

一种处理多极 Davidson-Cole 色散媒质的 FDTD 改进方案

刘广东, 张开银, 赵发勇

(阜阳师范学院物理与电子科学学院, 安徽阜阳 236037)

摘要: 为模拟一般 Davidson-Cole 色散媒质中的电波传播, 本文提出了一种时域有限差分 (FDTD) 改进方案, 改进之处体现在: (1) 适用媒质从单极推广到多极情形; (2) 适用媒质从无磁推广到有磁情形; (3) 保留了色散模型公式的静态电导率项; (4) 补充了三维问题算例. 改进方案中, 面临的主要困难是差分离散分数阶导数. 首先, 利用帕德 (Padé) 多项式近似媒质的介电常数; 其次, 通过傅里叶逆变换 (IFT) 导出了一组整数阶的辅助微分方程 (ADEs), 从而巧妙克服了该困难. 几个算例的结果和分析, 初步证实了改进方案的可行性和有效性.

关键词: 时域有限差分法; 帕德近似; 辅助微分方程; Davidson-Cole 色散媒质

中图分类号: O441.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2015)08-1598-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.08.019

A Modified FDTD Scheme for Multi-Pole Davidson-Cole Dispersive Media

LIU Guang-dong, ZHANG Kai-yin, ZHAO Fa-yong

(School of Physics and Electronics, Fuyang Normal College, Fuyang, Anhui 236037, China)

Abstract: An improved finite-difference time-domain (FDTD) scheme is presented to simulate wave propagation in general Davidson-Cole media. Four improvements are made in this paper: (1) extending to media with multiple relaxation times from ones with single relaxation time; (2) extending to magnetic media from nonmagnetic ones; (3) preserving the term of static ionic conductivity in the Davidson-Cole model; (4) supplementing an example for a three-dimensional (3D) problem. The main difficulty in this scheme is appearance of fractional derivatives. Firstly, the complex permittivity of the medium may be approximated by the Padé polynomials; then, a set of auxiliary differential equations (ADEs) of integer order are derived by the inverse Fourier transform (IFT), this difficulty is thus circumvented. The feasibility and validity of the presented scheme is preliminarily demonstrated by the results and analyses of several examples.

Key words: finite-difference time-domain (FDTD) method; Padé approximant; auxiliary differential equation (ADE); Davidson-Cole dispersive media

1 引言

实验测量证实: 生物组织、大地、岩石、金属、液晶、高分子材料、二醇等多种媒质的电磁特性展现了频率相关性, 称为色散媒质^[1]. 因此, 近几年来, 色散媒质的电磁传播特性引起了广泛关注^[2~6].

研究也显示, 不同媒质可能展现不同的色散特性, 至今已发展了好几种经验模型以描述这些不同的色散特性, 其中比较著名的经验模型有好几种, 可概括为两大类^[7]. 第一类主要有 Debye^[3~5]、Drude^[8~10] 和

Lorentz^[8,9]模型, 它们的共性在于: 媒质的复介电常数是 $j\omega$ (j 表示虚数单位, ω 表示角频率) 整数次幂的函数^[7], 下文相应称为第一类媒质. 第二类主要包含 Cole-Cole^[11~13]、Davidson-Cole^[1,7] 和 Havriliak-Negami^[14] 模型, 它们的共性在于: 媒质的复介电常数是 $j\omega$ 分数次幂的函数^[7], 下文相应称为第二类媒质.

近年来, 时域有限差分 (Finite-Difference Time-Domain, FDTD) 法已发展成为模拟色散媒质中电波传播的仿真工具之一^[10~13]. 为了建模色散媒质, 通常有两种思路: (1) 利用卷积积分; (2) 引入辅助微分方程 (Auxiliary

Differential Equation, ADE). 相比之下,后者具有存储量小、实现复杂度低等优势^[7,11]. 对于第一类媒质,应用 ADE 是直接的. 然而,对于第二类媒质,分数阶导数是应用 ADE 面临的主要困难^[7,11~14].

