

基于群论的六足机器人运动空间研究

魏 武, 叶春台, 袁银龙

(华南理工大学自动化科学与工程学院, 广东 广州 510641)

摘要: 针对六足机器人相对复杂的机械结构, 提出一个简化模型结构, 利用等条件约束把腿支链转化为滑动连杆. 其次, 针对简化后的模型, 依据其运动约束方程, 分析研究六足机器人可达空间以及姿态空间. 在群论基础上, 结合六足机器人的运动约束模型, 着重分析机器人初始状态的对称性与其运动空间对称性的关系, 并通过分层搜索算法, 求解六足机器人运动空间. 最后通过仿真数据分析六足机器人运动空间随不同参数调整的变化情况, 对比分析机器人不同初始状态与其运动空间的关系, 同时对运动平台的姿态空间及其截面进行分析. 分析与仿真结果表明, 利用群约束模型可以对复杂并联机器人运动空间进行更详尽的分析, 得到包括空间对称性、姿态空间以及空间截面的详细信息.

关键词: 六足机器人; 运动空间; 群论; 分层搜索; 群对称性

中图分类号: TP242

文献标识码: A

文章编号: 1002-0446(2016)-05-0522-09

Workspace Analysis of a Six-legged Robot Based on Group Theory

WEI Wu, YE Chuntai, YUAN Yinlong

(School of Automation Science & Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

Abstract: For the complicated structure of a six-legged robot, a simplified model is proposed to transform the robot legs into slid links using the constraint under equivalent conditions. By this way, the reachable workspace and orientation workspace of the simplified model are defined based on the motion constraint equations. Then the symmetry relationship between initial states and workspace is emphatically analyzed based on the motion constraint model and group theory. To compute and quantify the workspace of the robot, a hierarchical searching method is used. By simulation data, the changes of the workspace with different parameters are analyzed, the workspaces of the robot under different initial states are compared, and the orientation workspace of the motion platform and its cross section are also shown. As shown in analysis and simulation, the workspace of complicated parallel mechanisms is analyzed in detail by a constraint model based on group theory, and the detailed information of workspace symmetry, orientation workspace and cross section is obtained.

Keywords: six-legged robot; workspace; group theory; hierarchical searching; group symmetry

1 引言 (Introduction)

运动空间是衡量机器人整体性能以及指导结构设计的重要指标, 可分为固定转角空间^[1]和姿态空间^[2]. 姿态空间中最重要的是灵活空间. 此外, 衡量运动空间最常用的是可达空间, 对运动空间的分析一般指的是对可达空间的大小、形状、边界等指标的分析.

并联机器人运动空间的求解方法一般有数值法、解析法以及几何法^[3]. 数值法^[4-7]的优点在于其结构适用性和工程实用性. 王奇志^[8]将解析法与数值法相结合, 对 3-3 并联机器人运动学正解进行了研究. Tsai^[9]等研究了一种新型的 6 自由度并联

微动机器人的位置工作空间; Masory^[10]在考虑机构杆长约束、关节转角约束以及各构件约束的条件下, 对并联机器人的工作空间进行了分析, 并用数值积分法计算了工作空间的体积; 2001 年, Bonev 和 Ryu^[11]提出了一种基于四元数表示法的新的计算 6 自由度并联机器人姿态工作空间的离散算法. 2015 年 Saputra^[12]等人利用群优化算法求解并联平台的运动空间, 分析了在多自由度结构、运动空间为非凸以及运动空间存在空洞的情况下群优化算法的优越性.

针对六足机器人运动空间的研究主要集中在可达空间和单维度姿态空间上. 2006 年 Pernkopf 和 Husty^[13]对通用型 Stewart-Gough 平台的可达空间

(包括位置可达空间和姿态可达空间)进行了全面的分析. 2007 年 Lee 和 Perng^[14]通过构建内接圆和外接圆,以近似逼近的方式在 5 个维度上求解姿态空间的解析解. Yan^[15]等在 2011 年从群论角度结合位置空间和姿态空间在 6 个维度上研究了并联机器人的灵活空间,但受限于模型的复杂度,该文主要针对结构较简单的并联结构,如 3RP 平面并联机器人. 2012 年 Agheli 和 Nestinger^[16-17]对旋转对称的六足机器人可达空间进行了分析,提出将 3 自由度支链腿转化为 3 组 2-RPR 模型,并对 3 组腿可达空间求交集的方法,建立六足并联机器人的闭合解表达式. 北京航空航天大学徐坤和丁希仑^[18-19]把运动空间的分析应用到步态设计中,针对圆周对称分布的六足机器人提出步态稳定性和灵活性的分析方法. Cirillo^[20]等人在 2015 提出一种基于运动学逆解求解六足机器人可达空间的仿真环境,可用于指导六足机器人的机体结构设计.

本文提出新的简化模型外加约束条件的方式对六足机器人进行建模,通过分层微分搜索的数值算法可以方便地求解机器人运动平台的位置可达空间及姿态空间,显示该方法在复杂并联机器人运动空间求解上的优势. 以群约束模型对其位置可达空间以及姿态空间进行分析,得出其初始状态与运动空间的对称性的关系. 其中六足机器人的简化模型、约束条件以及运动空间对称性的分析可以简单地推广到其它具有机构对称性的机器人或并联机构的运动空间分析中. 对姿态空间及其截面的分析为机器人与操作工具的联动控制提供了理论基础.

2 机器人运动模型 (Motion model of the robot)

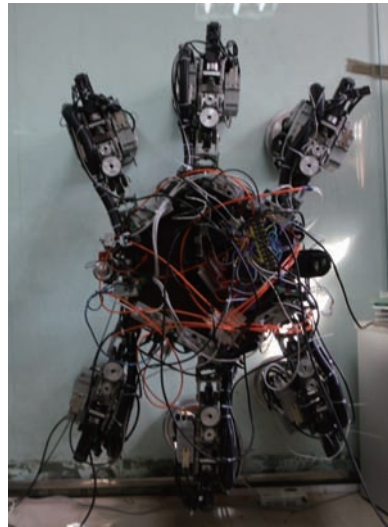
图 1 为实验室六足机器人 ML6-QJ-I 及其模型结构图,其中髋关节、膝关节、踝关节和足关节是由旋转副组成,足端通过球铰与吸盘相连接,每条腿支链都是相同的结构和尺寸. 六条腿吸盘同时着地的初始位置状态遵循对称原则,在腿部末端吸盘 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ 的几何中心上建立全局参考坐标系 $o-xyz$,在机体平台 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 几何中心上建立末端执行器局部坐标系 $o_c-x_cy_cz_c$. 初始状态下机器人关于局部坐标原点 O_c 旋转对称,定义: $\angle M_1A_1A_6$ 、 $\angle M_2A_2A_1$ 、 $\angle M_3A_3A_2$ 、 $\angle M_4A_4A_3$ 、 $\angle M_5A_5A_4$ 、 $\angle M_6A_6A_5$ 分别为角 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 、 α_5 、 α_6 , 其中 $\alpha_i \in (60^\circ, 180^\circ)$, $i = 1, 2, \dots, 6$.

