$；定义控制输入为 $\boldsymbol{u}=[\delta_e\quad\delta_c]^{\mathrm{T}}$；$\omega$ 为系统噪声；M 为噪声驱动矩阵；$\text{sat}(u)$ 表示执行器对于控制输入 u 的限制作用。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -V & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\boldsymbol{M}_I^{-1}\boldsymbol{A}_I$}}\\ 0 & 0 & & \end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \boldsymbol{M}_I^{-1}\begin{bmatrix}1/mL\\ 1/m\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{M}_I^{-1}\boldsymbol{B}_I}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \boldsymbol{M}_I^{-1}\boldsymbol{F}_{\text{grav}}\end{bmatrix}$$

为使航行体在控制器作用下能够跟踪给定的指令，将镇定模型(5)转换为跟踪模型。定义 z_d、θ_d、w_d 和 q_d 分别表示对应的航行体深度指令、俯仰角指令、纵向速度指令和俯仰角速度指令。本文考虑对航行体进行定深控制，即 z_d 为常值，$\theta_d=w_d=q_d=0$。状态期望值表示为 $x_d=[z_d\quad\theta_d\quad w_d\quad q_d]^{\mathrm{T}}$。定义系统状态误差为 $\boldsymbol{x}_e=x-x_d$，用 $\boldsymbol{x}_e$ 替换系统式(5)中的状态变量 x，整理后可得新的系统跟踪模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_e+\boldsymbol{B}\text{sat}(u)+\boldsymbol{G}+\boldsymbol{D}F_p+\boldsymbol{M}\boldsymbol{\omega}\tag{6}$$

对于执行器的饱和效应，考虑各输入通道解耦、扇形有界且饱和阈值为常值时的静态执行器饱和非线性，其定义为

$$\text{sat}(u)=\begin{bmatrix}\text{sat}(u_1)\\ \text{sat}(u_2)\end{bmatrix}$$

$$\text{sat}(u_i)=\begin{cases}u_i,\ \mid u_i\mid<u_i^{\max}\\ \text{sign}(u_i)u_i^{\max},\ \mid u_i\mid\geqslant u_i^{\max}\end{cases}\tag{7}$$

式中，$u_i(i=1,2)$ 表示第 i 个通道的控制输入；sign(·)为符号函数；$u_i^{\max}$ 表示第 i 个通道的饱和阈值。对 $\text{sat}(u_i)$ 进行变换

$$\text{sat}\,(u_i) = \frac{\text{sat}\,(u_i) + u_{i0}}{u_i + u_{i0}}(u_i + u_{i0}) - u_{i0} \tag{8}$$

定义 $\rho_i = (\text{sat}\,(u_i) + u_{i0})/(u_i + u_{i0})$，$v_i = u_i + u_{i0}$，有 $\text{sat}\,(u_i) = \rho_i v_i - u_{i0}$，进而有

$$\text{sat}\,(u) = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix} \tag{9}$$

式中，$\rho_i \in (\bar{\rho}_i, \bar{\rho}_i)\,(i=1,2)$ 可作为 LPV 模型的调度参数；v_i 为新的控制输入；u_{i0} 满足 $[u_{10}, u_{20}]^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}$。

又由于 $F_P = (F_P/w_e)w_e$，定义

$$\rho_3 = \begin{cases} F_P/w_e,\ w_e \neq 0 \\ 0,\ w_e = 0 \end{cases}$$

则滑行力可表示为

$$F_P = \rho_3 w_e = \rho_3 [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \boldsymbol{x}_e \tag{10}$$

ρ_3 与纵向速度 w_e 的关系如图 1 所示，易知 ρ_3 有界，即 $\rho_3 \in [\bar{\rho}_3, \bar{\rho}_3]$。

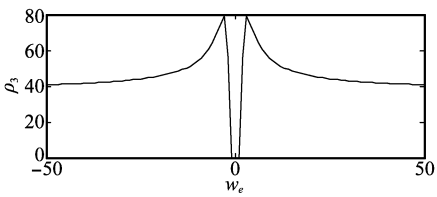


图 1　ρ_3 与纵向速度 w_e 的关系

将式(8)～式(10)代入系统式(6)，定义 $v = [v_1 \quad v_2]^{\mathrm{T}}$ 得

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e = \boldsymbol{A}_\rho \boldsymbol{x}_e + \boldsymbol{B}_\rho \boldsymbol{v} + \boldsymbol{M\omega} \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_\rho = \boldsymbol{A} + \rho_3 \boldsymbol{D}[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B}_\rho = \boldsymbol{B} \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

