

基于 Hessian 核范数正则化的快速图像复原算法

刘鹏飞¹, 肖 亮^{1,2}

(1. 南京理工大学计算机科学与工程学院, 江苏南京 210094; 2. 江苏省光谱成像与智能感知重点实验室, 江苏南京 210094)

摘 要: 利用 Hessian 核范数进行图像复原是目前较好的高阶正则化方法, 但是由于 Hessian 核范数正则项的高度非线性和不可微性, 图像去模糊和去噪过程耦合度高, 求解算法的复杂度高. 本文利用变量分裂设计了一种具有闭解形式的交替迭代最小化快速图像复原算法, 将图像去模糊、去噪分步进行, 并给出算法的收敛性证明. 实验结果表明, 本文方法不仅在峰值信噪比方面优于原有的基于 Hessian 核范数图像复原的主优化 (Majorization-Minimization, MM) 方法, 而且大大降低了算法的迭代次数和运行时间.

关键词: Hessian 核范数; 图像复原; 交替迭代算法

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2015)10-2001-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.10.018

A Fast Algorithm for Image Restoration Based on Hessian Nuclear Norm Regularization

LIU Peng-fei¹, XIAO Liang^{1,2}

(1. School of Computer Science and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China;

2. Jiangsu Key Laboratory of Spectral Imaging and Intelligent Sensing, Nanjing, Jiangsu 210094, China)

Abstract: Recently, the Hessian Nuclear norm regularization method has been a preferable higher order regularization scheme for image restoration, but with the Hessian Nuclear norm regularization term been highly non-linear and non-differentiable, image deblurring and denoising processes are highly coupled so that their minimization algorithms are with highly computational complexity. In this paper, we employ variable splitting to design a fast alternating iterative minimization algorithm with closed-form solutions for image restoration, in which we separate image restoration into image deblurring and denoising. Furthermore, we show the convergence of our proposed algorithm. Finally, experimental results demonstrate the effectiveness of the proposed method which consists in not only giving the improved performance in terms of peak signal to noise ratio (PSNR), but also exhibiting a much faster convergence rate than the previous majorization-minimization (MM) method for Hessian Nuclear norm regularization based image restoration.

Key words: Hessian Nuclear norm; image restoration; alternating iterative algorithm

1 引言

由于成像系统和传输介质的不完善, 系统成像或传输后的图像常常会受到光学系统模糊和随机噪声的污染, 导致图像质量下降. 作为图像科学中的基础问题, 图像复原即从含模糊和噪声的观测图像中复原出清晰图像, 被广泛应用在医学成像, 天文成像和遥感等领域.

光学系统的退化过程一般建模为:

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{e} \quad (1)$$

其中, \mathbf{g} 为观测图像, $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 表示原始清晰图像, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是图像的定义域, \mathbf{A} 是线性空间不变模糊算子, \mathbf{e} 是

均值为 0 且方差为 σ^2 的高斯白噪声.

图像复原即从含有模糊和噪声的观测图像 \mathbf{g} 中复原出清晰图像 \mathbf{f} , 可以看作是解卷积过程. 由于图像复原问题的不适定性, 需要引入关于图像的先验知识, 从而将图像复原转换成适定问题进行求解, 因而基于图像先验的正则化方法是解决图像复原问题的一种有效方法. 一般而言, 图像复原的变分正则化模型可表示为:

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \int_{\Omega} |\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f}|^2 dx dy + \mu J(\mathbf{f}) \quad (2)$$

其中第一项是保真项, 主要保证复原图像和观测图像的接近程度, 第二项 $J(\mathbf{f})$ 是正则化项, 主要提供图像的先

验知识, $\mu \geq 0$ 是权衡保真项和正则化项之间的正则化参数.

