华北水利水电学院2005年硕士学位研究生招生命题考试

高等代数试题

特别声明：1 考试时间：180分钟（3小时）；满分150分。

2 下文中出现的P表示一般数域；R表示实数域。

3 答案全部答在答题纸上，写在试卷上无效。

一　选择题（每题3分，共18分；每题只有一个正确答案）

1 下列命题不正确的是________________________。

A）　有理数域是最小的数域；

B）　多项式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c\ (a,b,c为整数)$没有有理根，则该多项式在有理数域上一定不可约；

C）n阶实矩阵A 正定的充分必要条件是矩阵A的所有特征值大于零；

D）线性子空间V_1+V_2是直和的充分必要条件是零向量分解式唯一。

2 已知 $\alpha_1=(a_1,a_2,a_3)^T$，$\alpha_2=(b_1,b_2,b_3)^T$，$\alpha_3=(c_1,c_2,c_3)^T$，三条直线$a_ix+b_iy+c_i=0\ (i=1,2,3)$交于一点的充分必要条件为 ____________ .

A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；　　B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；

C)　秩($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$)=秩($\alpha_1,\alpha_2$)；　D)　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\alpha_1,\alpha_2$线性无关.

3 三阶矩阵A特征值为−1, 1, $\frac{1}{3}$，对应的特征向量为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\boldsymbol{P}$ =（$2\alpha_2,\alpha_1,3\alpha_3$），则

$P^{-1}A^{-1}P=$_______________.

A) $\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&9\end{pmatrix}$；　B) $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&3\end{pmatrix}$；　C) $\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$；　D) $\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$.

4 设$A=\begin{pmatrix}a&&\\&a&\\&&a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}a&&\\&a&1\\&&a\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}a&1&\\&a&1\\&&a\end{pmatrix}$.则$A$、$B$与$C$的特征矩阵___________ .

A）　有相同的行列式因子；　B）有相同的初等因子；C）有相同的不变因子；D）以上结论都不正确。

5 已知命题

① 如果数域 $P\subseteq$ 数域 $\overline{P}$，则 $\overline{P}$ 必构成 P 的线性空间；

② 如果数域 $P\subseteq$ 数域 $\overline{P}$，则 P 必构成 $\overline{P}$ 的线性空间；

③ 将复数域视为复数域上的线性空间，则变换 $\boldsymbol{A}x=\overline{x}$ 是线性变换（$\overline{x}$ 是复共轭）；

④ 在线性空间 V 中，变换 $\boldsymbol{A}x=\alpha$ (α 固定向量)是线性变换。

那么四个命题中正确的命题有_______个。

A） 1 B） 2 C） 3 D） 4

6 已知 α 为 n 维列向量，A 为 n 阶矩阵，且秩 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}$ =秩（A），则 ________.

A） $Ax=\alpha$ 必有多解； B） $Ax=\alpha$ 必有唯一解；

C） $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 只有零解； D） $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解。

二 填空题（每题 3 分，共 18 分）

1 四阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的伴随矩阵 A^* 的特征值为 1，2，2，2.则矩阵 A 的主对角线上元素

$a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}=$____________.

2 已知命题

① 二阶矩阵 A 满足 $A^4=0$，则 $A^2=0$；

② n 阶实对称矩阵 A 的所有顺序主子式大于或等于零，则矩阵 A 半正定；

③ 全体正实数 R^+ 对定义的加法 $a\oplus b=ab$ 和数乘 $k\circ a=a^k$ 构成线性空间；

④ n 阶实矩阵 A 可逆的充分必要条件是矩阵 A 可分解为一系列初等矩阵的乘积。

在以上命题中，正确命题的序号是 ______________________ .

3 已知 $A_n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & 1 & \cdots & 1 \\ & & \cdots & \cdots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$. A_{ij} 是行列式 $|A|$ 的代数余子式，则 $\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=$_______.

4 多项式 $g(x)=x^2-1$ 整除 $f(x)$ 的余式为 $x+1$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式$(f(x),g(x))=$ _________ .

5 矩阵$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&3&0\\1&1&3\end{pmatrix}$，则$(A^2-4E)(A+2E)^{-1}=$ ___________________.