为使闭环系统式(6)在零初始条件下具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ，定义受控输出 $\boldsymbol{o}_e$ 和目标函数 $J_{o_e\omega}$ 分别为

$$\boldsymbol{o}_e = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_e + \boldsymbol{N\omega} \tag{14}$$

$$J_{o_e\omega} = \int_0^\infty (\boldsymbol{o}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{o}_e - \gamma^2 \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}t \tag{15}$$

式中，$\boldsymbol{N}$ 为噪声驱动矩阵；$\boldsymbol{C} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$。对于给定的标量 $\gamma > 0$，把从噪声 ω 到受控输出 $\boldsymbol{o}_e$ 的传递函数 $T_{o_e\omega}$ 的 H_∞ 范数约束记做 $\| T_{o_e\omega} \| < \gamma$，因为 H_∞ 范数在时域内等价于诱导 2 范数，所以

$$\| \boldsymbol{o}_e \|_2 < \gamma \| \boldsymbol{\omega} \|_2,\ \forall\, \omega \in L_2(0,\infty)$$

综上，考虑噪声干扰时，基于 LPV 的执行器饱和模型为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_e = \boldsymbol{A}_\rho \boldsymbol{x}_e + \boldsymbol{B}_\rho \boldsymbol{v} + \boldsymbol{M\omega} \\ \boldsymbol{o}_e = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_e + \boldsymbol{N\omega} \end{cases} \tag{16}$$

2　抗饱和 LPV 控制器设计

由 LPV 模型式(16)可知，当时变参数 $\rho = [\rho_1, \rho_2, \rho_3]^{\mathrm{T}}$ 在一给定范围内变化时，系统矩阵 $(\boldsymbol{A}_\rho, \boldsymbol{B}_\rho, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 是关于参数 ρ 的仿射函数，表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_\rho & \boldsymbol{B}_\rho & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{N} & \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_j & \boldsymbol{B}_j & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{N} & \end{bmatrix} \tag{17}$$

式中，$(\boldsymbol{A}_j, \boldsymbol{B}_j, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 表示矩阵多面体的第 j 个顶点；

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1,\ \alpha_j \geqslant 0 \tag{18}$$

为任意一个凸组合，k 为多面体的顶点个数。

依据多面体理论，本文有如下定理：

定理 1　考虑闭环系统式(16)，对于给定的标量 $\gamma > 0$，若存在对称矩阵 $\boldsymbol{R} > 0$，任意矩阵 $\boldsymbol{S}$ 使得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_j & \boldsymbol{M} + \boldsymbol{RC}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{RC}^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 \boldsymbol{I} & \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0,\ j = 1,2,\cdots,k \tag{19}$$

成立，则闭环系统式(16)是渐近稳定的，且对于任意 $\omega \in L_2(0,\infty)$，满足 $\| \boldsymbol{o}_e \|_2 < \gamma \| \boldsymbol{\omega} \|$。其中 $\boldsymbol{\Lambda}_j = \boldsymbol{RA}_j^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}_j\boldsymbol{R} + \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_j^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_j\boldsymbol{S}$，此时闭环系统的状态反馈控制输入为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{SR}^{-1}\boldsymbol{x}_e \tag{20}$$

证明　对闭环系统式(16)，取状态反馈控制为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_e \tag{21}$$

定义备选 Lyapunov 函数为

$$V(x) = \boldsymbol{x}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_e \tag{22}$$

其中对称矩阵 $\boldsymbol{P} > 0$，对式(22)沿着系统式(16)的状态方程的轨迹求导得

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_e)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_e \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}_\rho + \boldsymbol{B}_\rho\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_\rho + \boldsymbol{B}_\rho\boldsymbol{K}) & \boldsymbol{PM} \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_e \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \tag{23}$$

由式(15)有

$$J_{o_e\omega} = \int_0^\infty (\boldsymbol{o}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{o}_e - \gamma^2 \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega} + \dot{V}(\boldsymbol{x}_e))\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_e)\,|_{t=0} - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_e)\,|_{t=\infty} \tag{24}$$

在零初始条件下，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_e)\,|_{t=0} = 0$，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_e)\,|_{t=\infty} \geqslant 0$，所以有

$$J_{o_e\omega} \leqslant \int_0^\infty (\boldsymbol{o}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{o}_e - \gamma^2 \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega} + \dot{V}(\boldsymbol{x}_e))\,\mathrm{d}t \tag{25}$$