选取合适的图像先验模型是正则化方法的关键. 1992 年, Rudin, Osher 和 Fatemi 等人首次在图像去噪问题中引入了著名的全变差 (total variation, TV) 正则化项^[1], TV 模型具有较好的边缘保持特性, 被广泛应用于图像复原^[2~6], 图像放大^[7]和图像修补^[8]等图像处理任务. 然而, TV 正则化方法倾向于分片常数解, 对纹理和细节的保持效果不好, 而且容易产生阶梯效应. 为了抑制阶梯效应以及改善纹理保持效果, 高阶偏微分方程 (Partial Differential Equation, PDE) 和高阶正则化方法逐渐为很多研究者所关注. 文献[9, 10]提出了基于四阶 PDE 的图像去噪方法, 该方法在去除噪声的同时可以较好地保持图像部分细节, 并且可以有效地抑制阶梯效应, 但是模型及算法相对比较复杂. 2012 年, 文献[11]基于重新解释原始 TV, 提出了一种高阶 TV 正则化方法, 在图像压缩感知和图像去噪等任务中, 二阶 TV 表现较好的重建效果, 减少了重建图像中的阶梯效应和振铃效应. 文献[12]针对图像复原问题, 考虑图像局部像素 Hessian 矩阵的几何结构描述性质, 提出了 Hessian 谱范数和 Frobenius 范数正则化项, 研究表明该模型具有更好的边缘保持和阶梯效应抑制能力, 并且可以更好地保持管状和丝状目标. 文献[13]基于 Hessian 谱范数和 Frobenius 范数正则化图像复原模型, 提出了一种快速投影梯度算法, 提高了模型的求解速度. 2013 年, 文献[14]详细分析了基于图像偏导数正则化项的相关性质, 考虑 Hessian 阵的任意阶 Schatten 范数, 并提出了一类具有凸性, 尺度不变性, 平移不变性和旋转不变性的高阶正则化项, 该类正则化方法可以有效地应用于图像复原, 图像稀疏重建, 图像插值和图像放大等图像反问题中, 与 TV 正则化方法相比, Hessian 谱范数、Hessian Frobenius 范数和 Hessian 核范数正则化方法表现出较好的重建质量, 其中, Hessian 核范数正则化方法在绝大多数情况下表现出最好的复原效果. 但是由于 Hessian 阵 Schatten 范数正则项的不可微性, 图像去模糊和去噪过程耦合度高, 导致求解算法的复杂度高. 虽然文献[14]设计了一种主优化 (Majorization-Minimization, MM) 方法和快速投影梯度方法相结合的模型求解算法, 但是 MM 方法的迭代去卷积过程中每次迭代需要计算 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{f}^{(k)}$, 而线性空间不变模糊算子 \mathbf{A} 的支集一般很大, 从而导致 MM 算法的计算代价高, 同时 MM 算法表现出较慢的收敛速度.

本文在文献[14]的基础上展开研究, 针对基于 Hessian 核范数图像复原模型的 MM 算法计算复杂度高和收敛速度慢的缺点, 研究 Hessian 核范数正则化项的性质, 主要解决基于 Hessian 核范数图像复原模型的快

速求解问题. 首先利用半二次正则化思想和变量分裂方法给出了一种解耦变分模型, 并分析了该模型逼近于原始 Hessian 核范数图像复原模型的模型性质. 然后结合交替方向迭代法提出了一种迭代最小的快速求解算法, 该算法将图像复原问题分解成图像去模糊和图像去噪两个简单子问题分别进行求解, 而每个子问题都具有闭式解析解. 其次, 证明了本文算法的收敛性. 最后, 与文献[14, 15]的对比实验结果表明, 本文算法取得较好的复原效果, 在有效抑制阶梯效应的同时锐化了图像边缘和纹理, 并且本文算法速度较文献[14]算法明显提高.

2 基于 Hessian 核范数正则化的图像复原模型及 MM 算法分析

本节主要研究文献[14]所提出的 Hessian Schatten 范数正则项之间的相关性质, 特别针对 Hessian 核范数正则化图像复原模型及其 MM 算法, 详细分析了 MM 算法的不足之处. 为了便于以下分析, 首先定义 Hessian 算子 \mathbf{H} , 作用于图像 f 的像素点 (x, y) 得到的 Hessian 矩阵, 定义为:

$$\mathbf{H}f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中, $f_{i,j}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial i \partial j}$ 表示图像 f 在像素点 (x, y) 的 2 阶偏导数.

由于每一像素点 (x, y) 的 Hessian 矩阵是对称的, 可使用谱分解定理将 $\mathbf{H}f(x, y)$ 表示为

$$\mathbf{H}f(x, y) = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \lambda_1(x, y) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x, y) \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \quad (4)$$

其中, $\lambda_1(x, y)$ 和 $\lambda_2(x, y)$ 为 $\mathbf{H}f(x, y)$ 的两个特征值, \mathbf{Q} 是由特征值对应的特征向量所构成的正交矩阵, $(\cdot)^T$ 表示转置.

考虑图像每一像素点处 Hessian 阵 $\mathbf{H}f(x, y)$ 的两个特征值 $\lambda_1(x, y)$ 和 $\lambda_2(x, y)$, 我们定义向量 $\boldsymbol{\lambda}(x, y) = (\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y))^T \in \mathbb{R}^2$. 基于 Hessian 阵 $\mathbf{H}f(x, y)$ 的对称性, 文献[14]充分考虑了 $\mathbf{H}f(x, y)$ 的特征值与奇异值之间的性质, 提出了 Hessian 阵 Schatten 范数正则化项, 定义为

$$J_p(f) = \int_{\Omega} \|\mathbf{H}f(x, y)\|_{S_p} dx dy \quad (5)$$

其中, $\|\mathbf{H}f(x, y)\|_{S_p} = \|\boldsymbol{\lambda}(x, y)\|_p$ 表示 Hessian 阵 $\mathbf{H}f(x, y)$ 的 p 阶 Schatten 范数 (简称为 S_p 范数), $\|\cdot\|_p$ 表示向量的 p 范数, $p \geq 1$.