每条支链腿坐标满足关系式:

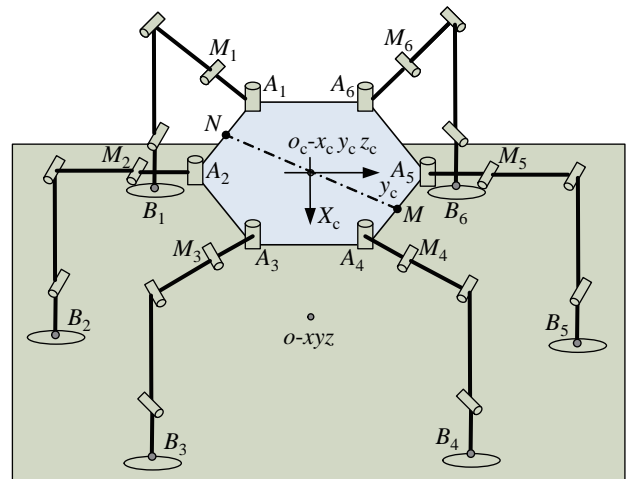
$$\mathbf{r}_{A_i} = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_{cA_i} = \mathbf{r}_c + \mathbf{R}\mathbf{r}_{A_i}^L \quad (1)$$

式中 \mathbf{r}_{cA_i} 表示全局参考坐标系下指向点 A_i 的向量, $\mathbf{R} \in SO(3)$ 为机体移动平台相对于全局坐标系的旋转矩阵, $\mathbf{r}_{A_i}^L$ 为局部坐标系下 A_i 的坐标:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{A_1}^L &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_1, -\frac{1}{2}r_1, 0 \right), \quad \mathbf{r}_{A_2}^L = (0, -r_1, 0), \\ \mathbf{r}_{A_3}^L &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_1, -\frac{1}{2}r_1, 0 \right), \quad \mathbf{r}_{A_4}^L = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_1, \frac{1}{2}r_1, 0 \right), \\ \mathbf{r}_{A_5}^L &= (0, r_1, 0), \quad \mathbf{r}_{A_6}^L = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_1, \frac{1}{2}r_1, 0 \right) \end{aligned}$$



(a) 六足机器人 ML6-QJ-I



(b) 模型结构图

图 1 六足机器人 ML6-QJ-I 及其模型结构图

Fig.1 Six-legged robot ML6-QJ-I and its structure model

同理, 可得到全局坐标系下各足端坐标表示:

$$\begin{aligned} B_1 &\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_1 - r_2 \sin \alpha_1, -\frac{1}{2}r_1 + r_2 \cos \alpha_1, 0 \right), \\ B_2 &(r_2 \sin(\alpha_2 - 120^\circ), -r_1 - r_2 \cos(\alpha_2 - 120^\circ), 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r_1 + r_2 \sin(\alpha_3 - 60^\circ), -\frac{1}{2} r_1 - r_2 \cos(\alpha_3 - 60^\circ), 0 \right), \\
 & B_4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r_1 + r_2 \sin \alpha_4, \frac{1}{2} r_1 - r_2 \cos \alpha_4, 0 \right), \\
 & B_5 (-r_2 \sin(\alpha_5 - 120^\circ), r_1 + r_2 \cos(\alpha_5 - 120^\circ), 0), \\
 & B_6 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} r_1 - r_2 \sin(\alpha_6 - 60^\circ), \frac{1}{2} r_1 + r_2 \cos(\alpha_6 - 60^\circ), 0 \right)
 \end{aligned}$$

其中, r_1 表示运动平台几何中心 O_c 到平台各顶点 A_i 的距离, r_2 表示运动平台各顶点 A_i 到对应足端 B_i 的水平距离.

3 运动平台全维运动空间定义 (Definition of 6-DOF motion workspace of the platform)

运动平台全维运动空间可以表示为位置空间 \mathbb{R}^3 和姿态空间的乘积空间, 即

$$SE(3) = \{(\mathbf{R}, \mathbf{P}) : \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{P} \in \mathbb{R}^3\} = SO(3) \otimes \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

其中, $SO(3)$ 为 3 维旋转群, \mathbb{R}^3 为空间 3 维坐标系. 对于机体运动平台, 其运动空间 $W \subset SE(3)$ 可以表示为

$$W_z = \{(\mathbf{P}, \mathbf{R}) | \mathbf{P} \in W_p \subset \mathbb{R}^3, \mathbf{R} \in W_R(\mathbf{P}) \subset SO(3)\} \quad (3)$$

或

$$W_z = \{(\mathbf{P}, \mathbf{R}) | \mathbf{P} \in W_p(\mathbf{R}) \subset \mathbb{R}^3, \mathbf{R} \in W_R \subset SO(3)\} \quad (4)$$

式中 W_p 和 W_R 分别为最大的 3 维可达位置空间和姿态空间, $W_p(\mathbf{R})$ 为与姿态相关的位置空间, $W_R(\mathbf{P})$ 为与位置相关的姿态空间, 即位置空间与姿态空间是相互耦合的关系. 此时 W_z 定义为机器人可达运动空间.

同理可以定义机器人的姿态空间 W_O 和灵活空间 W_D : $W_O, W_D \subset SO(3)$. 姿态空间 W_O 可以通过对可达空间, 即式 (3) 作进一步约束得到:

$$W_O = \{(\mathbf{P}, \mathbf{R}) | \mathbf{P} \in W_p \subset \mathbb{R}^3, \mathbf{R} \in W_R(\mathbf{P}) = W_g \subset SO(3)\} \quad (5)$$

其中, W_g 为满足某一姿态范围的子空间, 即:

$$\begin{aligned}
 W_g = \{(\theta_x, \theta_y, \theta_z) | \theta_x \in [\theta_{x1}, \theta_{x2}], \theta_y \in [\theta_{y1}, \theta_{y2}], \\
 \theta_z \in [\theta_{z1}, \theta_{z2}]\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

其中, $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 分别为 3 个维度上的旋转角, θ_{x1} 为 θ_x 的期望取值下限, θ_{x2} 为 θ_x 的期望取值上限, 其

他符号的意义可类似推知. 因此, 对于不同的期望取值范围, 可以得到不同的姿态空间. 特别的, 当 $W_g = W_G$ 为全运动空间时, 此时的姿态空间 W_O 也称为灵活空间 W_D , 即灵活空间 W_D 是一个特殊的姿态空间:

$$W_D = \{(\mathbf{P}, \mathbf{R}) | \mathbf{P} \in W_p \subset \mathbb{R}^3, \mathbf{R} \in W_R(\mathbf{P}) = W_G \subset SO(3)\} \quad (7)$$

其中, W_G 为全运动空间, 在全运动空间中, 3 个维度的旋转角都等于最大的取值范围, 但实际工程中, 往往以机构的实际允许的最大旋转范围来代替最大取值范围, 即:

$$W_G = \{(\theta_x, \theta_y, \theta_z) | \theta_x \in \Theta_{x_{\max}}, \theta_y \in \Theta_{y_{\max}}, \theta_z \in \Theta_{z_{\max}}\} \quad (8)$$

其中, $\Theta_{x_{\max}}, \Theta_{y_{\max}}, \Theta_{z_{\max}}$ 分别表示 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 的最大允许运动范围.

4 机器人运动空间约束 (Constraints of the robot workspace)

本文所讨论的运动空间即运动平台所允许的运动状态的集合, 运动空间的求解需要同时考虑机体结构的几何约束及各关节运动旋转范围的约束. 为了简化机器人运动空间的求解过程, 对六足机器人各条支链腿进行简化处理, 依据机器人机构方面的综合知识把串联关节支链腿简化为两端为球铰的滑动连杆, 并通过外加约束保证简化后的运动空间模型的合理性和准确性.

