第 38 卷 第 2 期 2016 年 2 月
系统工程与电子技术 Systems Engineering and Electronics
Vol. 38 No. 2 February 2016
文章编号：1001-506X(2016)02-0347-05
网址：www.sys-ele.com

# 多粒度背景下直觉模糊信息系统的粗糙集及其决策

郭 庆[1,2]，吴 磊[1,2]
（1. 合肥工业大学管理学院，安徽 合肥 230009；2. 合肥工业大学数学学院，安徽 合肥 230009）

**摘 要**：从多粒度视角研究了直觉模糊信息系统，定义了优势关系，给出了乐观和悲观的两种模型，研究了其性质及其与单粒度模型的联系与区别，并且给出了决策规则的置信度因子及其决策规则的获取方法，定义了多粒度直觉模糊决策系统的属性重要度，将其应用到多专家综合决策中，从而弥补了单粒度直觉模糊粗糙集的不足，最后通过一个实例验证了本文理论方法的正确性与有效性。

**关键词**：多粒度粗糙集；直觉模糊信息系统；属性重要度；置信度
**中图分类号**：TP 18 **文献标志码**：A **DOI**：10.3969/j.issn.1001-506X.2016.02.16

# Rough set model and decision in intuitionistic fuzzy information system based on multi-granulation

GUO Qing[1,2], WU Lei[1,2]
(*1. School of Managements, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China;*
*2. School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China*)

**Abstract**: The intuitionistic fuzzy information system (IFIS) is further investigated from the point of multi-granulation. The optimistic model as well as the pessimistic models are proposed by dominance relation. Then not only their properties are researched but also the differences and relationships between single-granulation and multi-granulation model are discussed. Moreover, the certainty factor of the decision rule and the acquired method are then given. The attribute importance degree in the multi-granulation intuitionistic fuzzy decision system is defined and applied in multi-expert decision to make up for the deficiency of the single-granulation model. Finally, a numerical example is given to demonstrate the correctness and effectiveness of the proposed method.

**Keywords**: multi-granulation rough set; intuitionistic fuzzy information system(IFIS); attribute importance degree; certainty factor

## 0 引 言

粗糙集理论是由文献[1]提出的一种解决信息不完备，不精确系统的有效数学工具，广泛应用于数据挖掘与知识获取等领域中[2]。从粒计算角度经典的粗糙集模型只能处理信息系统中单个粒度的情况，文献[3]在此基础上将单粒度粗糙集模型拓展到多粒度情形。多粒度粗糙集由于从多个角度、多个层次出发分析问题，在很多实际决策问题中有较好的应用前景，近几年吸引了大量的研究学者，详细内容可参阅文献[4－9]。

直觉模糊集（intuitionistic fuzzy set，IFS）[10]作为模糊集的最重要的拓展与补充同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫度 3 个方面的信息，因此比传统的模糊集更具客观性与真实性。直觉模糊信息系统（intuitionistic fuzzy information system，IFIS）在实际中通常用于处理专家对考察对象的分级决策问题。由于其很强的应用背景，近年来吸引了大量的研究学者。文献[11－13]研究了单粒度 IFIS，基于直觉模糊集的距离测度建立一种直觉模糊粗糙集模型，给出了上下近似约简算法，文献[14]提出了基于软集与 IFS 的粗糙集决策方法，文献[15]研究了优势关系下直觉模糊目标信息系统的上近似约简问题，文献[16]研究了单粒度 IFIS 的优势关系及其约简方法，直觉模糊粗糙集在冲突分析及其多属性决策中的应用研究可参阅文献[17－20]。

本文将从多粒度视角下研究 IFIS 的粗糙集相关理论及其决策问题。基于优势关系构建乐观多粒度粗糙集模型和悲观多粒度粗糙集模型，讨论其基本性质及与单粒度模型的联系与区别，提出多粒度 IFIS 的决策规则的置信度因子及其决策规则的获取方法。定义多粒度直觉模糊决策系