利用帕德(Padé)近似法^[15],Rekanos 成功实现了单极 Davidson-Cole 媒质的 FDTD 方案^[7]. 本文以此为基础,由单极推广到多极情形,方便建模更一般 Davidson-Cole 色散媒质中的电波传播.

2 辅助微分方程(ADEs)

假定空间 \mathbf{r} 处多极 Davidson-Cole 媒质是无磁耗、线性、各向同性和电色散的. 则频域的本构关系为

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \hat{\epsilon}_r(\mathbf{r}, \omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (1)$$

其中, $\hat{\mathbf{D}}$ 和 $\hat{\mathbf{E}}$ 分别表示频域复值的电位移和电场强度矢量(符号顶部加点表示其值为复数,下文同),位置矢量 $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ (算子 $[\cdot]^T$ 表示转置), $\omega = 2\pi f$, f 为频率, ϵ_0 为真空介电常数. 对于一般的(同时存在电极化损耗和欧姆损耗)多极 Davidson-Cole 媒质,其复值的相对介电常数定义为^[1]

$$\hat{\epsilon}_r(\mathbf{r}, \omega) \triangleq \epsilon_\infty(\mathbf{r}) + \frac{\sigma_s(\mathbf{r})}{j\omega\epsilon_0} + \sum_{w=1}^W \frac{\Delta\epsilon_w(\mathbf{r})}{(1 + j\omega\tau_w(\mathbf{r}))^{\beta_w}(\mathbf{r})} \quad (2)$$

其中, $\Delta\epsilon_w = \epsilon_{s,w} - \epsilon_\infty$, ϵ_∞ 表示光学相对介电常数, $\epsilon_{s,w}$ 、 τ_w 和 β_w ($0 \leq \beta_w \leq 1$) 分别表示第 w ($w = 1, 2, \dots, W$) 极的静态相对介电常数、弛豫时间和色散参数, W 表示极数. 本文采用的色散模型是比较一般的形式:(1)当 $W = 1$ 简化为单极情形;(2)当 $W = 1$ 且 $\sigma_s = 0$ 时退化为文献^[7]的式(1);(3)若 $\beta_w = 1$ 退化为 Debye 媒质^[3~5];(4)如果 $\beta_w = 1$ 且 $\Delta\epsilon_w = 0$ 时则变为非色散情形.

为了克服 FDTD 方案中分数(β_w 一般为分数)阶导数的困难,首先,借鉴 Rekanos 等人工作的思想^[7,11~14],利用帕德(Padé)近似法^[15],经过一些运算,式(2)的复值相对介电常数可近似转化为

$$\hat{\epsilon}_r(\mathbf{r}, \omega) \approx \epsilon_\infty(\mathbf{r}) + \frac{\sigma_s(\mathbf{r})}{j\omega\epsilon_0} + \sum_{w=1}^W \Delta\epsilon_w(\mathbf{r}) \frac{\sum_{n=0}^N p_n(j\omega\tau_w(\mathbf{r}))^n}{\sum_{m=0}^M q_m(j\omega\tau_w(\mathbf{r}))^m} \quad (3)$$

其中, N 、 M 分别表示分子、分母多项式的阶数,且满足 $M \geq N$, p_n 、 q_m 分别表示分子、分母多项式的系数,可通过解析求解线性方程组获得,相关细节参见文献^[7, 14].