4.1 支链连杆长度约束

如图 2, 把机器人支链腿简化为两端为球铰的滑动连杆模型, 在模型简化前后机器人的足端到腿部与运动平台的连接部位之间的相对运动长度范围保持相同, 即简化后滑动连杆的长度变化和简化之前保持一致.

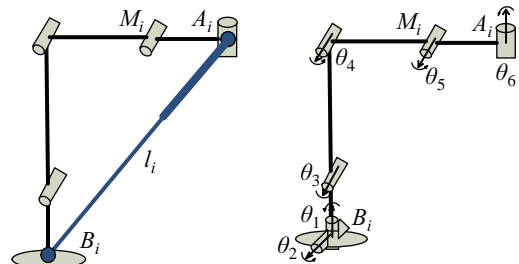


图 2 支链腿简化结构图

Fig.2 Simplified structure of a single leg link

依据第 2 节建立的机器人运动空间模型, 可以得到支链腿足端 B_i 到机体平台 A_i 端的空间向量 \mathbf{l}_i

为

$$\begin{cases} l_{ix} = m_1 c_{01}^i s_2^i + m_2 c_{01}^i s_{23}^i - m_3 c_{01}^i c_{234}^i - m_4 c_{01}^i c_{2345}^i \\ l_{iy} = m_1 s_{01}^i s_2^i + m_2 s_{01}^i s_{23}^i - m_3 s_{01}^i c_{234}^i - m_4 s_{01}^i c_{2345}^i \\ l_{iz} = m_1 c_2^i + m_2 c_{23}^i + m_3 s_{234}^i + m_4 s_{2345}^i \end{cases} \quad (9)$$

其中, $c_{01}^i = \cos(\delta^i + \theta_1^i)$, $s_{jz \dots k}^i = \sin(\theta_j^i + \theta_z^i + \dots + \theta_k^i)$, $c_{jz \dots k}^i = \cos(\theta_j^i + \theta_z^i + \dots + \theta_k^i)$, θ_k^i 为第 i 条腿支链中关节 k 的转动角度, δ^i 为运动平台各顶点相对于全局坐标系的旋转角度. 令: $f_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = \sqrt{l_{ix}^2 + l_{iy}^2 + l_{iz}^2}$, 根据每个关节的角度变化范围约束 $\theta_j^i \in [\min \theta_j^i, \max \theta_j^i]$, 则滑动连杆的长度变化范围为 $\|l_i\| \in [\min f_i, \max f_i]$, 由此, 得到机器人简化结构, 如图 3 所示.

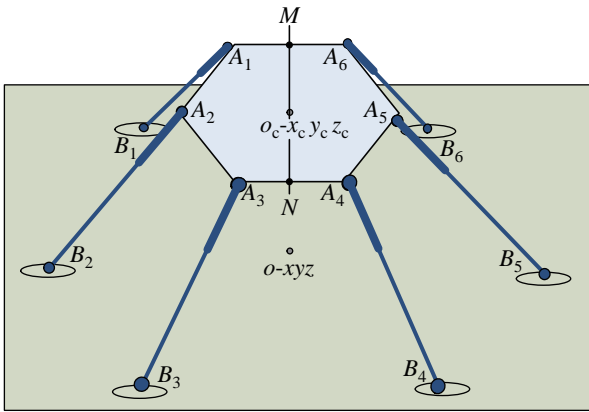


图 3 六足机器人简化结构图

Fig.3 Simplified structure of the six-legged robot

4.2 机器人运动几何约束

机器人运动过程首先要满足连杆运动范围的约束, 此外, 由于等效模型连杆末端 A 为球铰关节, 因此还需要满足模型简化前后关节位置的约束关系, 即限制连杆与机体平台边沿的夹角在一定的范围内, 如图 4 所示. 根据机器人腿部的结构设计, 此夹角可以等效为足端 B 到机体平台 A 端的连线在机体平台平面的投影与平台相应一边所成的角度 ψ_i .

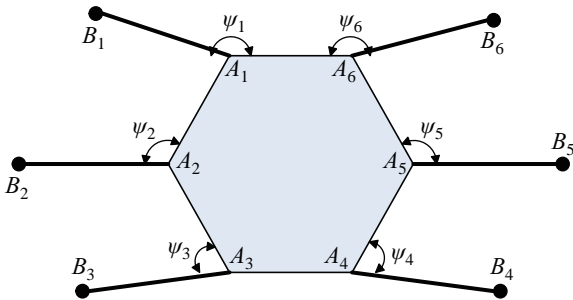


图 4 机器人某一状态在机体平面投影图

Fig.4 Projection of a robot state on the base plane

根据机器人机体运动时的几何关系, 可以得到以下的两组约束方程:

$$\begin{cases} \|r_{A_1} - r_{B_1}\| = l_1 \\ \|r_{A_2} - r_{B_2}\| = l_2 \\ \vdots \\ \|r_{A_6} - r_{B_6}\| = l_6 \\ \left\langle \overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_1 A_6} \right\rangle_{xy} \in [\min \psi_1, \max \psi_1] \\ \left\langle \overrightarrow{A_2 B_2}, \overrightarrow{A_2 A_1} \right\rangle_{xy} \in [\min \psi_2, \max \psi_2] \\ \vdots \\ \left\langle \overrightarrow{A_6 B_6}, \overrightarrow{A_6 A_5} \right\rangle_{xy} \in [\min \psi_6, \max \psi_6] \end{cases} \quad (10)$$

其中, $l_i = \|l_i\|$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), 为从支链腿足端 B_i 到机体平台 A_i 端的距离. 从以上分析可以得出, 通过外加的约束关系, 保证了模型简化前后运动平台和各足端相对空间关系保持不变, 从而保证了简化模型的合理性和准确性. 即对简化模型的分析结果适用于六足机器人的实际结构.

5 运动空间求解 (Workspace determination)

运动空间的求解即求解运动空间中满足机器人相应约束方程的点集, 根据约束分析, 定义函数:

$$g_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \|r_{A_i} - r_{B_i}\|^2 - l_i^2 \quad (11)$$

$$e_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \left\langle \overrightarrow{A_i B_i}, \overrightarrow{A_i A_{i-1}} \right\rangle_{xy} - \psi_i \quad (12)$$

其中 (x, y, z) 为机体平台运动空间中的 3 维坐标, α, β, γ 为机体平台的姿态角度. 由此可求取可达位置运动空间:

$$W_z = \{(P, R) | g_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0, e_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0\} \quad (13)$$

本文在此提出一种依据式 (3) 定义的运动空间来求解六足机器人运动平台运动空间的搜索方法.

(1) 根据机器人自由度理论, 分析得到不同初始对称状态下六足机器人的自由度, 根据机器人所具有的自由度及其运动约束矩阵判断机器人所具有的运动状态.

(2) 每个运动状态, 即约束方程中一组确定的 α, β, γ 值, 都对对应着相应的位置运动空间. 在求此运动空间时可以依据图 5, 把机器人运动空间分成多层结构, 分别求解每一层的运动空间范围. 则整体运动空间 $W_z = \sum_{n=1}^{\infty} W_n$.