根据定义式(5)知, $J_p(f)$ 是一类凸的, 尺度不变, 平移不变和旋转不变的正则化项. 尤其地, 我们得到如下 3 种特殊的正则化项: 当 $p = 1$ 时, $J_1(f)$ 称为 Hessian 核

范数(S_1 范数)正则化项;当 $p = 2$ 时, $J_2(\mathbf{f})$ 称为 Hessian Frobenius 范数(S_2 范数)正则化项;当 $p = \infty$ 时, $J_\infty(\mathbf{f})$ 称为 Hessian 谱范数(S_∞ 范数)正则化项.

我们可以证明 Hessian 核范数正则化项 $J_1(\mathbf{f})$ 、Hessian Frobenius 范数正则化项 $J_2(\mathbf{f})$ 和 Hessian 谱范数正则化项 $J_\infty(\mathbf{f})$ 三者之间具有如下的不等式关系.

性质 1 $J_\infty(\mathbf{f}) \leq J_2(\mathbf{f}) \leq J_1(\mathbf{f}) \leq \sqrt{2} J_2(\mathbf{f}) \leq 2 J_\infty(\mathbf{f})$.

证明 根据式(5)中的定义及 $\|\mathbf{Hf}(x, y)\|_{s_p} = \|\boldsymbol{\lambda}(x, y)\|_p$, 我们显然有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Hf}(x, y)\|_{s_\infty} &\leq \|\mathbf{Hf}(x, y)\|_{s_2} \\ &\leq \|\mathbf{Hf}(x, y)\|_{s_1} \\ &\leq \sqrt{2} \|\mathbf{Hf}(x, y)\|_{s_2} \\ &\leq 2 \|\mathbf{Hf}(x, y)\|_{s_\infty} \end{aligned}$$

从而性质 1 得证.

基于性质 1 中的不等式关系, 本文主要研究 Hessian 核范数正则化项. 因此, 基于 Hessian 核范数正则化图像复原模型表示为:

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_f \underbrace{\int_{\Omega} |g - \mathbf{A}f|^2 dx dy}_{R(\mathbf{f})} + \mu J_1(\mathbf{f}) \quad (6)$$

针对模型(6), 文献[14]采用了 MM 方法迭代构造 $R(\mathbf{f})$ 的代理能量泛函, 根据 MM 方法的迭代思想, 在第 k 次迭代时的 MM 算法将模型(6)转化成如下优化问题进行求解:

$$\begin{cases} \mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{f}^{(k)} + \beta^{-1} \mathbf{A}^T(\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)}) \\ \mathbf{f}^{(k+1)} = \arg \min_f \beta \int_{\Omega} |f - \mathbf{z}^{(k)}|^2 dx dy + \mu J_1(\mathbf{f}) \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\beta > \|\mathbf{A}^T \mathbf{A}\|$, 上标 (k) 表示迭代次数.

由上可知, MM 算法中计算 $\mathbf{z}^{(k)}$ 的步骤是一种梯度下降求解过程, 每一次迭代值 $\mathbf{z}^{(k)}$ 中都要计算一次 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)}$. 由于线性空间不变模糊算子 \mathbf{A} 的支集一般很大, 因此计算 $\mathbf{z}^{(k)}$ 的代价很高, 从而导致 MM 算法的代价很高, 表现出较慢的收敛速度. 针对这个问题, 本文利用半二次正则化思想, 首先给出 Hessian 核范数正则化图像复原的解耦模型, 进而设计一种快速复原算法.

3 基于 Hessian 核范数正则化图像复原的解耦变分模型及快速算法

3.1 解耦变分模型及模型分析

基于变分模型(6)中 Hessian 核范数正则项的不可微性, 本节将给出变分模型(6)的一个有效解耦变分模型及其模型性质分析. 采用优化中的变量分裂及二次惩罚技巧^[15,16], 首先引入辅助变量 \mathbf{u} 作为原始变量 \mathbf{f} 的近似, 将变量 \mathbf{f} 从 $J_1(\mathbf{f})$ 中分离出来, 其次, 增加一个

二次项对 \mathbf{u} 和 \mathbf{f} 之间的差异进行惩罚, 从而产生如下解耦变分模型作为模型(6)的一个逼近:

$$(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}) = \arg \min_{\mathbf{f}, \mathbf{u}} \left\{ \begin{aligned} R(\mathbf{f}, \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} |g - \mathbf{A}f|^2 dx dy \\ &+ \alpha \int_{\Omega} |f - \mathbf{u}|^2 dx dy \\ &+ \mu J_1(\mathbf{u}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中 $\alpha \gg 0$ 表示一个充分大的惩罚参数.

接下来, 我们考虑模型(8)的离散形式. 在本文中, 为了便于分析, 我们将大小为 $m \times n$ 数字图像表示为大小为 $N = m \times n$ 的向量形式. 同时, 我们假设图像满足周期性边界条件, 使用向前有限差分离散逼近图像的 2 阶偏导数.