其次,定义第 w ($w = 1, 2, \dots, W$) 极辅助的频域复值电极化强度矢量 $\hat{\mathbf{P}}_w$ 为

$$\hat{\mathbf{P}}_w(\mathbf{r}, \omega) \triangleq \epsilon_0 \Delta\epsilon_w(\mathbf{r}) \frac{\sum_{n=0}^N p_n(j\omega\tau_w(\mathbf{r}))^n}{\sum_{m=0}^M q_m(j\omega\tau_w(\mathbf{r}))^m} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (4)$$

最后,应用傅里叶逆变换(Inverse Fourier Transform, IFT),可以得到一组(W 个)关于时域电极化强度矢量 \mathbf{P}_w 的辅助微分方程(ADEs)为

$$\sum_{m=0}^M q_m \tau_w^m(\mathbf{r}) \frac{\partial^m \mathbf{P}_w(\mathbf{r}, t)}{\partial t^m} = \epsilon_0 \Delta\epsilon_w(\mathbf{r}) \sum_{n=0}^N p_n \tau_w^n(\mathbf{r}) \frac{\partial^n \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^n} \quad (5)$$

其中, \mathbf{E} 表示时域电场强度矢量, t 表示时间. 这样,这组辅助微分方程由于包含整数阶的时间导数,便于通过有限差分法实现时间的离散化.

3 时域有限差分(FDTD)方案

前述媒质中的时域微分形式的麦克斯韦(Maxwell)方程组为^[12]

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \epsilon_\infty \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \sum_{w=1}^W \mathbf{P}_w}{\partial t} + \sigma_s \mathbf{E} \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (7)$$

其中, \mathbf{H} 表示时域磁场强度矢量 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, 这里为了表达简洁,省略了自变量(下文同), μ_r 表示相对磁导率,当 $\mu_r = 1$ 时退化为文献^[7]的情形.

在 $t = i\Delta t$ 时刻(i 和 Δt 分别表示时间步指标和时间步长), \mathbf{E} 的 n 阶时间偏导数的中心差分近似为^[7,11]

$$\frac{\partial^n \mathbf{E}^i}{\partial t^n} \approx \frac{1}{\Delta t^n} \sum_{m=-l_n}^{l_n} Q_m^n \mathbf{E}^{i+m} \quad (8)$$

其中, $l_n = \lceil n/2 \rceil$ 表示对 $n/2$ 上取整, Q_m^n 表示中心差分参数. \mathbf{P}_w 的中心差分近似可类似地获得.

由于 $M \geq N$, 这里取 $M = N + 1$ (其原因后文给出). 为简化描述,进一步假定 M 为偶数,则有 $l_M = l_N$. 另外,假定已知 $i\Delta t$ 时刻的 \mathbf{P}_w 、 \mathbf{E} 和 $(i + 1/2)\Delta t$ 时刻的 \mathbf{H} , 分别差分式(6)、(7),并引入辅助矢量 Φ_w ^[12], 经过一些计算、整理,多极 Davidson-Cole 媒质的 FDTD 时间步进方案可简述如下:

(1) 计算辅助矢量 Φ_w

$$\Phi_w = (\zeta_{l_M, w})^{-1} \sum_{k=-l_M}^{l_M-1} (\theta_{k, w} \mathbf{E}^{i-l_M+1+k} - \zeta_{k, w} \mathbf{P}_w^{i-l_M+1+k}) \quad (9)$$

其中

$$\theta_{k, w} = \epsilon_0 \Delta\epsilon_w \sum_{n=v}^N \frac{p_n \tau_w^n Q_k^n}{\Delta t^n} \quad (10)$$

$$\zeta_{k, w} = \sum_{m=v}^M \frac{q_m \tau_w^m Q_k^m}{\Delta t^m} \quad (11)$$

这里 $w = 1, 2, \dots, W, k = -l_M, -l_M + 1, \dots, l_M, \nu = \max\{|2|k| - 1, 0\}$.