(3) 采用微分搜索法, 在每一层运动范围内取满足约束条件的子集时, 固定 z 值, 令 $x = \rho \cdot \cos(i\Delta\varphi)$, $y = \rho \sin(i\Delta\varphi)$, 其中 ρ 是以 $i\Delta\varphi$ 为极角、以 $\Delta\varphi$ 为角度增量的半径, i 为非负整数, 满足 $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{2\pi}{\Delta\varphi} \right\rfloor$, 工作范围被 $\left\lfloor \frac{2\pi}{\Delta\varphi} \right\rfloor$ 条射线均匀分割. 针对每条射线均匀增加 ρ 的值, 直到刚好首次不再满足式 (11)、(12) 中的约束要求, 即达到运动空间边界点. 顺次连接这些边界点即可得到此层的运动空间.

(4) 叠加所有层次的运动空间, 求得在此初始状态下机器人完整的运动空间.

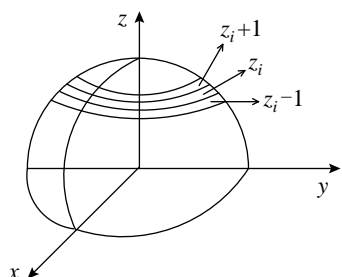


图5 运动空间分层结构图

Fig.5 Hierarchical structure of the workspace

依据以上 4 个步骤可求取运动平台的位置运动空间, 但求解过程的自由度分析与初始状态有关. 不同初始状态下, 机器人的自由度以及运动空间会

机器人运动空间 W_z 的约束方程为

$$\begin{cases} g_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \|\mathbf{r}_{A_i} - \mathbf{r}_{B_i}\|^2 - l_i^2 = \|\mathbf{r}_c + \mathbf{R}\mathbf{r}_{A_i}^L - \mathbf{r}_{B_i}\|^2 - l_i^2 \\ e_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \langle \overrightarrow{A_i B_i}, \overrightarrow{A_i A_{i-1}} \rangle_{xy} - \psi_i = \langle \mathbf{r}_c + \mathbf{R}\mathbf{r}_{A_i}^L - \mathbf{r}_{B_i}, \mathbf{R}\mathbf{r}_{A_{i-1}}^L - \mathbf{R}\mathbf{r}_{A_i}^L \rangle_{xy} - \psi_i \end{cases} \quad (14)$$

对于任意对称变换 $\varphi_i \in S_m$, $i = 1, 2, \dots, n$, 作用于约束方程:

$$\begin{cases} g_i(\varphi_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)) = \|\varphi_i(\mathbf{r}_c) + \mathbf{R}\mathbf{r}_{A_i}^L - \mathbf{r}_{B_i}\|^2 - l_i^2 \\ e_i(\varphi_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)) = \langle \varphi_i(\mathbf{r}_c) + \mathbf{R}\mathbf{r}_{A_i}^L - \mathbf{r}_{B_i}, \mathbf{R}\mathbf{r}_{A_{i-1}}^L - \mathbf{R}\mathbf{r}_{A_i}^L \rangle_{xy} - \psi_i \end{cases} \quad (15)$$

因为 $\varphi_i \varphi_i^{-1} = \varphi_E$ 为恒等变换, 所以 $\mathbf{r}_{A_i}^L = \varphi_i \varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{A_i}^L)$, 同理 $\mathbf{r}_{B_i}^L = \varphi_i \varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{B_i}^L)$, 所以有:

$$\begin{cases} g_i(\varphi_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)) = \|\varphi_i(\mathbf{r}_c) + \mathbf{R}\varphi_i \varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{A_i}^L) - \varphi_i \varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{B_i})\|^2 - \varphi_i \varphi_i^{-1}(l_i^2) \\ e_i(\varphi_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)) = \langle \varphi_i(\mathbf{r}_c) + \mathbf{R}\varphi_i \varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{A_i}^L) - \varphi_i \varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{B_i}), \mathbf{R}\varphi_i \varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{A_{i-1}}^L) - \mathbf{R}\varphi_i \varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{A_i}^L) \rangle_{xy} - \varphi_i \varphi_i^{-1}(\psi_i) \end{cases} \quad (16)$$

提取公因子 φ_i , 可得:

$$\begin{cases} g_i(\varphi_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)) = \varphi_i \left(\|\mathbf{r}_c + \mathbf{R}\varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{A_i}^L) - \varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{B_i})\|^2 - \varphi_i^{-1}(l_i^2) \right) \\ e_i(\varphi_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)) = \varphi_i \left(\langle \mathbf{r}_c + \mathbf{R}\varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{A_i}^L) - \varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{B_i}), \mathbf{R}\varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{A_{i-1}}^L) - \mathbf{R}\varphi_i^{-1}(\mathbf{r}_{A_i}^L) \rangle_{xy} - \varphi_i^{-1}(\psi_i) \right) \end{cases} \quad (17)$$

由群的重排定理, $\varphi_i^{-1}(S_m) = S_m$, 变换前后只有顶点的编码 $(1, 2, \dots, n)$ 不同, 如果用 σ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 表示顶点编码 $(1, 2, \dots, n)$ 的不同排列, 式 (17) 可以转化为

$$\begin{cases} g_i(\varphi_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)) = \varphi_i \left(\|\mathbf{r}_c + \mathbf{R}\mathbf{r}_{A_{\sigma_j}}^L - \mathbf{r}_{B_{\sigma_j}}\|^2 - l_{\sigma_j}^2 \right) \\ e_i(\varphi_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)) = \varphi_i \left(\langle \mathbf{r}_c + \mathbf{R}\mathbf{r}_{A_{\sigma_j}}^L - \mathbf{r}_{B_{\sigma_j}}, \mathbf{R}\mathbf{r}_{A_{\sigma_{j-1}}}^L - \mathbf{R}\mathbf{r}_{A_{\sigma_j}}^L \rangle_{xy} - \psi_{\sigma_j} \right) \end{cases} \quad (18)$$

发生改变. 由以下分析可知, 若机器人初始状态具有结构对称性, 则移动平台的运动空间也具有与之相对应的空间对称性.

6 机器人运动模型建立 (Modeling of the robot motion)

在并联机器人机体结构设计中, 往往把各支链部分设计为相同的机械结构, 在机器人初始状态为对称状态时, 机器人运动空间分布对称性成为衡量机器人性能的重要指标^[21]. 运动空间与末端执行器的关系可以用群论的知识进行描述.

初始状态下, 运动平台所有的空间变换中, 能使变换后运动平台与原来形状重合的变换称为对称变换. 运动平台所有的对称变换 (即 $\varphi_i(\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_j$ 的变换) 构成集合 S_m , 对任意 $\varphi_i, \varphi_j \in S_m$, 定义乘法 $\varphi_i \varphi_j$ 为对称变换 φ_i 和 φ_j 的复合. 可知: 1) 集合 S_m 对于所定义的乘法封闭, 即任意对称变换的复合仍然是对称变换; 2) $\forall \varphi_i \in S_m$ 存在逆元 $\varphi_i^{-1} \in S_m$ 为 φ_i 的反变换; 3) 存在单位元 $\varphi_E = \varphi_i \varphi_i^{-1} = \varphi_i^{-1} \varphi_i$, 为恒等变换, 则 S_m 构成一个对称群. 同理定义 G_w 为运动空间的对称群, 通过分析对称群 S_m 与 G_w 的关系可以得到运动空间 W_z 的对称性与初始状态对称性的关系. 下面利用群论的观点分析初始状态对称性对运动空间对称性的影响.