6 已知α,β,γ是方程$x^3+px+q=0$ （p, q为常数）的根，则$\begin{vmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\\beta&\gamma&\alpha\\\gamma&\alpha&\beta\end{vmatrix}=$________.

三 **（本题满分 8 分）**设 A，B 为 n 阶矩阵，且 $A+B$，$A-B$ 可逆。证明$D=\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}$可逆，并求$D^{-1}$.

四 **（本题满分 9 分）**设$f(x),g(x)$是非零多项式，$f(x)g(x)+f(x)+g(x)=p(x)$是不可约多项式。证明$(f(x),g(x))=1$.

五 **（本题满分 10 分）** 矩阵 A 为 n 阶实对称矩阵，n 阶矩阵 B，C 满足 $AB=0$， $AC+3C=0$，秩（B）+秩（C）$=n$.求二次型$f(x)=x^TAx$的标准型。

六 **（本题满分** 10 分）设 A 为一个 n 阶复矩阵，$f(\lambda)$是 A 的特征多项式，证明 A 可对角化的充分必要条件是：若a是$f(\lambda)$的k重根，则秩$(aE-A)=n-k$.

七 **（本题满分 10 分）**设$A=(a_{ij})$为 n 阶实矩阵。证明

（1） 如果$|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|(i=1,2,\cdots,n)$，则 $|A|\neq 0$；

（2） 如果$a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|(i=1,2,\cdots,n)$，则 $|A|>0$.

八 **（本题满分 11 分）**设 Q 为有理数域，V 是 Q 上的线性空间，σ 是 V 的线性变换，设$\alpha,\beta,\gamma\in V$，$\alpha\neq 0$，且$\sigma(\alpha)=\beta$，$\sigma(\beta)=\gamma$，$\sigma(\gamma)=\alpha+\beta$. 证明$\alpha,\beta,\gamma$线性无关。

九 **（本题满分 8 分）**在 P^4 中，令

$$W_1=\{x_1-2x_2+2x_4=0,x_1+2x_3=0\},W_2=\{x_1-4x_2-2x_3+4x_4=0\}.$$

求 $W_1+W_2,W_1\cap W_2$ 的维数和一组基。

十 （**本题满分 10 分**）设$V=R^{2\times 2}$，定义 V 上的双线性函数

$$f(A,B)=a_1b_2+a_2b_1-a_3b_4-a_4b_3, \text{其中} A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

（1） 证明 f 是 V 上对称双线性函数；

（2） 求 f 在 V 的基$C_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$下的度量矩阵。

十一 （**本题满分 8 分**）计算 n 阶行列式的值：$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & y & \cdots & y \\ z & z & x & y & \cdots & y \\ z & z & z & x & \cdots & y \\ & & \cdots\cdots & & & \\ z & z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$.

十二 (本题满分 10 分) 欧氏空间 V 的变换 $\mathcal{A}\alpha=\alpha-2(\alpha,\eta)\eta$ （η 是给定的单位向量)。证明

（1） $\mathcal{A}$ 是正交变换（这样的正交变换称为镜面反射），又称对称变换；

（2） $\mathcal{A}$ 是第二类正交变换（在标准正交基下的矩阵 A 的行列式$|A|=$ —1）；

（3） 如果 n 维欧氏空间中，正交变换 $\mathcal{A}$ 以 1 作为一个特征值，且属于特征的子空间 V_1 的维数为 $n-1$，则 $\mathcal{A}$ 是镜面反射。

十三 （**本题满分 11 分**）矩阵 $A\in P^{n\times n}$， $f(x),g(x)\in P[x]$, 且$(f(x),g(x))=1$. x 是 n 维列向量，对于 P^n 的三个子空间

$$V=\{x\in P^n \mid f(A)g(A)x=0\}, V_1=\{x\in P^n \mid f(A)x=0\}, V_2=\{x\in P^n \mid g(A)x=0\}.$$

证明$V=V_1\oplus V_2$， P^n 表示 n 维数域。

十四 （**本题满分 9 分**）n 阶矩阵 A，B 满足：秩（A）+秩（B）＜n.证明方程组 $Ax=0$ 与方程组 $Bx=0$ 必有公共解。