又由式(14)和式(23)可得

$$\boldsymbol{o}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{o}_e - \gamma^2 \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega} + \dot{V}(\boldsymbol{x}_e) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_e \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_\rho & \boldsymbol{PM} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N} \\ * & \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N} - \gamma^2 \boldsymbol{I} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Theta}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_e \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \tag{26}$$

式中，$\boldsymbol{X}_\rho = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} + (\boldsymbol{A}_\rho + \boldsymbol{B}_\rho\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_\rho + \boldsymbol{B}_\rho\boldsymbol{K})$。即若有 $\Theta < 0$ 对于任意的 $\rho \in \{(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_1), (\bar{\rho}_2, \bar{\rho}_2), (\bar{\rho}_3, \bar{\rho}_3)\}$ 成立，则有 $J_{o_e\omega} < 0$ 对于任意的 $[\boldsymbol{x}_e^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\omega}]^{\mathrm{T}} \neq 0$ 成立。于是闭环系统式(16)是渐近稳定的，且在零初始条件下具有噪声抑制水平 γ。由 Schur 补引理，$\boldsymbol{\Theta} < 0$ 等价于

$$\boldsymbol{\Psi} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_\rho & \boldsymbol{PM} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 \boldsymbol{I} & \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{27}$$

式中，$\boldsymbol{Y}_\rho=(\boldsymbol{A}_\rho+\boldsymbol{B}_\rho\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_\rho+\boldsymbol{B}_\rho\boldsymbol{K})$。为得到 LMI 形式的约束条件，对矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ 进行合同变换，分别左乘 diag $\{\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\}$ 和右乘 diag $\{\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\}$，定义 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}^{-1}$，则可得

$$\boldsymbol{\Omega}\triangleq=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_\rho & \boldsymbol{M}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{R}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\\ * & -\gamma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\\ * & * & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{28}$$

式中，$\boldsymbol{Z}_\rho=\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_\rho^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_\rho R+\boldsymbol{B}_\rho\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_\rho^{\mathrm{T}}$。根据多面体理论，若式(19)成立，则有式(28)成立。　证毕

注 1　定理 1 的约束条件隐含了 $(\boldsymbol{A}_\rho+\boldsymbol{B}_\rho\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_\rho+\boldsymbol{B}_\rho\boldsymbol{K})<0$ 对于任意的 $\rho\in\{(\bar{\rho}_1,\bar{\rho}_1),(\bar{\rho}_2,\bar{\rho}_2),(\bar{\rho}_3,\bar{\rho}_3)\}$ 成立，即当系统中不存在噪声($\omega=0$)时，闭环系统式(16)仍然是渐近稳定的。

注 2　对于定理 1，当把 γ^2 视为一个待求的决策变量时，求取 γ 的最优解等价于如下的优化问题：

$$\min_{R>0,S}\gamma^2$$
$$\text{s.t. 式(19)} \tag{29}$$

3　仿真分析

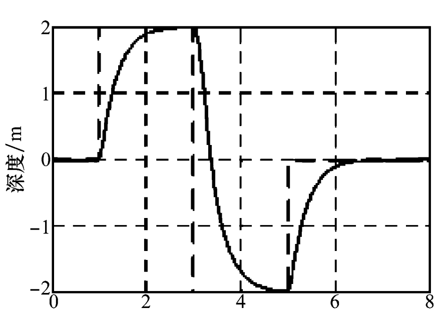
仿真过程中，参数值如下[3]：$V=75$ m/s，$R_n=0.019\ 1$ m，$R=0.050\ 8$ m，$C_{x0}=0.82$，$n=0.5$，$\sigma=0.03$，$L=1.8$ m，$g=9.81$ m/s^2，$m=2$。LPV 模型中有 3 个时变参数，所对应的多面体有 8 个顶点。计算得 $\rho_1\in(0,1]$，$\rho_2\in(0,1]$，$\rho_3\in[0,79.3165]$，饱和阈值设为 $u_1^{\max}=u_2^{\max}=25°$。取噪声驱动矩阵为 $\boldsymbol{M}=[0.01\quad 0.01\quad 0.01\quad 0.01]^{\mathrm{T}}$，$N=0.01$，噪声干扰取为 $\omega=2\sin(2\pi t)$。代入具体数值，计算优化问题式(29)，得 γ 的全局最优解为 0.018 9，对应的控制器参数为

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}-0.049\ 4 & 0.000\ 3 & 1.649\ 5 & 0.000\ 5\\ -0.017\ 3 & 0.000\ 1 & 0.574\ 9 & 0.000\ 2\end{bmatrix}\times 10^7$$