**收稿日期**：2015－01－19；**修回日期**：2015－06－05；**网络优先出版日期**：2015－09－21。
**网络优先出版地址**：http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2422.TN.20150921.2131.018.html
**基金项目**：国家自然科学基金(11172086,51178157,71131002)；中央高校基本科研业务费专项基金(2013HGXJ0228)资助课题

统的属性重要度，并将其用于多个专家的综合决策中，弥补单粒度模型的不足。最后，通过算例对本文的理论与方法进行验证。

## 1 预备知识

### 1.1 直觉模糊信息系统

**定义 1**[10] 设 $U$ 为一给定论域，称

$$A=(u_A(x),v_A(x)),x\in U$$

为 $U$ 上的 IFS，其中

$$u_A:U\to[0,1],v_A:U\to[0,1]$$

且满足：$0\leqslant u_A(x)+v_A(x)\leqslant 1$，$u_A(x)$ 和 $v_A(x)$ 为 $U$ 中元素 $x$ 属于 $A$ 的隶属函数和非隶属函数，称 $\pi_A(x)=1-u_A(x)-v_A(x)$ 表示 $x$ 属于 $A$ 的犹豫度。当 $\pi_A(x)=0$，则 $A$ 退化成传统的模糊集。

直觉模糊数(intuitionistic fuzzy number, IFN)是 IFS 的简化形式，通常用 $\alpha=\langle u,v\rangle$ 来表示，其中 $0\leqslant u,v\leqslant 1$，且 $u+v\leqslant 1$。比较两个 IFN 的大小通常采用下述定义。

**定义 2**[11] 设 $\alpha_1=\langle u_1,v_1\rangle$ 与 $\alpha_2=\langle u_2,v_2\rangle$ 为两个 IFN，则 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$ 当且仅当 $u_1\leqslant u_2$ 并且 $v_1\geqslant v_2$。

**定义 3**[16] 一个信息系统或数据表通常用 $T=(U,AT,V,f)$ 表示，其中 $U$ 为论域即研究对象的全体，$AT$ 表示研究对象的所有属性集合或特征，$V$ 表示对象的属性值集合，$f$ 表示一个信息函数，即对任意的 $a\in AT,x\in U$，属性值 $f(a,x)\in V$，若属性值 $f(a,x)$ 为一 IFN，则称 $T$ 为 IFIS。当 $AT=C\cup D$，其中 $C$ 为条件属性集，$D$ 为决策属性集，则称 $T=(U,C\cup D,V,f)$ 为直觉模糊决策系统(intuitionistic fuzzy decision system, IFDS)。为了处理 IFIS 的决策问题，通常使用如下的优势关系代替等价关系。

**定义 4**[15] 设 $T=(U,AT,V,f)$ 是 IFIS，$C\subseteq AT$ 为条件属性集，定义 $T$ 中的优势关系

$$R_C^{\leqslant}=\{(x,y)\in U\times U:f(x,b)\leqslant f(y,b),\forall b\in C\} \tag{1}$$

显然优势关系 $R_C^{\leqslant}$ 满足自反性、传递性和反对称性且 $R_C^{\leqslant}=\bigcap R_{b\in C}^{\leqslant}$。

**定义 5**[15] 设 $T=(U,AT,V,f)$ 是 IFIS，$C\subseteq AT$ 为条件属性集，记

$$R_C^{\leqslant}(x)=\{x_i\in U:f(x,a)\leqslant f(x_i,a),\forall a\in C\} \tag{2}$$

称为对象 $x$ 在优势关系 $R_C^{\leqslant}$ 下的优势类，即在单个粒度下所有优于 $x$ 的对象全体。

**定义 6**[15] 设 $T=(U,AT,V,f)$ 是 IFIS，$C\subseteq AT$ 为条件属性集，对于 $\forall X\subseteq U$ 定义：

$$\underline{R_C^{\leqslant}}(X)=\bigcup\{x\in U:R_C^{\leqslant}(x)\cap X\neq\varnothing\} \tag{3}$$

$$\overline{R_C^{\leqslant}}(X)=\bigcup\{x\in U:R_C^{\leqslant}(x)\subseteq X\} \tag{4}$$