现在给出一些算子的离散定义形式, 首先, 定义离散的 Hessian 算子 $\mathbf{H}: \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}^{2 \times 2 \times N}$, 其中 $\mathfrak{R}^{2 \times 2 \times N} = \{ \mathbf{W} = (\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_N) \mid \mathbf{W}_i \in \mathfrak{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}, \forall i = 1, 2, \dots, N \}$, $\mathfrak{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ 表示 2×2 实对称矩阵所构成的集合. 记 $\mathbf{Y} = \mathfrak{R}^{2 \times 2 \times N}$, 对于空间 \mathbf{Y} 上的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{Y}}$ 和范数 $\|\cdot\|_{\mathbf{Y}}$ 定义如下: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^N \text{tr}(\mathbf{p}_i^T \mathbf{q}_i)$ 和 $\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{Y}} = \sqrt{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbf{Y}}}$. $\forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{Y}$, 其中, $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹. 其次, 定义 \mathbf{H} 的共轭算子 $\mathbf{H}^*: \mathbf{Y} \rightarrow \mathfrak{R}^N$ 满足如下性质: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{Hf} \rangle_{\mathbf{Y}} = \langle \mathbf{H}^* \mathbf{p}, \mathbf{f} \rangle_2$, 其中, $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ 表示欧氏空间 \mathfrak{R}^N 上的内积.

基于 $\mathbf{W} = (\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_N) \in \mathbf{Y}$ 的 $l_1 - S_p$ 范数定义为 $\|\mathbf{W}\|_{1,p} = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{W}_i\|_{S_p}$, 从而图像 \mathbf{f} 的 Hessian 核范数正则化项的离散形式可以表示为:

$$J_1(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^N \|(\mathbf{Hf})_i\|_{S_1} = \|\mathbf{Hf}\|_{1,1} \quad (9)$$

因此, 本文解耦变分模型(8)的离散形式表示为:

$$(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}) = \arg \min_{\mathbf{f}, \mathbf{u}} \left\{ \begin{aligned} R(\mathbf{f}, \mathbf{u}) &= \|\mathbf{g} - \mathbf{A}f\|_2^2 \\ &+ \alpha \|\mathbf{f} - \mathbf{u}\|_2^2 \\ &+ \mu \|\mathbf{H}\mathbf{u}\|_{1,1} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中, $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ 表示模糊矩阵, \mathbf{g}, \mathbf{f} 和 $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^N$ 分别表示观测图像, 去模糊图像和最终复原图像.

针对模型(10), 我们有

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{f}, \mathbf{u}} R(\mathbf{f}, \mathbf{u}) \\ = \min_{\mathbf{u}} \{ \min_{\mathbf{f}} \{ \|\mathbf{g} - \mathbf{A}f\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{f} - \mathbf{u}\|_2^2 \} + \mu \|\mathbf{H}\mathbf{u}\|_{1,1} \} \end{aligned} \quad (11)$$

且根据文献[15]的引理 2.1, 我们得到当 $\mathbf{f} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{g} + \alpha \mathbf{u})$ 时, 使得

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{f}} \{ \|\mathbf{g} - \mathbf{A}f\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{f} - \mathbf{u}\|_2^2 \} \\ = \underbrace{(\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{u})^T (\frac{1}{\alpha} \mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{u})}_{J_2(\mathbf{u})} \end{aligned} \quad (12)$$

因此,模型(10)等价于

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \min_{\mathbf{u}} \{ J_{\alpha}(\mathbf{u}) + \mu \|\mathbf{H}\mathbf{u}\|_{1,1} \} \quad (13)$$

显然,当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时,有 $J_{\alpha}(\mathbf{u}) \rightarrow \|\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{u}\|_2^2$,从而本文解耦变分模型(10)的解收敛于原始变分模型(6)的解,验证了本文解耦变分模型的有效性.

针对模型(10)的求解算法问题,本文将采用交替方向迭代法对模型(11)进行分步求解,同时,基于式(9)中 Hessian 核范数正则化项的离散定义形式,便于我们设计如下有效的图像复原算法.

3.2 联合迭代 Wiener 解卷积和快速投影梯度去噪的快速复原算法

针对模型(10),本文将结合交替方向迭代法将模型(10)分解成两个简单问题进行求解,并且每个子问题都具有闭式解析解.即给定任意初始值 $\mathbf{u}^{(0)}$,分别固定 \mathbf{u} 和 \mathbf{f} ,采用交替方向法对模型(10)进行迭代求解,分为如下两个步骤:

(1)去模糊问题(\mathbf{f} -子问题):首先,固定 $\mathbf{u}^{(k-1)}$,求解 $\mathbf{f}^{(k)}$

$$\mathbf{f}^{(k)} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{ \|\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{f} - \mathbf{u}^{(k-1)}\|_2^2 \} \quad (14)$$

(2)去噪问题(\mathbf{u} -子问题):其次,使用步骤(1)求得的 $\mathbf{f}^{(k)}$ 来求解 $\mathbf{u}^{(k)}$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \arg \min_{\mathbf{u}} \{ \alpha \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{u}\|_2^2 + \mu \|\mathbf{H}\mathbf{u}\|_{1,1} \} \quad (15)$$

因此,在模型(10)中,本文算法将图像复原问题分解成图像去模糊和图像去噪两个子问题,即首先计算出去模糊图像 \mathbf{f} ,再利用 Hessian 核范数正则化方法对图像 \mathbf{f} 进行去噪处理,从而得到最终的复原图像 \mathbf{u} .