注意到最优 γ 所要求的控制器参数过大，实际应用中几乎不可能实现。为此，取 $\gamma=0.2$，应用定理 1，计算得到对应的控制器为

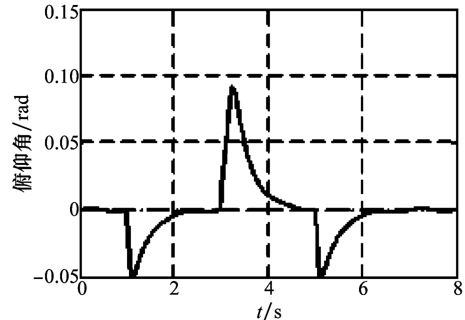
$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}6.247\ 9 & 20.734\ 8 & 4.940\ 6 & 32.689\ 3\\ -0.208\ 9 & 0.626\ 4 & 12.632\ 9 & 1.326\ 4\end{bmatrix}$$

该控制器作用下系统状态变量响应曲线如图 2～图 5 所示，空化器及尾舵偏转角曲线分别如图 6 和图 7 所示。



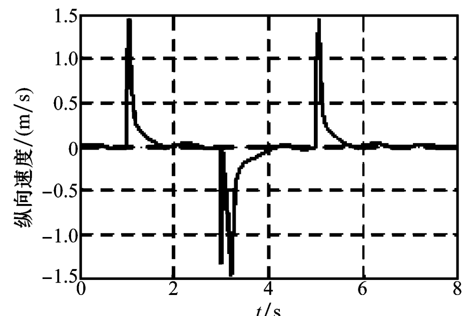
——：实际轨迹；- - -：参考轨迹。

图 2　航行体深度曲线



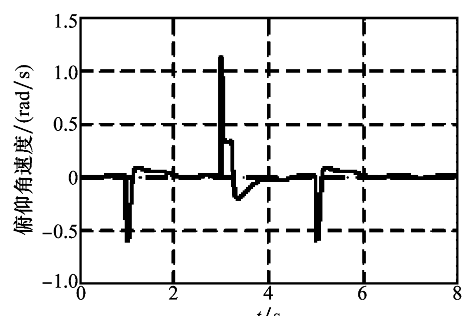
——：实际轨迹；- - -：参考轨迹。

图 3　航行体俯仰角曲线



——：实际轨迹；- - -：参考轨迹。

图 4　航行体纵向速度曲线



——：实际轨迹；- - -：参考轨迹。

图 5　航行体俯仰角速度曲线

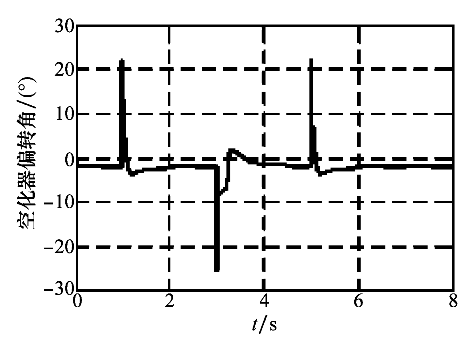


图 6　空化器偏转角曲线

从图 2～图 5 可以看出，在整个仿真过程中，航行体的 4 个状态均能渐近跟踪给定指令。其中，航行体深度和俯仰角的动态过程需要大约 1.5 s，而纵向速度和航行体俯仰角速度动态过程较快，分别在 1 s 左右收敛到给定的指令。图 6 和图 7 分别表示作为航行体执行器的空化器和尾舵的

偏转角的变化情况。从图 6 中可以看出，在 3 s 时空化器进入饱和状态，但很快退出饱和。图 7 中在每次给定新的阶跃指令时，尾舵均进入饱和状态，且维持饱和状态的时间则与阶跃指令的幅值有关，幅值越大，尾舵处于饱和的时间越长，然后同样退出饱和。仿真中噪声干扰具有正弦波的形式，为抑制其对系统跟踪精度的影响，图 6 和图 7 作为控制输入的空化器和尾舵响应曲线在稳态时同样也按正弦规律波动，而图 2～图 5 中航行体状态的响应曲线则波动很小，尤其图 2 中深度响应曲线在稳态时几乎没有波动，航行体对给定深度指令的跟踪具有足够的精度。综合图 2～图 7 可以得出，在本文所设计控制器作用下，即使执行器出现较长时间的饱和，航行体仍然是稳定的，且能渐近跟踪给定的指令。