(2)更新 $(i + 1)\Delta t$ 时刻的电场 \mathbf{E}

$$\mathbf{E}^{i+1} = \frac{\left(\epsilon_0 \epsilon_\infty - \frac{\Delta t \sigma_s}{2}\right) \mathbf{E}^i + \sum_{w=1}^W \mathbf{P}_w^i - \sum_{w=1}^W \mathbf{\Phi}_w + \Delta t \nabla \times \mathbf{H}^{i+\frac{1}{2}}}{\epsilon_0 \epsilon_\infty + \sum_{w=1}^W (\zeta_{l_{M,w}})^{-1} \theta_{l_{M,w}} + \frac{\Delta t \sigma_s}{2}} \quad (12)$$

(3)更新 $(i + 1)\Delta t$ 时刻的电极化强度 \mathbf{P}_w

$$\mathbf{P}_w^{i+1} = \mathbf{\Phi}_w + (\zeta_{l_{M,w}})^{-1} \theta_{l_{M,w}} \mathbf{E}^{i+1} \quad (13)$$

(4)更新 $(i + 3/2)\Delta t$ 时刻的磁场 \mathbf{H}

$$\mathbf{H}^{i+\frac{3}{2}} = \mathbf{H}^{i+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu_r \mu_0} \nabla \times \mathbf{E}^{i+1} \quad (14)$$

该改进方案中,对于每个离散的网格,每个场分量的存储量为 $M(W + 1) + W$,磁场以外的计算时间(乘法运算次数)为 $(2M + 1)W + 3$,当 $W = 1$ 时与文献[7]的结果相同.

总结起来,上述 FDTD 方案的时间步进流程如图 1 所示.

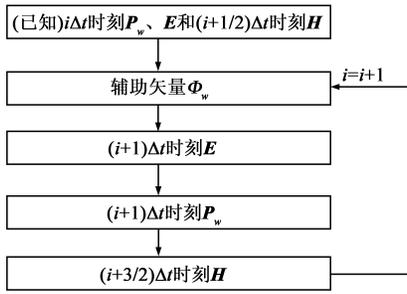


图1 FDTD时间步进流程图

4 结果与讨论

4.1 帕德近似的精度

多极 Davidson-Cole 媒质复相对介电常数的解析值、Padé 近似值可分别通过式(2)、(3)求得,其相对均方(Relative Mean Square, RMS)误差 e 定义为^[7,11]

$$e(\hat{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_r) \triangleq \sqrt{\frac{\int_{f_L}^{f_H} |\hat{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_r|^2 df}{\int_{f_L}^{f_H} |\dot{\epsilon}_r|^2 df}} \quad (15)$$

其中, f_L, f_H 分别表示下、上限频率. 为检验帕德近似的精度,先给出两个算例.

算例 1 以文献[7]中的单极均匀 Davidson-Cole 色散媒质为测试目标,各模型参数分别为, $W = 1, \epsilon_\infty = 2, \sigma_s = 0\text{S/m}, \Delta\epsilon_1 = 48, \tau_1 = 153\text{ps}, \beta_1 = 0.9$. 下、上限频率分别取 $f_L = 1\text{MHz}, f_H = 1\text{THz}$. 分子、分母多项式的阶数分

别取 $N = 1, 2, \dots, 10, M = N, N + 1, N + 2, N + 3$ 时,相对均方误差 e 随 N 的变化关系如图 2 所示(误差轴为对数坐标,下文同).

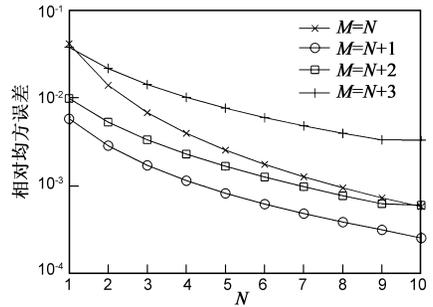


图2 算例1相对均方误差随N的变化关系

可见,图 2 与文献[7]中图 2(a)的结果基本一致:(1) N 相同时, $M = N + 1$ 时误差最小,这也是前文选取该条件的依据;(2)随着 N 的增加,相对均方误差减小,但同时实现 FDTD 方案所需的存储量和计算时间也同时增加,需要折中选择多项式阶数.

当 $N = 3, M = 4$ 时,相对均方误差约为 0.0017,已能满足一般的工程应用需求.此时相对介电常数随频率的变化关系如图 3 所示(频率轴为对数坐标,下同),也与文献[7]图 3(a)的结果基本一致.