即式 (18) 与式 (14) 等价, 两式唯一的不同在于约束方程的顺序发生变化, 即 $\forall \varphi_i \in S_m$, 有 $\varphi_i \in G_w$, 进而有 $S_m \subseteq G_w$ 成立。

由以上分析可知, 利用群约束模型, 可以根据初始状态的对称性分析得到运动空间的对称性, 群约束模型是联系初始状态对称性和运动空间对称性的一个重要工具。

7 运动空间仿真分析 (Simulation and analysis of workspace)

7.1 运动空间对称性分析

由第 6 节的证明可得到, 机器人初始状态的对称性决定其运动空间的对称性。如图 6 所示, 机器人的初始状态由 $\alpha_i \in (60^\circ, 180^\circ)$ 表示, $i = 1, 2, \dots, 6$ 。

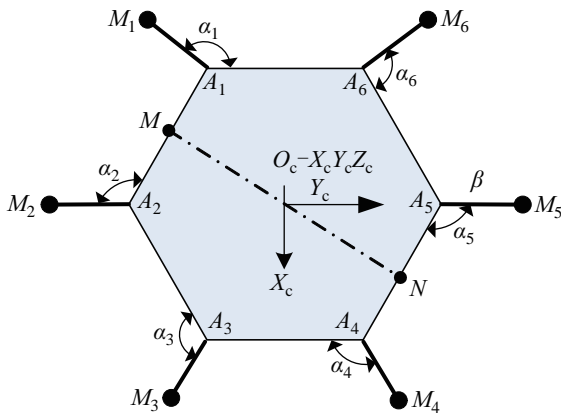


图 6 机器人初始状态示意图
Fig.6 Robot initial state

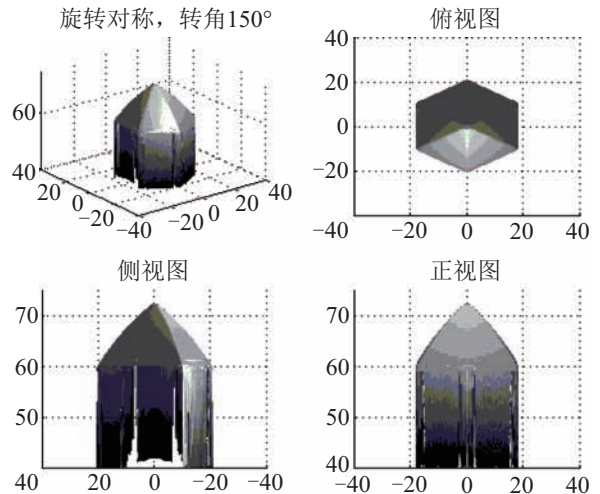
运动空间对称性与初始状态对称性的具体关系如下:

(1) 当机器人初始状态关于原点 O_c 旋转对称时, 即 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6$ 时, 运动平台的运动空间同样关于原点 O_c 旋转对称。

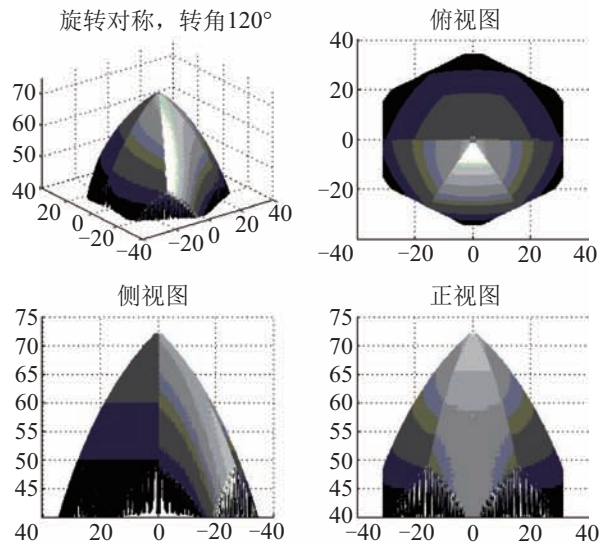
(2) 当机器人初始状态关于虚线 MN 轴对称, 同时关于虚线 MN 轴对称的角相等时, 即 $\alpha_1 = \alpha_2$ 、 $\alpha_3 = \alpha_6$ 、 $\alpha_4 = \alpha_5$ 时, 运动平台的运动空间具有轴对称性。

当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \varphi$ 时, 机器人初始状态关于 O_c 旋转对称, 图 7(a) ~ (c) 分别显示了当 φ 等于 90° 、 120° 、 150° 时运动空间关于 z 轴旋转角为 60° 的仿真结果。

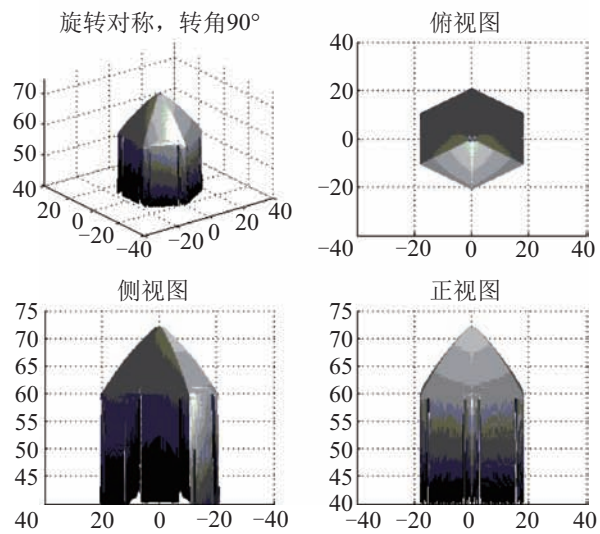
从图 7 可以看到, 当机器人初始状态旋转对称, 且随初始状态角 φ 改变时, 运动空间的形状大小也随之改变, 但运动空间的旋转对称性质不变。



(a) $\varphi = 150^\circ$, 运动空间关于 z 轴旋转对称



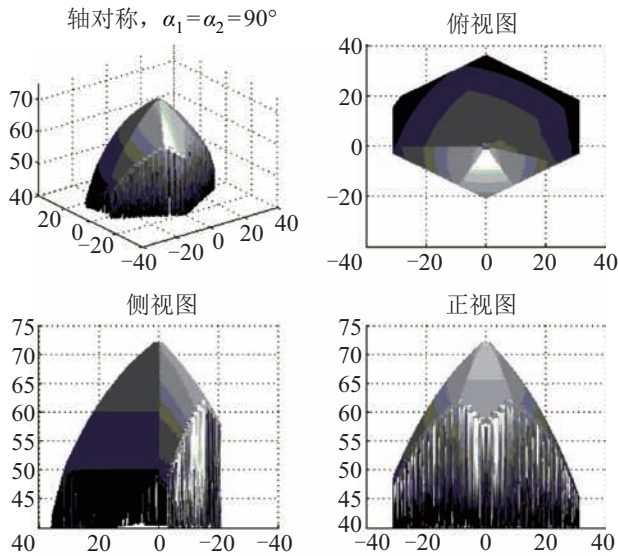
(b) $\varphi = 120^\circ$, 运动空间关于 z 轴旋转对称