分别为 $X$ 在优势关系 $R_C^{\leqslant}$ 下的上、下近似集。

### 1.2 多粒度粗糙集的基本概念

多粒度粗糙集[3]采用一族而非一个等价关系来进行目标概念的近似逼近，分为乐观多粒度粗糙集与悲观多粒度粗糙集。

**定义 7**[3] 设 $T=(U,AT,V,f)$ 表示一信息系统，其中 $U$ 是论域，$A_i\subseteq AT\ (i=1,2,3,\cdots,m)$ 表示 $m$ 个属性子集，则对任意的 $X\subseteq U$，其乐观多粒度下、上近似集与边界集分别定义为

$$\underline{R^{O}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X)=\{x\in U:\bigvee_{i=1}^{m}([x]_{A_i}\subseteq X)\} \tag{5}$$

$$\overline{R^{O}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X)=\{x\in U:\bigwedge_{i=1}^{m}([x]_{A_i}\cap X\neq\varnothing)\} \tag{6}$$

$$OBN_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)=\overline{R^{O}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X)-\underline{R^{O}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X) \tag{7}$$

**定义 8**[3] 设 $T=(U,AT,V,f)$ 表示一信息系统，其中 $U$ 是论域，$A_i\subseteq AT\ (i=1,2,3,\cdots,m)$ 表示 $m$ 个属性子集，则对任意的 $X\subseteq U$，其悲观多粒度下、上近似集与边界集分别定义为

$$\underline{R^{P}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X)=\{x\in U:\bigwedge_{i=1}^{m}([x]_{A_i}\subseteq X)\} \tag{8}$$

$$\overline{R^{P}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X)=\{x\in U:\bigvee_{i=1}^{m}([x]_{A_i}\cap X\neq\varnothing)\} \tag{9}$$

$$PBN_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)=\overline{R^{P}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X)-\underline{R^{P}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X) \tag{10}$$

## 2 IFIS 的多粒度粗糙集及其性质

### 2.1 IFIS 的多粒度粗糙集模型

**定义 9** 设 $T=(U,AT,V,f)$ 是 IFIS，$A_i\subseteq AT(i=1,2,3,\cdots,m)$ 为条件属性集合，$R_{A_i}^{\leqslant}\ (i=1,2,3,\cdots,m)$ 表示 $T$ 中的优势关系，则对任意的 $X\subseteq U$，其乐观多粒度下、上近似集及边界集定义为

$$\underline{OR^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X)=\{x\in U:\bigvee_{i=1}^{m}(R_{A_i}^{\leqslant}(x)\subseteq X)\} \tag{11}$$

$$\overline{OR^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X)=\{x\in U:\bigwedge_{i=1}^{m}(R_{A_i}^{\leqslant}(x)\cap X\neq\varnothing)\} \tag{12}$$

$$OBN^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)=\overline{OR^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X)-\underline{OR^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X) \tag{13}$$

**定义 10** 设 $T=(U,AT,V,f)$ 是 IFIS，$A_i\subseteq AT(i=1,2,3,\cdots,m)$ 为条件属性集合，$R_{A_1}^{\leqslant}\ (i=1,2,3,\cdots,m)$ 表示 $T$ 中的优势关系，则对任意的 $X\subseteq U$，其悲观多粒度下、上近似集及边界集定义为

$$\underline{PR^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X)=\{x\in U:\bigwedge_{i=1}^{m}(R_{A_i}^{\leqslant}(x)\subseteq X)\} \tag{14}$$

$$\overline{PR^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X)=\{x\in U:\bigvee_{i=1}^{m}(R_{A_i}^{\leqslant}(x)\cap X\neq\varnothing)\} \tag{15}$$

$$PBN^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)=\overline{PR^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X)-\underline{PR^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}}(X) \tag{16}$$