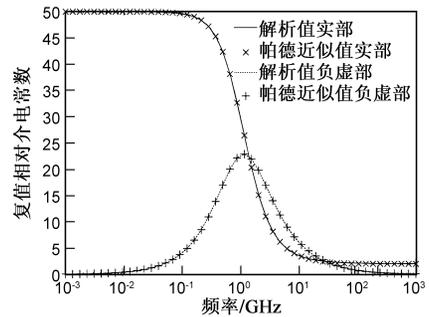


图3 算例1相对介电常数随频率的变化关系

算例 2 选取一种 2 极均匀 Davidson-Cole 色散媒质为测试目标,各模型参数分别为 $W = 2, \epsilon_\infty = 2, \sigma_s = 0.1\text{S/m}, \Delta\epsilon_1 = 48, \Delta\epsilon_2 = 58, \tau_1 = 153\text{ps}, \tau_2 = 253\text{ns}, \beta_1 = 0.9, \beta_2 = 0.8$. 下、上限频率分别取 $f_L = 0.1\text{GHz}, f_H =$

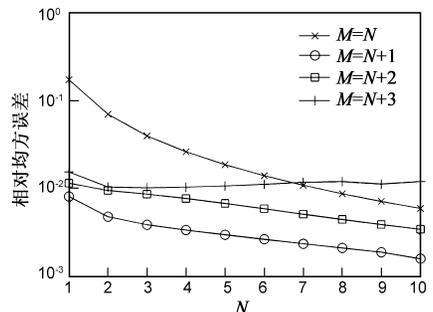


图4 算例2相对均方误差随N的变化关系

10GHz. 多项式的阶数与算例 1 相同, 相对均方误差 e 随 N 的变化关系如图 4 所示.

由图 4 可见: 对于多极 Davidson-Cole 色散媒质, 也有类似于算例 1 (单极情形) 的结果, 只是误差有所增加. 当 $N=3, M=4$ 时, 相对均方误差约为 0.0038, 尚能基本满足一般的工程应用需求 (后文的 FDTD 方案中, 多项式的阶数也默认这组取值). 此时, 复值相对介电常数实部、负虚部的解析值、Padé 近似值随频率的变化关系如图 5 所示.

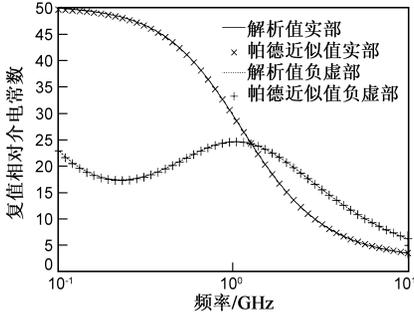


图5 算例2的相对介电常数随频率的变化关系

4.2 FDTD 方案的可行性

前述 FDTD 改进方案可以适用于简单的一维或一般的多维情形. 为不失一般性, 再给出两个算例, 分别处理多极无磁 ($\mu_r = 1$) Davidson-Cole 色散媒质的一维、三维问题.

算例 3 假定 3 极均匀 Davidson-Cole 色散媒质 (各模型参数分别为 $W=3, \epsilon_\infty=2, \sigma_s=0.1\text{S/m}, \Delta\epsilon_1=48, \Delta\epsilon_2=58, \Delta\epsilon_3=680, \tau_1=153\text{ps}, \tau_2=253\text{ns}, \tau_3=353\mu\text{s}, \beta_1=0.9, \beta_2=0.8, \beta_3=0.85$) 充满 $z \geq 0$ 的半空间, 其余空间为真空; 一列入射平面波 (电场沿 x 方向极化) 沿 $+z$ 方向传播, 平面波由下述的超宽带 (Ultra-Wideband, UWB) 调制高斯脉冲源 $s(t)$ 激励产生^[7,11]

$$s(t) = e^{-a^2(t-4/a)^2} \sin(2\pi f_c(t-4/a)) \quad (16)$$

其中, 参数 $a = 1.26 \times 10^{10} \text{s}^{-1}$, 中心频率 $f_c = 6\text{GHz}$, 该脉冲的频谱涵盖 $0.1\text{GHz} \sim 10\text{GHz}$ ^[7,11].