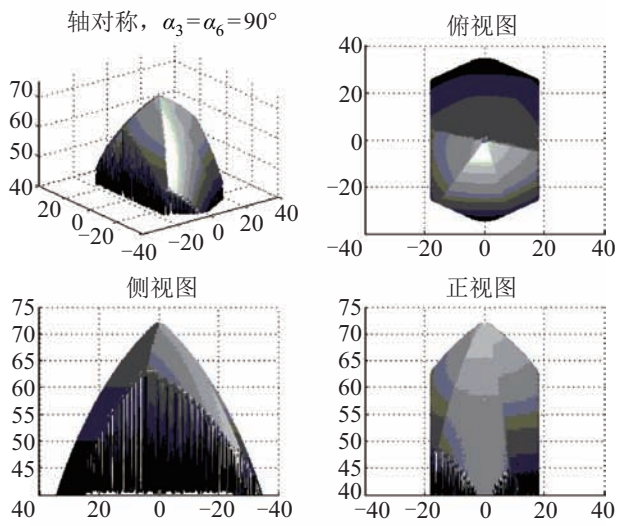
(c) $\varphi = 90^\circ$, 运动空间关于 z 轴旋转对称

图 7 初始状态旋转对称时的运动空间

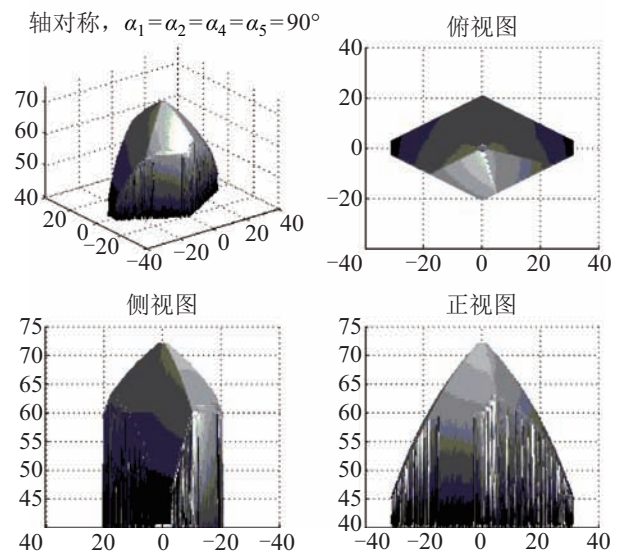
Fig.7 Workspace when initial states are rotationally symmetrical



(a) $\alpha_1=\alpha_2=90^\circ, \alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=120^\circ$

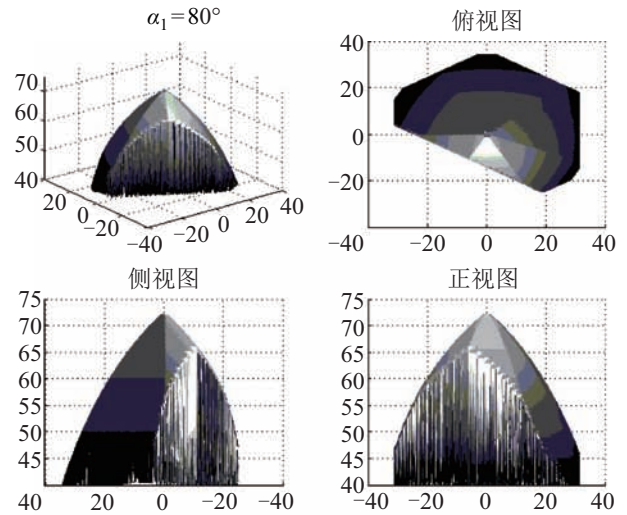


(b) $\alpha_3=\alpha_6=90^\circ, \alpha_1=\alpha_2=\alpha_4=\alpha_5=120^\circ$

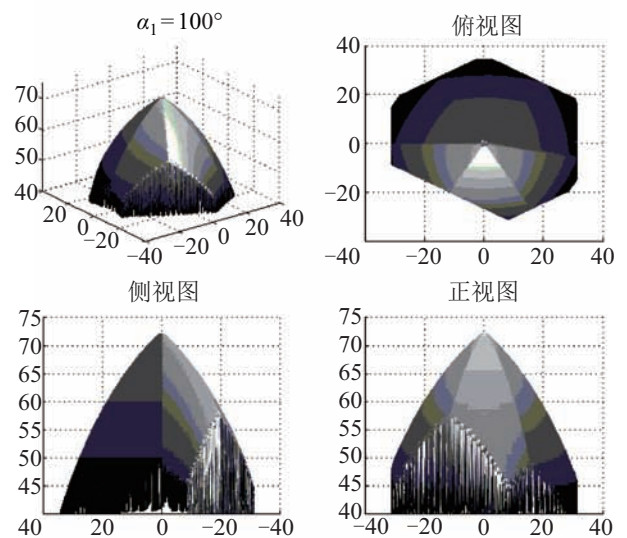


(c) $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_4=\alpha_5=90^\circ, \alpha_3=\alpha_6=120^\circ$

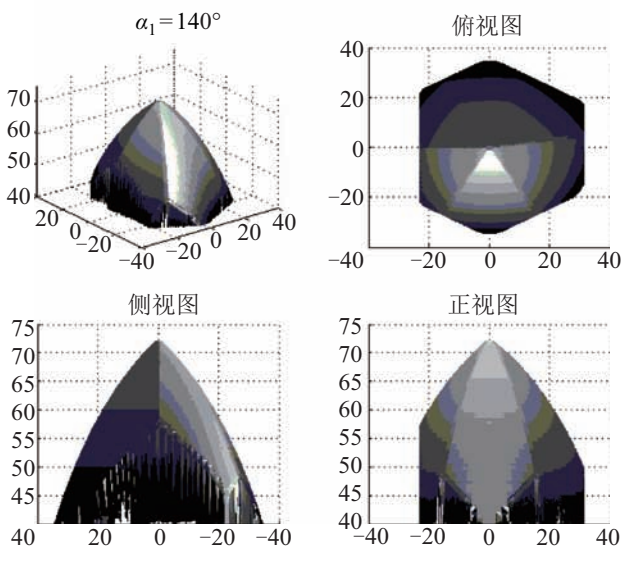
图8 初始状态轴对称时运动平台的运动空间
Fig.8 Workspace when initial states are axially symmetrical



(a) $\alpha_1=80^\circ, \alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=120^\circ$



(b) $\alpha_1=100^\circ, \alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=120^\circ$



(c) $\alpha_1=140^\circ, \alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=120^\circ$

图9 初始状态下角 α_1 大小对运动空间的影响
Fig.9 Influence of initial angle α_1 on workspace

图 8(a) ~ (c) 显示了当运动平台关于虚线 MN 轴对称, 同时关于虚线 MN 轴对称的角相等时运动空间的仿真计算图。

从图 8 可以看出, 当机器人初始状态关于虚线 MN 轴对称, 同时关于虚线 MN 轴对称的角相等时, 运动平台的运动空间同样关于 x 轴或 y 轴对称. 同时, 初始状态下 α_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) 的不同取值会改变运动空间的形状和大小, 但轴对称的关系保持不变。

运动平台运动空间具有对称性实际上是由于初始状态下每一个状态角 α_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) 对运动空间的影响有一定的独立性, 当初始状态下 α_1 分别为 80° 、 100° 、 140° , 其它角 α_i ($i = 2, \dots, 6$) 不变, 为 120° 时, 运动空间仿真计算如图 9(a) ~ (c) 所示。