定义 10 考虑了在多个粒度或属性子集条件下基于优势关系对目标对象集合的上下近似。在实际应用中，可以处理带有多个专家同时评估对象的决策问题，在本文的第 4 节中将进行研究。

### 2.2 模型的相关性质

本节只给出乐观多粒度的性质，对于悲观多粒度的情形可以类似得到。

**性质 1**　设 $T=(U,AT,V,f)$ 是 IFIS，$A_i\subseteq AT(i=1,2,3,\cdots,m)$ 为条件属性子集，对任意的 $X,Y\subseteq U$，有

(1) $\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)\subseteq X\subseteq\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$

(2) $\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X\cup Y)\supseteq\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)\cup\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(Y)$

(3) $\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X\cap Y)\subseteq\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)\cap\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(Y)$

(4) $\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X\cup Y)\supseteq\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)\cup\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(Y)$

(5) $\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X\cap Y)\subseteq\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)\cap\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(Y)$

(6) $\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(\sim X)=\sim\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$；

$\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(\sim X)=\sim\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$

**证明**　(1) 对任意的 $x\in\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$，则必存在 $A_i\subseteq AT$，使得 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\subseteq X$，因为 $x\in R_{A_i}^{\leqslant}(x)$，所以 $x\in X$，故 $\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)\subseteq X$；反之对任意的 $x\in X$ 和 $A_i\subseteq AT$ 都有 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\cap X\neq\varnothing$，所以 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\cap X\neq\varnothing$ 对任意的 $A_i\subseteq AT$ 都成立，故 $x\in\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$，因而 $X\subseteq\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$。

(2) 对任意的 $x\in\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)\cup\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(Y)$，有 $x\in\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$ 或 $x\in\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(Y)$，即 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\cap X\neq\varnothing$ 或 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\cap Y\neq\varnothing$ 对任意的 $A_i$ 都成立，所以 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\cap(X\cup Y)\neq\varnothing$，即 $x\in\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X\cup Y)$，故(2) 成立。

(3) 对任意的 $x\in\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X\cap Y)$，则必存在 $A_i\subseteq AT$，使得 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\subseteq(X\cap Y)$ 成立，也即 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\subseteq X$ 并且 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\subseteq Y$，故 $x\in\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$ 并且 $x\in\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(Y)$，则 $x\in\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)\cap\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(Y)$，所以(3) 成立。

(4) 对任意的 $x\in\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)\cup\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(Y)$，有 $x\in\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$ 或 $x\in\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(Y)$，则必存在 $A_i\subseteq AT$ 使得 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\subseteq X$ 或 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\subseteq Y$，则 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\subseteq(X\cup Y)$，所以 $x\in\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X\cup Y)$，因而(4) 成立。

(5) 对任意的 $x\in\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X\cap Y)$，则 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\cap(X\cap Y)\neq\varnothing$ 对任意的 $A_i\subseteq AT$ 都成立，所以 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\cap X\neq\varnothing$ 且 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\cap Y\neq\varnothing$。即 $x\in\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$ 且 $x\in\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(Y)$，因而(5) 成立。

(6) 对任意的 $x\in\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(\sim X)$，则必存在 $A_i\subseteq AT$，使得 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\subseteq\sim X$ 成立，即 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\cap X=\varnothing$，则 $x\notin\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$，所以 $x\in\sim\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$，反之也成立，故 $\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(\sim X)=\sim\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$，即 $\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)=\sim\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(\sim X)$，所以(6) 的前一半成立，同理可证明后一半。

证毕

**性质 2**　设 $T=(U,AT,V,f)$ 是 IFIS，$A_i\subseteq AT(i=1,2,3,\cdots,m)$ 为条件属性子集，对任意的 $X,Y\subseteq U$，有

(1) $\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)\subseteq\underline{R_{\bigcup_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$；$\overline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)\supseteq\overline{R_{\bigcup_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$；