FDTD 离散化的空间、时间步长分别取为 $\Delta z = 1.1\text{mm}, \Delta t = 1.5\text{ps}$, 离散网格数、时间步数分别取为 $n_z = 200, n_t = 3000$. 仿真区域右侧采用最简单的吸收边界条件: $E_x(z_{\max}, t + \Delta t) = E_x(z_{\max} - \Delta z, t)$, 其中 z_{\max} 表示仿真区域右边界位置坐标.

记 $z, z+d$ 分别表示 Davidson-Cole 媒质中两个不同位置, FDTD 仿真并存储这两处的时域电场 $E_x(z, t)$ 和 $E_x(z+d, t)$, 通过傅里叶变换后处理, 获得相应的频域电场 $\dot{E}_x(z, \omega)$ 和 $\dot{E}_x(z+d, \omega)$. 则复相对介电常数的 FDTD 估计值 $\hat{\epsilon}_r$ 为^[7,11]

$$\hat{\epsilon}_r(d, \omega) = -(c_0(\gamma_R + j\gamma_I)/\omega)^2 \quad (17)$$

其中 c_0 为真空光速, 参数 γ_R, γ_I 分别为

$$\gamma_R(d, \omega) = \ln(|\dot{E}_x(z+d, \omega)/\dot{E}_x(z, \omega)|)/d \quad (18)$$

$$\gamma_I(d, \omega) = (\arg\{\dot{E}_x(z+d, \omega)\} - \arg\{\dot{E}_x(z, \omega)\})/d \quad (19)$$

另外, 复值的转移函数的解析值、FDTD 估计值分别为^[7,11]

$$\dot{T}(d, \omega) = e^{-j\omega\sqrt{\epsilon_r}d/c_0} \quad (20)$$

$$\hat{T}(d, \omega) = e^{(\gamma_R + j\gamma_I)d} \quad (21)$$

选取 $d = 20\Delta z$ 时, 对于算例 3, 复值相对介电常数实部、负虚部的 Padé 近似值、FDTD 估计值随频率的变化关系如图 6 所示.

而复值转移函数的解析值、FDTD 估计值随频率的变化关系则如图 7 所示.

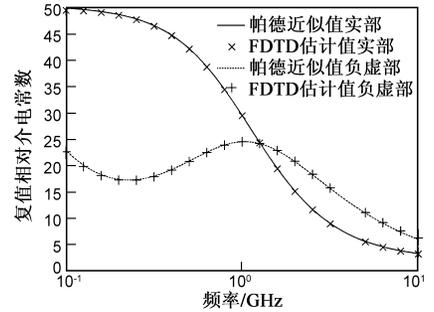


图6 算例3相对介电常数随频率的变化关系

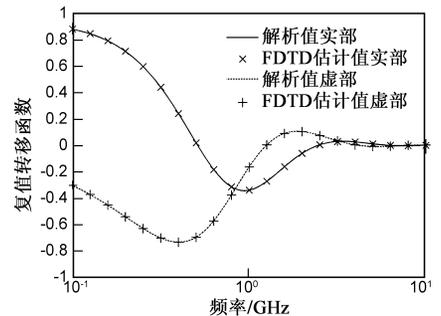


图7 转移函数幅度随频率的变化关系

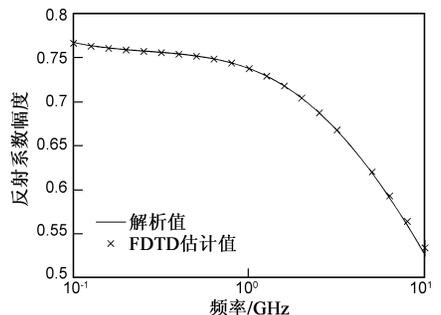


图8 反射系数幅度随频率的变化关系

另外,图 8 还给出了真空、Davidson-Cole 媒质分界面上的(复值)反射系数 Γ 幅度的解析值、FDTD 估计值(具体计算细节详见文献[13,14])随频率的变化关系。