从图 9 可以看到, 角 α_1 的变化只对运动空间的特定位置产生影响 (图中为俯视图右下部分), 而运动空间的其它部分则保持不变, 其它角 α_i ($i = 2, \dots, 6$) 对运动空间的影响类似, 因此初始状态下角 α_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) 的对称变化才会决定运动空间的对称性. 这一点也可以从第 6 节的相关证明中看出。

7.2 姿态空间及截面分析

运动平台姿态空间^[2]定义为: 运动平台在某一姿态范围内能够到达的位置的集合, 由式 (5) 和 (6) 所定义. 而灵活空间则是当 $W_g = W_G$ 为全运动空间时特殊的姿态空间, 其中 W_g 由式 (6) 所定义。

考虑六足机器人作为搭载工具的移动平台, 根据机器人及其搭载工具的联动控制来实现对特定对象的检测和操作. 操作工具的工作空间一般为 2 维平面, 由此为了实现机器人与所搭载工具的联动控制, 有必要对机器人姿态空间及其截面、边界进行分析。

考虑与 z 轴垂直的平面, 定义运动平台相对于 z 轴的旋转角为 δ , 当 δ 取不同值时, 运动空间的边界如图 10 所示。

其中, $z = 40$ 表示取运动空间中与 z 轴垂直且在 z 轴上坐标为 40 的平面. 由此可以得到运动平台在不同姿态范围下的姿态空间截面的边界, 如图 11 所示。

进一步, 考虑与 z 轴平行的截面, 可以得到运动平台在不同转角下的运动空间截面边界, 如图 12 所示。

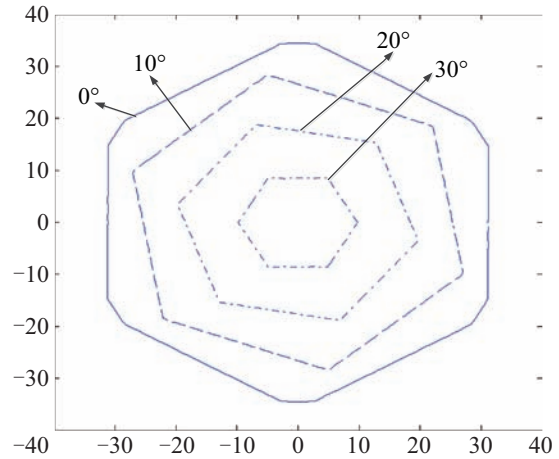


图 10 δ 不同取值下的运动空间边界 ($z = 40$)
Fig.10 Boundary of different workspaces when the value of δ is different ($z = 40$)

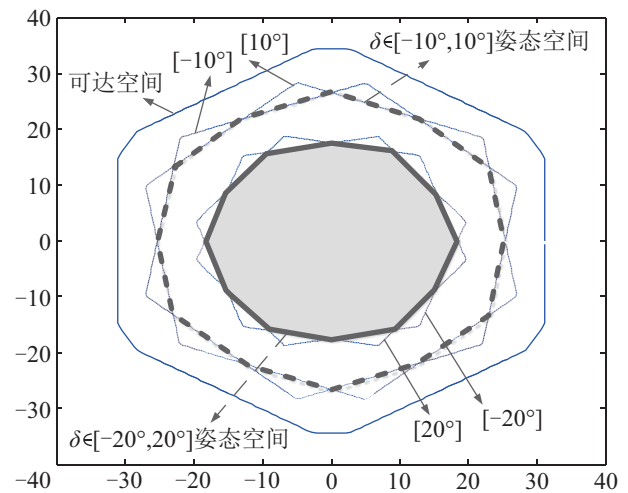


图 11 δ 不同取值范围下的姿态空间边界 ($z = 40$)
Fig.11 Boundary of different orientation workspaces when the range of δ is different ($z = 40$)

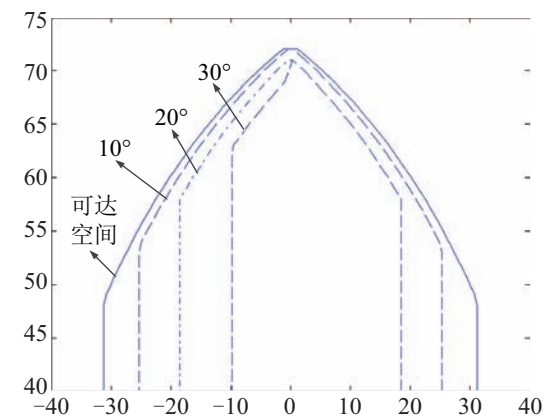


图 12 δ 不同取值下的运动空间竖直方向截面边界 ($y = 0$)

Fig.12 Boundary of vertical cross section of different workspaces when the value of δ is different ($y = 0$)

其中, $y = 0$ 表示取运动空间中与 y 轴垂直且在

y轴上坐标为0的平面. 通过以上仿真分析可以得到不同姿态空间的完整形状. 图13为运动平台关于z轴的旋转角 $\delta \in [-20^\circ, 20^\circ]$ 时姿态空间的仿真示意图.

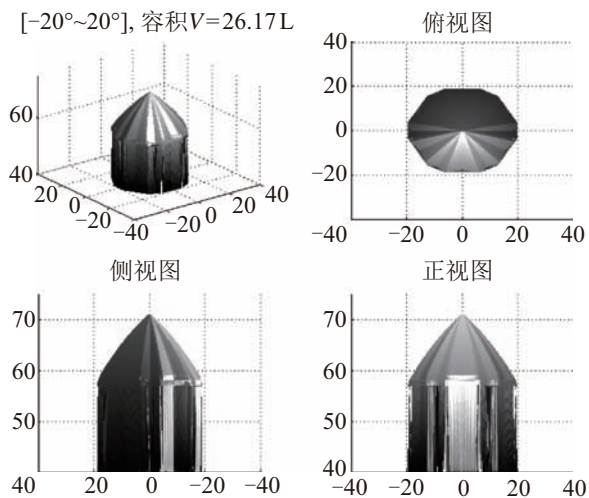


图13 $\delta \in [-20^\circ, 20^\circ]$ 时的姿态空间

Fig.13 Orientation workspace when $\delta \in [-20^\circ, 20^\circ]$

8 结论 (Conclusion)

本文提出一种基于群论对六足机器人工作空间进行分析的方法, 通过建立适当的简化模型与外加约束简化了运动空间的分析过程. 提出一种求解运动空间的方法, 该方法首先利用范数和内积构建约束函数, 然后利用分层搜索法对运动空间进行求解. 通过仿真实验证明了该方法的有效性. 在并联机器人机体结构具有对称性的基础上, 应用对称群理论, 分析得到机器人初始状态的对称性决定了运动平台运动空间对称性, 结合仿真结果对运动空间进行分析, 对并联机器人运动空间分布对称性的研究具有一定的指导意义.

对运动空间 (包括可达空间和姿态空间) 截面进行了分析, 对机器人及其所搭载工具的联动控制具有重要意义, 而运动空间的求解方法及空间本身的整体指标对并联机器人的设计具有重要的指导意义.

参考文献 (References)

[1] Merlet J P, Gosselin C M, Mouly N. Workspaces of planar parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33(1/2): 7-20.
 [2] Merlet J P. Determination of 6D workspaces of Gough-type parallel manipulator and comparison between different geometries[J]. International Journal of Robotics Research, 1999, 18(9): 902-916.