(2) $\underline{PR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)=\bigcap_{i=1}^{m}\underline{R_{A_i}^{\leqslant}}(X)$，$\overline{PR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)=\bigcup_{i=1}^{m}\overline{R_{A_i}^{\leqslant}}(X)$。

**证明**　(1) 只证明前一半，后一半类似。对任意的 $x\in\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$，则必存在 $A_i\subseteq AT$ 使得 $R_{A_i}^{\leqslant}(x)\subseteq X$ 成立，因为 $A_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}A_i$，所以 $R_{\bigcup_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}(x)\subseteq R_{A_i}^{\leqslant}(x)$ 成立，则 $R_{\bigcup_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}(x)\subseteq X$，即 $x\in\underline{R_{\bigcup_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$，因而 $\underline{OR_{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)\subseteq\underline{R_{\bigcup_{i=1}^{m}A_i}^{\leqslant}}(X)$。

(2) 证明与(1)类似，从略。

证毕

性质 2 给出了优势关系下 IFIS 的多粒度粗糙集与单粒度粗糙集之间的关系。

## 3　多粒度 IFDS 的决策规则

本节将从多粒度视角研究 IFDS 的决策规则的提取问题。

设 $T=(U,C\cup D,V,f)$ 表示 IFDS，$A_i\subseteq C\ (i=1,2,3,\cdots,m)$ 为条件属性子集，$D=\{d\}$ 表示决策属性，$U/\{d\}=\{X_1,X_2,\cdots,X_s\}$ 表示根据决策属性将对象划分为 $s$ 个等级，则基于多粒度的决策规则如下：

$$r_x^{\vee}:A_1(y)\geqslant A_1(x)\vee A_2(y)\geqslant A_2(x)\vee\cdots\vee A_m(y)\geqslant A_m(x)\rightarrow d(y)\geqslant d(x)$$

或

$$r_x^1:A_1(y)\geqslant A_1(x)\rightarrow d(y)\geqslant d(x),$$
$$r_x^2:A_2(y)\geqslant A_2(x)\rightarrow d(y)\geqslant d(x)$$
$$\vdots$$
$$r_x^m:A_m(y)\geqslant A_m(x)\rightarrow d(y)\geqslant d(x)$$

本文定义上述“或”型决策规则 $r_x^{\vee}$ 的置信度因子如下：

$$C(r_x^{\vee})=\max_{i=1}^{m}C(r_x^i)$$

式中，$C(r_x^i)=\dfrac{|[x]_{A_i}^{\leqslant}\cap[x]_d|}{|[x]_{A_i}^{\leqslant}|}$，这里 $[x]_{A_i}^{\leqslant}$ 表示在条件属性子集 $A_i$ 下 $x$ 的优势类，$[x]_d$ 表示在决策属性 $d$ 下与 $x$ 分为同一等

级的对象，|·|表示集合的基数。显然，若 $C(r_x^{\vee})=1$，则称规则 $r_x^{\vee}$ 是确定的，若 $0<C(r_x^{\vee})<1$，则称规则 $r_x^{\vee}$ 是可能的。

**定理 1**　设 $T=(U,C\cup D,V,f)$ 表示 IFDS，$A_i\subseteq C(i=1,2,3,\cdots,m)$ 为条件属性子集，$D=\{d\}$ 表示决策属性，对任意的 $x\in U$，有

(1) $x\in \underline{OR}^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}([x]_d)$ 当且仅当 $C(r_x^{\vee})=1$；

(2) $x\in PBN^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}([x]_d)$ 当且仅当 $0<C(r_x^{\vee})<1$。

**证明**　只证明式(1)、式(2)类似。

对任意 $x\in \underline{OR}^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}([x]_d)$，则存在 $A_i$，使得 $R^{\leqslant}_{A_i}(x)\subseteq[x]_d$，即 $[x]^{\leqslant}_{A_i}\subseteq[x]_d$，则 $C(r_x^{a_i})=\dfrac{|[x]^{\leqslant}_{A_i}\cap[x]_d|}{|[x]^{\leqslant}_{A_i}|}=1$，所以 $C(r_x^{\vee})=\max\limits_{i=1}^{m}C(r_x^{i})=1$。反之也成立，故(1)成立。