下面我们针对图像去模糊模型(14)和去噪模型(15),分别给出相应的快速求解算法.

3.2.1 \mathbf{f} -子问题的求解:迭代 Wiener 解卷积

对于模型(14),使得我们求解如下线性方程组:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}) \mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{A}^T \mathbf{g} + \alpha \mathbf{u}^{(k-1)} \quad (16)$$

由于本文假设图像满足周期性边界条件,因此,模糊矩阵 \mathbf{A} 是带循环块的块循环(Block Circulant Circulant Block, BCCB)矩阵,可以被二维离散傅里叶变换矩阵对角化,于是本文使用快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)求解 $\mathbf{f}^{(k)}$,表示为:

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{F}^{-1} \left(\frac{\mathbf{F}(\mathbf{A})^* \circ \mathbf{F}(\mathbf{g}) + \alpha \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(k-1)})}{\mathbf{F}(\mathbf{A})^* \circ \mathbf{F}(\mathbf{A}) + \alpha} \right) \quad (17)$$

其中, $(\cdot)^*$ 表示复共轭, \circ 表示点乘运算符,除法也是逐点除法运算, \mathbf{F} 和 \mathbf{F}^{-1} 分别表示傅里叶变换和逆傅里叶变换算子.

3.2.2 \mathbf{u} -子问题的求解:快速投影梯度去噪

对于模型(15),我们设计一种快速投影梯度算法来求解(15)的最优解.

根据文献[14]的引理1可知,式(9)中的 Hessian 核

范数正则化项可等价表示成:

$$\|\mathbf{H}\mathbf{u}\|_{1,1} = \max_{\omega \in B_{\infty, \infty}} \langle \mathbf{H}\mathbf{u}, \omega \rangle_Y = \max_{\omega \in B_{\infty, \infty}} \langle \mathbf{u}, \mathbf{H}^* \omega \rangle_2 \quad (18)$$

其中, $B_{\infty, \infty} = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \mid \|\omega_i\|_{S_{\infty}} \leq 1, \forall i = 1, \dots, N \}$ 表示 $l_{\infty} - S_{\infty}$ 单位范数球.

因此,使用式(18),我们可将模型(15)转化成如下等价的约束优化问题:

$$\mathbf{u}^{(k)} = \arg \min_{\mathbf{u} \in S} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{u}\|_2^2 + \tau \max_{\omega \in B_{\infty, \infty}} \langle \mathbf{u}, \mathbf{H}^* \omega \rangle_2 \right\} \quad (19)$$

其中, S 是凸集,主要约束图像解的范围, $\tau = \mu/2\alpha$.

令 $L(\mathbf{u}, \omega) = \frac{1}{2} \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{u}\|_2^2 + \tau \langle \mathbf{u}, \mathbf{H}^* \omega \rangle_2$, 由于 $L(\mathbf{u}, \omega)$ 关于 \mathbf{u} 严格凸,关于 ω 严格凹,因此,模型(19)等价于寻找一对鞍点 $(\mathbf{u}^{(k)}, \hat{\omega})$ 求解如下的极小极大化问题:

$$\min_{\mathbf{u} \in S} \max_{\omega \in B_{\infty, \infty}} L(\mathbf{u}, \omega) = L(\mathbf{u}^{(k)}, \hat{\omega}) = \max_{\omega \in B_{\infty, \infty}} \min_{\mathbf{u} \in S} L(\mathbf{u}, \omega) \quad (20)$$

由于 $L(\mathbf{u}, \omega)$ 可等价表示为:

$$L(\mathbf{u}, \omega) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - (\mathbf{f}^{(k)} - \tau \mathbf{H}^* \omega)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{f}^{(k)}\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{f}^{(k)} - \tau \mathbf{H}^* \omega\|_2^2 \quad (21)$$

从而我们求解 $\mathbf{u}^{(k)}$ 表示为:

$$\mathbf{u}^{(k)} = \arg \min_{\mathbf{u} \in S} \{ \max_{\omega \in B_{\infty, \infty}} L(\mathbf{u}, \omega) \} = P_S(\mathbf{f}^{(k)} - \tau \mathbf{H}^* \hat{\omega}) \quad (22)$$

其中, P_S 表示凸集 S 上的正交投影算子, $\hat{\omega}$ 是如下对偶问题的极大值点,表示为:

$$\hat{\omega} = \arg \max_{\omega \in B_{\infty, \infty}} \{ h(\omega) = L(P_S(\mathbf{f}^{(k)} - \tau \mathbf{H}^* \omega), \omega) \} \quad (23)$$

由于原始去噪模型(15)中目标函数是不可微的,而对偶模型(23)中目标函数 $h(\omega)$ 是可微的且具有连续的 Lipschitz 梯度,根据文献[5]可知, $h(\omega)$ 的梯度表示为:

$$\nabla h(\omega) = \tau \mathbf{H} P_S(\mathbf{f}^{(k)} - \tau \mathbf{H}^* \omega) \quad (24)$$