从图 6 ~ 图 8 不难看出:利用 FDTD 改进方案模拟 UWB 平面波在真空、3 极 Davidson-Cole 色散媒质中传播,所获得的相对介电常数、转移函数以及反射系数的估计值与相应的解析值之间的相对均方误差,均在一般的工程应用可以接受的范围之内($< 1\%$)。

算例 4 假定真空中有一半径为 45mm 的 4 极均匀 Davidson-Cole 介质球,各模型参数分别为 $W = 4, \epsilon_\infty = 2, \sigma_s = 0.1\text{S/m}, \Delta\epsilon_1 = 48, \Delta\epsilon_2 = 58, \Delta\epsilon_3 = 680, \Delta\epsilon_4 = 780, \tau_1 = 153\text{ps}, \tau_2 = 253\text{ns}, \tau_3 = 353\mu\text{s}, \tau_4 = 453\text{ms}, \beta_1 = 0.9, \beta_2 = 0.8, \beta_3 = 0.85, \beta_4 = 0.95$, 入射的平面波与算例 3 相同,计算介质球的后向雷达散射截面(Radar Cross Section, RCS)[16]。

空间离散化采用均匀网格,尺寸为 $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 3\text{mm}$,时间步长取 $\Delta t = \Delta/(2 \cdot c_0)$,时间步总数取为 $n_t = 1200$, x, y 或 z 的正、负方向均采用 10 层卷积完全匹配层(Convolutional Perfectly Matched Layer, CPML)吸收边界[16]。

为检验 FDTD 的数值精度,介质球的后向 RCS 的解析值通过米(Mie)级数法获得[16],其 FDTD 计算值、解析值随频率的变化关系的结果对比如图 9 所示。

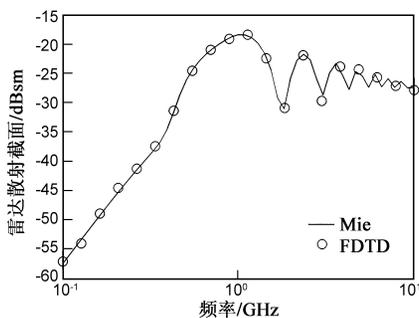


图9 反射系数幅度随频率的变化关系

分析图 9 发现:在超宽带频率范围,FDTD 计算三维均匀 Davidson-Cole 介质球的后向 RCS 所得结果,和解析值相比较,仍然符合较好(引入先进的网格剖分技术有望进一步减小误差[16])。

一维、三维两个算例的结果和分析初步显示:本文发展的 FDTD 方案模拟一般多极 Davidson-Cole 色散媒质中的电波传播是可行的。

5 结语

本文改进了 Rekanos 提出的 FDTD 方案,改进后的方案适用于模拟更一般的 Davidson-Cole 色散媒质中的电波传播,媒质可以是一维或多维的、单极或多极的、无磁或有磁的。几个一维、三维算例结果表明:在

0.1GHz ~ 10GHz 的宽带频谱范围,该方案具有较高的数值精度(相对均方误差 $< 3\%$)。当然,该方案的可行性和鲁棒性还需经历实测媒质参数、噪声等因素的检验,此类问题将另文讨论。