证毕

定理 1 表明在 IFDS 中的确定性“或”规则可由优势关系下乐观多粒度下近似集中的对象支持，可能性“或”规则可由优势关系下悲观多粒度边界集中的对象支持。

## 4　多粒度 IFDS 的属性重要度

**定义 11**　设 $T=(U,C\cup D,V,f)$ 表示 IFDS，$A_i\subseteq C(i=1,2,3,\cdots,m)$ 为条件属性子集，$D=\{d\}$ 表示决策属性，$X\in U/\{d\}$，则

(1) 若 $\underline{PR}^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\subseteq\underline{PR}^{\leqslant}_{\sum_{k=1,k\neq j}^{m}A_k}(X)$，则称 $A_j$ 在条件属性集中相对于决策属性是重要的，其重要度定义为

$$\mathrm{sig}(A_j,D)=\frac{\sum\left\{\left|\underline{PR}^{\leqslant}_{\sum_{k=1,k\neq j}^{m}A_k}(X)\right|-\left|\underline{PR}^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\right|\right\}}{|U|}$$

此处之所以用悲观下近似而不用乐观下近似的原因在于根据定义 9：

$$\underline{OR}^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)\subseteq\underline{OR}^{\leqslant}_{\sum_{k=1,k\neq j}^{m}A_k}(X)$$

未必是恒成立的。

(2) 若 $\underline{PR}^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(X)=\underline{PR}^{\leqslant}_{\sum_{k=1,k\neq j}^{m}A_k}(X)$，则称 $A_j$ 在条件属性集中相对于决策属性是不重要的。

定义 11 给出了 IFDS 中条件属性子集相对于决策属性的重要度，在实际应用中，若 $sig(A_j,D)=0$，则第 $j$ 个专家对参评对象的评价在整个决策系统中是不重要的，即在实际决策中可以忽略，若

$$sig(A_j,D)=\max_{k=1}^{m}sig(A_k,D)$$

则第 $j$ 个专家对参评对象的评价在整个决策系统中是最重要的，即在实际决策中可以重点考虑。

显然，多粒度直觉模糊粗糙集可以处理多专家综合决策问题，从而提高了评估的客观性与公平性。

## 5　算例分析

**例 1**　表 1 为一完备的 IFDS，其中 $x_i\in U(i=1,2,\cdots,5)$ 表示被评估的对象，$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$ 表示对象的各个指标即条件属性，$A_1=\{a_1\}$，$A_2=\{a_2,a_3\}$，$A_3=\{a_4,a_5\}$ 分别表示 3 个专家对评估对象感兴趣的指标，并且为了更切合实际，所有专家的评估值都是用 IFN 来表示，$\{d\}$ 表示决策属性集合，表示专家的决策等级分为二级。

**表 1　完备的 IFDS**

| $U$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | (0.4,0.5) | (0.3,0.5) | (0.8,0.2) | (0.4,0.5) | (0.7,0.1) | 2 |
| $x_2$ | (0.3,0.5) | (0.4,0.5) | (0.6,0.1) | (0.4,0.5) | (0.7,0.3) | 2 |
| $x_3$ | (0.3,0.5) | (0.4,0.4) | (0.8,0.1) | (0.4,0.5) | (0.7,0.3) | 1 |
| $x_4$ | (0.1,0.8) | (0.1,0.8) | (0.4,0.5) | (0.1,0.8) | (0.8,0.2) | 1 |
| $x_5$ | (0.7,0.3) | (0.4,0.5) | (0.9,0.1) | (0.5,0.5) | (0.8,0.1) | 2 |