基于以上分析,我们知模型(23)可以通过梯度上升法来求解.为了提高算法的收敛速度,本文使用 Nesterov 迭代算法^[17]来求解模型(23).同时,使用 $l_{\infty} - S_{\infty}$ 单位范数球 $B_{\infty, \infty}$ 上的正交投影算子 $P_{B_{\infty, \infty}}$ 获得模型(23)的最优解 $\hat{\omega}$. 对于 $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \in Y$, 我们得到 $P_{B_{\infty, \infty}}(\omega) = [P_{B_{S_{\infty}}}(\omega_1), P_{B_{S_{\infty}}}(\omega_2), \dots, P_{B_{S_{\infty}}}(\omega_N)]$, 即使用正交投影算子 $P_{B_{S_{\infty}}}$ 将 ω 中的每一个子矩阵 $\omega_i \in \mathfrak{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}, i = 1, 2, \dots, N$ 投影到 S_{∞} 单位范数球 $B_{S_{\infty}} = \{ \mathbf{v} \in \mathfrak{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2} \mid \|\mathbf{v}\|_{S_{\infty}} \leq 1 \}$. 其中,正交投影 $P_{B_{S_{\infty}}}(\omega_i)$ 的具体操作步骤如下:

(1)对每一个矩阵 $\omega_i \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ 进行奇异值分解,表示为

$$\omega_i = \mathbf{U}_i \boldsymbol{\Sigma}_i \mathbf{V}_i^H, \text{其中 } \boldsymbol{\Sigma}_i = \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}(\omega_i)) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1(\omega_i) & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}_2(\omega_i) \end{bmatrix}$$

和 $\boldsymbol{\sigma}(\omega_i) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1(\omega_i) \\ \boldsymbol{\sigma}_2(\omega_i) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\sigma}_1(\omega_i)$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_2(\omega_i)$ 是 ω_i 的两个奇异值, $(\cdot)^H$ 表示共轭转置;

(2)将向量 $\boldsymbol{\sigma}(\omega_i)$ 正交投影到 l_∞ 单位范数球 $B_\infty = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{w}\|_\infty \leq 1\}$,记为 $P_{B_\infty}(\boldsymbol{\sigma}(\omega_i)) = \min\{\boldsymbol{\sigma}(\omega_i), \mathbf{1}\}$,其中 $\mathbf{1} = (1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$;

$$(3) P_{B_\infty}(\omega_i) = \mathbf{U}_i \text{diag}(P_{B_\infty}(\boldsymbol{\sigma}(\omega_i))) \mathbf{V}_i^H.$$

综上所述,首先计算对偶模型(23)的解 $\hat{\omega}$,其次使用式(22)即可求得原始去噪模型(15)的最优解 $\mathbf{u}^{(k)}$.

从而,针对 Hessian 核范数正则化图像复原问题,本文设计的联合迭代 Wiener 解卷积和快速投影梯度去噪 (Iterative Wiener Deconvolution and Fast Projected Gradient Denoising, IWDFPG) 的快速复原算法如算法 1 所列.

算法 1 IWDFPG 快速复原算法

步骤 1:输入

$\mathbf{g}, \mathbf{A}, \mathbf{H}, \alpha, \mu > 0, \tau = \mu/2\alpha, \gamma > \|\mathbf{H}^* \mathbf{H}\|, \varepsilon > 0, \text{Maxiter}$. 设置 $k = 1$ 和 $m = 1$,初始化 $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{v}^{(1)} = \boldsymbol{\omega}^{(0)} = \mathbf{0}, t_1 = 1$.

步骤 2:计算 $\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{F}^{-1} \left(\frac{\mathbf{F}(\mathbf{A})^* \circ \mathbf{F}(\mathbf{g}) + \alpha \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(k-1)})}{\mathbf{F}(\mathbf{A})^* \circ \mathbf{F}(\mathbf{A}) + \alpha} \right)$.

步骤 3:使用快速投影梯度算法^[5]计算 $\mathbf{u}^{(k)}$:

while $m < \text{Maxiter do}$

$$\boldsymbol{\omega}^{(m)} \leftarrow P_{B_{\infty, \infty}}(\mathbf{v}^{(m)} + \frac{1}{\tau\gamma} \mathbf{H} P_S(\mathbf{f}^{(k)} - \tau \mathbf{H}^* \mathbf{v}^{(m)}));$$

$$t_{m+1} \leftarrow \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_m^2}}{2};$$

$$\mathbf{v}^{(m+1)} \leftarrow \boldsymbol{\omega}^{(m)} + \frac{t_m - 1}{t_{m+1}} (\boldsymbol{\omega}^{(m)} - \boldsymbol{\omega}^{(m-1)});$$

end do

$$\text{计算 } \mathbf{u}^{(k)} = P_S(\mathbf{f}^{(k)} - \tau \mathbf{H}^* \hat{\omega}).$$

步骤 4:若 $\frac{\|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}\|_2}{\|\mathbf{u}^{(k+1)}\|_2} < \varepsilon$,结束算法. 否则,令 $k = k + 1$ 算法转至步骤 2.