参考文献

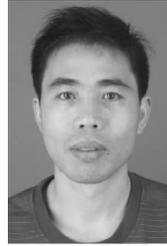
- [1] Davidson D W, Cole R H. Dielectric relaxation in glycerol, propylene glycol, and n-propanol [J]. Journal of Chemical Physics, 1951, 19(12): 1484 - 1490.
- [2] 王禹,袁乃昌.色散媒质中 ADI-FDTD 的 PML[J].电子与信息学报,2005,27(10):1677 - 1680.
Wang Yu, Yuan Naichang. PML implementation for ADI-FDTD in dispersive media[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2005, 27(10): 1677 - 1680. (in Chinese)
- [3] Zhang Y Q, Ge D B. A unified FDTD approach for electromagnetic analysis of dispersive objects[J]. Progress In Electromagnetics Research, 2009, 96: 155 - 172.
- [4] 刘广东,张业荣.二维有耗色散介质的时域逆散射方法[J].物理学报,2010,59(10):6969 - 6979.
Liu Guangdong, Zhang Yerong. Time-domain inverse scattering problem for two-dimensional frequency-dispersive lossy media [J]. Acta Physica Sinica, 2010, 59(10): 6969 - 6979. (in Chinese)
- [5] 刘广东,张业荣.一种处理分层有耗色散介质的时域逆散射方法[J].电子学报,2011,39(12):2856 - 2862.
Liu Guangdong, Zhang Yerong. An approach to the time-domain inverse scattering problem for the stratified frequency-dispersive lossy media[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(12): 2856 - 2862. (in Chinese)
- [6] Ai Xia, Tian Yuan, Cui Zhiwei, et al. A dispersive conformal FDTD technique for accurate modeling electromagnetic scattering of THz waves by inhomogeneous plasma cylinder array[J]. Progress In Electromagnetics Research, 2013, 142: 353 - 368.
- [7] Rekanos I T. FDTD schemes for wave propagation in Davidson-Cole dispersive media using auxiliary differential equations [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(3): 1467 - 1478.
- [8] Lee K H, Ahmed I, Goh R S M, et al. Implementation of the FDTD method based on Lorentz-Drude dispersive model on GPU for plasmonics applications[J]. Progress in Electromagnetics Research, 2011, 116: 441 - 456.
- [9] Shahmansouri A, Rashidian B. GPU implementation of split-field finite difference time domain method for Drude-Lorentz dispersive media[J]. Progress in Electromagnetics Research, 2012, 125: 55 - 77.
- [10] Chun K, Kim H, Kim H, et al. PLRC and ADE implementations of Drude-Critical point dispersive model for the FDTD method[J]. Progress in Electromagnetics Research, 2013, 135:

373 – 390.

- [11] Rekanos I T, Papadopoulos T G. An auxiliary differential equation method for FDTD modeling of wave propagation in Cole-Cole dispersive media[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2010, 58(11):3666 – 3674.
- [12] Rekanos I T, Papadopoulos T G. FDTD modeling of wave propagation in Cole-Cole media with multiple relaxation times [J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2010, 9:67 – 69.
- [13] Rekanos I T. Semi-local approximation of fractional derivatives in FDTD modeling of Cole-Cole media: A questionable approach[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2012, 11:740 – 743.
- [14] Rekanos I T. FDTD modeling of Havriliak-Negami media[J]. IEEE Microwave and Wireless Components Letters, 2012, 22(2):49 – 51.
- [15] Baker G A, Graves-Morris P. Padé Approximants[M]. New York: Cambridge University Press, 1996. 1 – 8.
- [16] 葛德彪, 闫玉波. 电磁波时域有限差分法(第三版)[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2011. 213 – 218.

Ge Debiao, Yan Yubo. Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Waves (3rd ed.) [M]. Xi'an: Xidian University Press, 2011. 213 – 218. (in Chinese)

作者简介



刘广东 男, 1972 年生于江苏灌云. 阜阳师范学院物电学院副教授、工学博士. 研究方向为微波医学成像.

E-mail: liu_guang_dong@126.com



张开银 男, 1973 年生于山东曲阜. 阜阳师范学院物电学院副教授、理学博士. 研究方向为材料物理.

E-mail: z_kaiyin@gmail.com