由定义 5，可计算

$$R^{\leqslant}_{A_1}(x_1)=\{x_1,x_5\}$$
$$R^{\leqslant}_{A_1}(x_2)=R^{\leqslant}_{A_1}(x_3)=\{x_1,x_2,x_3,x_5\}$$
$$R^{\leqslant}_{A_1}(x_4)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$$
$$R^{\leqslant}_{A_1}(x_5)=\{x_5\}$$
$$R^{\leqslant}_{A_2}(x_1)=\{x_1,x_3,x_5\}$$
$$R^{\leqslant}_{A_2}(x_2)=\{x_2,x_3,x_5\},R^{\leqslant}_{A_2}(x_3)=\{x_3\}$$
$$R^{\leqslant}_{A_2}(x_4)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$$
$$R^{\leqslant}_{A_2}(x_5)=\{x_5\}$$
$$R^{\leqslant}_{A_3}(x_1)=\{x_1,x_5\}$$
$$R^{\leqslant}_{A_3}(x_2)=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6\}$$
$$R^{\leqslant}_{A_3}(x_3)=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6\}$$
$$R^{\leqslant}_{A_3}(x_4)=\{x_4,x_5,x_6\},R^{\leqslant}_{A_3}(x_5)=\{x_5\}$$
$$U/D=[x]_d=\{D_1,D_2\}=\{(x_3,x_4),(x_1,x_2,x_5)\}$$
$$\underline{OR}^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(D_1)=\{x_3\},\overline{OR}^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(D_1)=\{x_2,x_3,x_4\}$$
$$\underline{OR}^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(D_2)=\{x_1,x_5\},\overline{OR}^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(D_2)=\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$$

根据定理 1 可得确定性决策规则如下：

(1) $\{a_1(y)\geqslant(0.3,0.5)\}\vee\{a_2(y)\geqslant(0.4,0.4)\wedge a_3(y)\geqslant(0.8,0.1)\}\vee\{a_4(y)\geqslant(0.4,0.5)\wedge a_5(y)\geqslant(0.7,0.3)\}\rightarrow d(y)=1$ 由对象 $x_3$ 支持；

(2) $\{a_1(y)\geqslant(0.4,0.5)\}\vee\{a_2(y)\geqslant(0.3,0.5)\wedge a_3(y)\geqslant(0.8,0.2)\}\vee\{a_4(y)\geqslant(0.4,0.5)\wedge a_5(y)\geqslant(0.7,0.1)\}\rightarrow d(y)=2$ 由对象 $x_1$ 支持；

(3) $\{a_1(y)\geqslant(0.7,0.3)\}\vee\{a_2(y)\geqslant(0.4,0.5)\wedge a_3(y)\geqslant(0.9,0.1)\}\vee\{a_4(y)\geqslant(0.5,0.5)\wedge a_5(y)\geqslant(0.8,0.1)\}\rightarrow d(y)=2$ 由对象 $x_5$ 支持。

可能性规则通过计算 $PBN^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(D_1)$ 与 $PBN^{\leqslant}_{\sum_{i=1}^{m}A_i}(D_2)$ 可以类似得到，这里不再一一给出。

由定义 11 可计算出 $sig(A_1,D)=0$，$sig(A_2,D)=\dfrac{1}{5}$，

$sig(A_3,D)=0$，故相对于决策属性来说 $A_2$ 是最重要的，即第二个专家的评价可以重点考虑。

## 6　结　语

本文研究了 IFIS 的多粒度粗糙集理论，给出了乐观和悲观的两种模型，讨论了其性质以及与单粒度模型之间的关系，给出了多粒度 IFDS 的决策规则的置信度因子及其决策规则的获取方法，定义了多粒度 IFDS 的属性重要度，将其应用到多专家综合决策中，并通过实例加以验证。作为粗糙集理论的一个较新的研究方向，多粒度粗糙集为决策问题提供了新的思路与方法，其在多准则决策分析方面的应用将是下一步研究工作的重点。

## 参考文献：

[1] Pawlak Z. Rough set theory and its applications to data analysis[J]. *Cybernetics and Systems*, 1998, 29(7): 661－688.