步骤 5:输出 $\hat{\mathbf{u}}$:模型(10)的最优解.

3.3 算法收敛性分析

本节我们将给出本文 IWDFPG 算法的收敛性结论. 为便于分析,我们引入以下定义. 定义算子 $S_i: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ 和 $h_p: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. 根据式(14)、(15),记算法 1 产生的序列 $\{\mathbf{f}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}\}$ 分别为 $\mathbf{f}^{(k)} = S_i(\mathbf{u}^{(k-1)}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{g} + \alpha \mathbf{u}^{(k-1)})$ 和 $\mathbf{u}^{(k)} = h_p(\mathbf{f}^{(k)})$,因此,定义合成算子 $T(\cdot) \triangleq h_p(S_i(\cdot))$,我们可得 $\mathbf{u}^{(k)} = h_p(S_i(\mathbf{u}^{(k-1)})) = T(\mathbf{u}^{(k-1)})$. 对于任意的初始点 $\mathbf{u}^{(0)}$,下证 $\{\mathbf{u}^{(k)}\}$ 收敛于 $\hat{\mathbf{u}}$.

首先,根据文献[16]的引理 1 和引理 2,算子 S_i 和 h_p 是非扩张的,算子 T 也是非扩张的. 其次,由于优化问题

(10)中的目标函数严格凸、下半连续以及强制,它存在唯一最小解. 设 $\hat{\mathbf{u}}$ 是 T 的任一不动点,所以 $\hat{\mathbf{u}} = T(\hat{\mathbf{u}})$. 同时,根据文献[4]中的定理 3.4,由算子 T 的非扩张性,我们可得序列 $\{\mathbf{u}^{(k)}\}$ 落在一个紧区域内,因此至少存在一个极限点 $\hat{\mathbf{u}}$,使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{(k_j)} = \hat{\mathbf{u}}$,又 $\|\mathbf{u}^{(k)} - \hat{\mathbf{u}}\|_2 = \|T(\mathbf{u}^{(k-1)}) - T(\hat{\mathbf{u}})\|_2 \leq \|\mathbf{u}^{(k-1)} - \hat{\mathbf{u}}\|_2$,所以,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}^{(k)} - \hat{\mathbf{u}}\|_2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}^{(k_j)} - \hat{\mathbf{u}}\|_2 = \|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}\|_2 \quad (25)$$

同时,由 T 的连续性,我们有 $T(\hat{\mathbf{u}}) = \lim_{j \rightarrow \infty} T(\mathbf{u}^{(k_j)}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{(k_j+1)} = \hat{\mathbf{u}}$,即得 $T(\hat{\mathbf{u}})$ 也是序列 $\{\mathbf{u}^{(k)}\}$ 的一个极限点,且 $\hat{\mathbf{u}}$ 是 T 的不动点. 由不动点 $\hat{\mathbf{u}}$ 的任意性,取 $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}$,代入式(25)中,得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}^{(k)} - \hat{\mathbf{u}}\|_2 = 0$,即 $\{\mathbf{u}^{(k)}\}$ 收敛于 $\hat{\mathbf{u}}$.

综上所述,对于任意给定的初始点 $\mathbf{u}^{(0)}$,算法 1 产生的序列 $\{\mathbf{u}^{(k)}\}$ 收敛于模型(10)的解.

4 数值实验与分析

在本节中,我们采用仿真实验测试本文快速复原算法 IWDFPG 对于图像复原问题的性能. 对于本文提出的基于 Hessian 核范数正则化的快速图像复原算法 IWDFPG(简记为 HS1-IWDFPG),将其与文献[14]中相应的基于 MM 算法的 Hessian 核范数正则化方法(简记为 HS1-MM^[14])和文献[15]中的快速 TV 正则化方法(简记为 Fast TV^[15])进行比较.

本文采用峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 作为衡量图像复原效果的评价指标,量化说明各算法的性能,定义为:

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\max_{i,j} |f_0(i,j) - \hat{f}(i,j)|^2}{\frac{1}{mn} \|\mathbf{f}_0 - \hat{\mathbf{f}}\|_F^2} \right) \quad (26)$$

其中, \mathbf{f}_0 和 $\hat{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 分别表示原始图像和复原图像, $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数.

4.1 实验设置

本文实验图像如图 1 所示,我们均将图像的灰度值范围转化至 $[0, 1]$. 在实验中,我们使用 3 种模糊核来产



图 1 实验图像:Barbara, Boat, Cell, Lena和Peppers

生模糊图像,分别是大小为 7×7 和标准差为 4 的高斯模糊核,大小为 9×9 的均值模糊核,大小为 19×19 的运动模糊核.最后,我们加入标准差为 0.001 的零均值高斯白噪声来产生最终的退化图像.