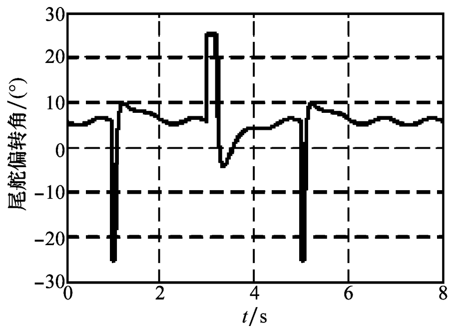


图 7　尾舵偏转角曲线

4　结　论

针对航行体在运动过程中遇到的执行器饱和问题，在原有动力学方程基础上考虑执行器饱和非线性，通过把系统非线性特性转换为时变参数的仿射函数建立了 LPV 模型。运用多面体理论和 Lyapunov 方法设计了 LMI 约束形式的状态反馈控制器。由于所设计的控制器不依赖于时变参数，因而结构简单，易于工程实现。仿真结果表明闭环系统能够渐近跟踪给定指令，且对噪声干扰有较好的抑制性能。

参考文献：

[1] Vanek B, Bokor J, Balas G J, et al. Longitudinal motion control of a high-speed supercavitation vehicle[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2007, 13(2): 159-184.

[2] Kirschner I N, Uhlman J S, Perkins J B. Overview of high-speed supercavitating vehicle control[C]//*Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 2006: 3100-3116.

[3] Dzielski J, Kurdila A. A benchmark control problem for supercavitating vehicles and an initial investigation of solutions[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2003, 9(7): 791-804.

[4] Kirschner I N, Kring D C, Stokes A W, et al. Control strategies for supercavitating vehicles[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2002, 8(2): 219-242.

[5] Kulkarni S S, Pratap R. Studies on the dynamics of a supercavitating projectile[J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2000, 24(2): 113-129.

[6] Mao X, Wang Q. Delay-dependent control design for a time-delay supercavitating vehicle model[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2011, 17(3): 431-448.

[7] Mao X, Wang Q. Adaptive control design for a supercavitating vehicle model based on fin force parameter estimation[J]. *Journal of Vibrationand Control*, 2013, 21(6): 1220-1233.

[8] Zhao X H, Mo H W. Longitudinal motion control of supercavitating vehicles using the robust pole assignment method[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2009, 30(12): 1379-1385.(赵新华，莫宏伟. 超空泡航行体纵向运动的鲁棒极点配置控制[J]. 哈尔滨工程大学学报，2009，30(12)：1379-1385.)

[9] Fan H, Zhang Y W. Stability analysis and nonlinear switching controller design for supercavitating vehicles[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(11): 1211-1217.(范辉，张宇文. 超空泡航行器稳定性分析及其非线性切换控制[J]. 控制理论与应用，2009，26(11)：1211-1217.)

[10] Lü R, Yu K P. Backstepping attitude tracking controller for supercavitating vehicle[J]. *China Science Paper*, 2012, 7(10): 809-812.(吕瑞，于开平. 超空泡航行体的反演姿态跟踪控制器设计[J]. 中国科技论文，2012，7(10)：809-812.)

[11] Lin G, Balachandran B, Abed E H. Dynamics and control of supercavitating vehicles[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2008, 130(2): 281-287.

[12] Lin G, Balachandran B, Abed E H. Nonlinear dynamics and control of supercavitating bodies[C]//*Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2006: 3151-3164.

[13] Wu F, Wang J C, Fang X S, et al. New developments in anti-windup control[J]. *Control and Instruments in Chemical Industry*, 2007, 34(2): 1-6.(吴风，王景成，方小生，等. 抗饱和控制的一些新进展[J]. 化工自动化及仪表，2007，34(2)：1-6.)

[14] Wu F, Grigoriadis K M, Packard A. Anti-windup controller synthesis via linear parameter-varying control design methods[C]//*Proc. of the American Control Conference*, 1998: 343-347.

[15] Mao X, Wang Q. Nonlinear control design for a supercavitating vehicle[J]. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 2009, 17(4): 816-832.

作者简介：

韩云涛(1978-)，男，讲师，博士，主要研究方向为水下运动体动力学与控制。
E-mail: yuntaohan@163.com

强宝琛(1989-)，男，硕士研究生，主要研究方向为水下运动体控制。
E-mail: qiangbaochen@126.com

孙　尧(1963-)，男，教授，博士研究生导师，主要研究方向为导航制导与控制、智能仪器与系统、突变控制理论。
E-mail: suny@ems.dragon.net.cn

白　涛(1978-)，男，讲师，博士，主要研究方向为水下航行体的导航制导与控制、信息融合技术。
E-mail: baitao1@hrbeu.edu.cn