[3] 冯李航, 张为公, 龚宗洋, 等. Delta系列并联机器人研究进展与现状[J]. 机器人, 2014, 36(3): 375-384.
 Feng L H, Zhang W G, Gong Z Y, et al. Developments of Delta-like parallel manipulators - A review[J]. Robot, 2014, 36(3): 375-384.
 [4] 黄真, 孔令富, 方跃法. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
 Huang Z, Kong L F, Fang Y F. Mechanism theory and control of parallel robots[M]. Beijing: China Machine Press, 1997.
 [5] Innocenti C, Parenti-Castelli V. Forward kinematics of the general 6-6 fully parallel mechanism: An exhaustive numerical approach via a mono-dimensional-search algorithm[J]. Journal of Mechanical Design, 1993, 115(4): 932-937.
 [6] 王朋, 段志善, 贺利乐, 等. 新型六自由度并联机器人工作空间分析[J]. 机械科学与技术, 2007, 26(4): 528-531, 536.
 Wang P, Duan Z S, He L L, et al. Analysis of workspace of a novel 6-DOF parallel robot[J]. Mechanical Science and Technology, 2007, 26(4): 528-531, 536.
 [7] 陈宇航, 赵铁石, 宋晓鑫, 等. 变结构并联多维振动台自由度特性与运动学分析[J]. 机器人, 2016, 38(2): 135-143.
 Chen Y H, Zhao T S, Song X X, et al. Analysis of DOF properties and kinematics for variable configuration parallel multi-dimensional vibration platform[J]. Robot, 2016, 38(2): 135-143.
 [8] 王奇志, 张祥德, 崔建江, 等. 关于一类3-3型并联机器人运动学正解问题的研究[J]. 控制与决策, 1998, 13(增): 459-463, 468.
 Wang Z Q, Zhang X D, Cui J J, et al. Study for the direct displacement problem of a class of 3-3 parallel manipulator[J]. Control and Decision, 1998, 13(s): 459-463, 468.
 [9] Tahmasebi F, Tsai L W. Workspace and singularity analysis of a novel six-DOF parallel minimanipulator[R]. College Park, USA: Institute for Systems Research, 1993.
 [10] Masory O, Wang J. Workspace evaluation of Stewart platforms [J]. Advanced Robotics, 1995, 9(4): 443-461.
 [11] Bonev I A, Ryu J. A new approach to orientation workspace analysis of 6-DOF parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(1): 15-28.
 [12] Saputra V B, Ong S K, Nee A Y C. A swarm optimization approach for solving workspace determination of parallel manipulators[J]. Robotica, 2015, 33(3): 649-668.
 [13] Pernkopf F, Husty M L. Workspace analysis of Stewart-Gough-type parallel manipulators[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2006, 220(7): 1019-1032.
 [14] Lee T C, Perng M H. Analysis of simplified position and 5-DOF total orientation workspaces of a hexapod mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(12): 1577-1600.
 [15] Jin Y, Chen I M, Yang G L. Workspace evaluation of manipulators through finite-partition of SE(3)[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2011, 27(4): 850-859.

(1) 对机械臂的运动学和动力学建模,采用固定角度法和梯度法相结合,解决由于机械臂具有冗余自由度而产生的奇异点等问题,通过建立凯恩方程,求解了冗余机械臂的逆向动力学。

(2) 解决了平面约束对机械臂的影响,使得机器臂能够在任意曲面同时实现力约束和位置约束。

(3) 利用在适从坐标系中位置受控子空间与力受控子空间的互补问题,设计得到力/位混合控制的控制律,使其能控制机器人末端的位置与作用于环境的力。

参考文献 (References)

- [1] 蔡自兴. 机器人学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
Cai Z X. Robotics[M]. Beijing: Tsinghua Press, 2002.
- [2] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 5版. 北京: 科学出版社, 2007: 471-472.
Hu S S. The principle of automatic control[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2007: 471-472.
- [3] 王明, 黄攀峰, 常松涛, 等. 基于机械臂耦合力矩评估的组合航天器姿态协调控制[J]. 机器人, 2015, 37(1): 25-34.
Wang M, Huang P F, Chang H T, et al. Coordinated attitude control of combined spacecraft based on estimated coupling torque of manipulator[J]. Robot, 2015, 37(1): 25-34.
- [4] Zhou D S, Ji L, Zhang Q, et al. Practical analytical inverse kinematic approach for 7-DOF space manipulators with joint and attitude limits[J]. Intelligent Service Robotics, 2015, 8(4): 215-224.
- [5] Tarokh M, Zhang X M. Real-time motion tracking of robot manipulators using adaptive genetic algorithms[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2014, 74(3-4): 697-708.
- [6] Luo R C, Lin T W, Tsai Y H. Analytical inverse kinematic solution for modularized 7-DoF redundant manipulators with offsets at shoulder and wrist[C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Piscataway, USA: IEEE, 2014: 516-521.
- [7] 覃海强. 机械臂力/位置混合控制方法研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2013.
Qin H Q. Research on hybrid force and position control of manipulator[D]. Chongqing: Chongqing University, 2013.
- [8] Rivas B, Bauzano E. Force-position control for a miniature camera robotic system for single-site surgery[C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Piscataway, USA: IEEE, 2013: 3065-3070.
- [9] Naveen K, Vikas P. Neural network based hybrid force/position control for robot manipulators[J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2011, 12(3): 419-426.
- [10] Toz M, Kucuk S. Dynamics simulation toolbox for industrial robot manipulators[J]. Computer Applications in Engineering Education, 2010, 18(2): 319-330.
- [11] 陈辛. 机械臂的动力学研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2007.
Chen X. Study on the dynamics of manipulator[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2007.
- [16] Agheli M, Nestinger S S. Lateral reachable workspace of axially symmetric mobile machining hexapod robots[C]//2012 IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications. Piscataway, USA: IEEE, 2012: 81-86.
- [17] Agheli M, Nestinger S S. Closed-form solution for reachable workspace of axially symmetric hexapod robots[C]//2012 IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications. Piscataway, USA: IEEE, 2012: 75-80.
- [18] Xu K, Ding X L. Typical gait analysis of a six-legged robot in the context of metamorphic mechanism theory[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2013, 26(4): 771-783.
- [19] Xu K, Ding X L. Gait analysis of a radial symmetrical hexapod robot based on parallel mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 27(5): 867-879.
- [20] Cirillo P, de Maria G, Natale C. Customization of low-cost hexapod robots based on optimal design through inverse dynamics computation[C]//20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics. Piscataway, USA: IEEE, 2015: 1110-1115.
- [21] 赵景山, 冯之敬, 褚福磊. 机器人机构自由度分析理论[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
Zhao J S, Feng Z J, Chu F L. Analytical theory of degrees of freedom for robot mechanisms[M]. Beijing: Science Press, 2009.

作者简介:

常健(1983-), 男, 博士, 副研究员. 研究领域: 机械臂轨迹规划, 机器人自主运动及控制.

作者简介:

魏武(1970-), 男, 博士, 教授. 研究领域: 模式识别, 人工智能, 机器人技术等.

叶春台(1992-), 男, 硕士生. 研究领域: 智能控制技术, 机器人控制等.

袁银龙(1990-), 男, 博士生. 研究领域: 智能控制技术, 机器人控制, 机器人学习等.

(上接第530页)