[2] Zhang W X, Wu W Z, Liang J Y, et al. *Rough set theory and method*[M]. Beijing: Science Press, 2001: 1－30.（张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2001：1－30.）

[3] Qian Y H, Liang J Y, Yao Y Y, et al. MGRS: A multi-granulation rough set[J]. *Information Sciences*, 2010, 180(6): 949－970.

[4] Sang Y L, Qian Y H. A granular space reduction approach to pessimistic multi-granulation rough sets[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2012, 25(3): 361－366.（桑妍丽，钱宇华. 一种悲观多粒度粗糙集中的粒度约简算法[J]. 模式识别与人工智能，2012，25(3)：361－366.）

[5] Xu W H, Wang Q R. Multi-granulation fuzzy rough sets in a fuzzy tolerance approximation space[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2011, 13(4): 246－259.

[6] Lin G P, Qian Y H, Li J J. NMGRS: neighborhood-based multigranulation rough sets[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2012, 53(7): 1080－1093.

[7] Qian Y H, Li S Y, Liang J Y, et al. Pessimistic rough set based decisions: a multi-granulation fusion strategy[J]. *Information Sciences*, 2014, 264: 196－210.

[8] Liu C H, Miao D Q, Qian J. On multi-granulation covering rough sets[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2014, 55(6): 1404－1418.

[9] Ma R, Liu W Q. Multi-granulation rough set model based on set-valued information system[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2014, 36(5): 920－925.（马睿，刘文奇. 基于集值信息系统的多粒度粗糙集[J]. 系统工程与电子技术，2014，36(5)：920－925.）

[10] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(1): 87－96.

[11] Huang B, Li H X, Wei D K. Dominance-based rough set model in intuitionistic fuzzy information systems[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2012, 28(1): 115－123.

[12] Huang B, Wei D K. Distance-based rough set model in intuitionistic fuzzy information systems and its application[J]. *System Engineering-Theory & Practice*, 2011, 31(7): 1356－1362.（黄兵，魏大宽. 基于距离的直觉模糊粗糙模型及应用[J]. 系统工程理论与实践，2011，31(7)：1356－1362.）

[13] Huang B, Wei D K, Li H X, et al. Using a rough set model to extract rules in dominance-based interval-valued intuitionistic fuzzy information systems[J]. *Information Sciences*, 2013, 221(2): 215－229.

[14] Zhang Z M. A rough set approach to intuitionistic fuzzy soft set based decision making[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36(10): 4605－4633.

[15] Wu L, Yang S L, Guo Q. Upper approximation reduction in intuitionistic fuzzy object information systems with dominance relations[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2014, 27(4): 300－304.（吴磊，杨善林，郭庆. 优势关系下直觉模糊目标信息系统的上近似约简[J]. 模式识别与人工智能，2014，27(4)：300－304.）

[16] Guo Q, Yin M, Wu L. Dominance relation and reduction in intuitionistic fuzzy information system[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2014, 36(11): 2239－2243.（郭庆，殷明，吴磊. 直觉模糊信息系统的优势关系及其约简[J]. 系统工程与电子技术，2014，36(11)：2239－2243.）

[17] Liu Y. Intuitionistic fuzzy rough set model based on conflict distance and applications[J]. *Applied Soft Computing*, 2015, 31: 266－273.

[18] Sun B Z, Ma W M. Rough approximation of a preference relation by multi-decision dominance for a multi-agent conflict analysis problem[J]. *Information Sciences*, 2015, 315: 39－53.

[19] Kadzinski M, Greco S, Słowinski R. Robust ordinal regression for dominance-based rough set approach to multiple criteria sorting[J]. *Information Sciences*, 2014, 283: 211－228.

[20] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough approximation by dominance relation[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2012, 17(2): 153－171.

## 作者简介：

**郭　庆**(1979－)，男，讲师，博士研究生，主要研究方向为基于粗糙集理论的不确定决策。
E-mail：guoqingwyl@126.com

**吴　磊**(1979－)，男，讲师，博士研究生，主要研究方向为基于粗糙集理论的不确定决策。
E-mail：leewu79@hotmail.com