为保证各算法之间比较的公平性,实验中,我们均将图像的灰度值范围限制在 $S = \{f \in \mathbb{R}^N \mid f_i \in [0, 1], \forall i = 1, \dots, N\}$.其次,对于每一种正则化复原算法,算法的终止条件均设置为 $\|f^{(k+1)} - f^{(k)}\|_2 / \|f^{(k+1)}\|_2 < 1 \times 10^{-4}$,对于正则化参数的选取,常用的方法有经验法, L 曲线法和交叉验证法,本文中我们使用经验法,即选择正则化参数使得该正则化方法取得最好的图像峰值信噪比.因此,在本文算法中,我们设置算法终止条件参数 $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$,其中,快速投影梯度去噪算法中的最大迭代次数 $\text{Maxiter} = 10$.

实验采用的计算机硬件环境为 Intel Xeon CPU 2.67GHz,内存 4GB,软件环境为 Microsoft Windows 7、MATLAB 7.10.

4.2 实验结果比较与分析

本节详细给出了各算法对测试图像在不同退化条件下复原结果的分析 and 比较.表 1 列出了各算法对测试图像进行复原得到的客观评价指标 PSNR 值,及算法的迭代次数 (Iteration) 和运行时间 (Time).从表 1 中,我们看到本文 HSI-IWDFPG 算法得到复原图像的 PSNR 总是最大的,明显优于 Fast TV^[15] 和 HSI-MM^[14] 算法的复原效果,而 Fast TV^[15] 算法总是表现最差的图像 PSNR.其次,本文 HSI-IWDFPG 算法仅需最少的迭代次数即能获得最大的图像 PSNR,而 HSI-MM^[14] 算法则需要最多的迭代次数并且需要最多的运行时间,其迭代次数是

HSI-IWDFPG 算法的 4 ~ 8 倍之多,而算法运行时间是 HSI-IWDFPG 算法的 6 ~ 9 倍之多,计算代价最大,尽管 Fast TV^[15] 算法表现出最差的图像 PSNR,但是其仅需最少的运行时间.对于正则化图像复原问题来说,多花费些算法运行时间而获得一个相对较好的图像 PSNR 是有意义的,进而充分表明了本文 HSI-IWDFPG 快速复原算法的高效性.

为了从视觉上更直观地感受各算法的复原效果,图 2-3(a) 分别显示了经均值模糊和高斯噪声退化的 Cell 图像,经运动模糊和高斯噪声退化的 Boat 图像;图 2-3(b) ~ (d) 分别显示了经 Fast TV^[15], HSI-MM^[14] 及本文 HSI-IWDFPG 算法得到的复原图像.如图 2(b) ~ (d) 所示, Fast TV^[15] 算法虽然能保持 Cell 图像中的边缘,但是在图像的平滑区域产生了阶梯效应,对 Cell 图像中丝状结构和纹理的保持效果不好,而本文 HSI-IWDFPG 算法与 HSI-MM^[14] 算法均能较好地保持 Cell 图像中的丝状结构和边缘,同时可以有效地抑制阶梯效应,其中,本文算法表现出更好的丝状结构和边缘保持能力.同时,如图 3(b) ~ (d) 所示, Fast TV^[15] 算法能较好地保持 Boat 图像中的边缘,但是在 Boat 图像的“天空”和“草地”等区域产生了严重的阶梯效应,图像中的线状和杆状特征不能得到有效保持, HSI-MM^[14] 算法可以有效地抑制阶梯效应,同时可较好地保持线状和杆状特征,但是在背景和平坦区域仍然残留一些噪声,而本文 HSI-IWDFPG 算法有效地消除了噪声,抑制了阶梯效应,较好地保持线状和杆状特征,同时更好地保持边缘锐利和纹理细节清晰,充分展示了本文算法的视觉复原效果,再次证明本文算法对图像复原问题的有效性.

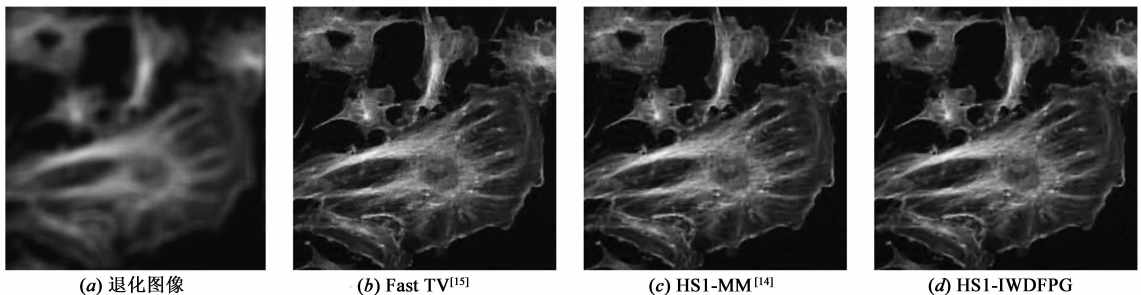


图2 各算法对Cell图像在均值模糊情况下的复原结果比较

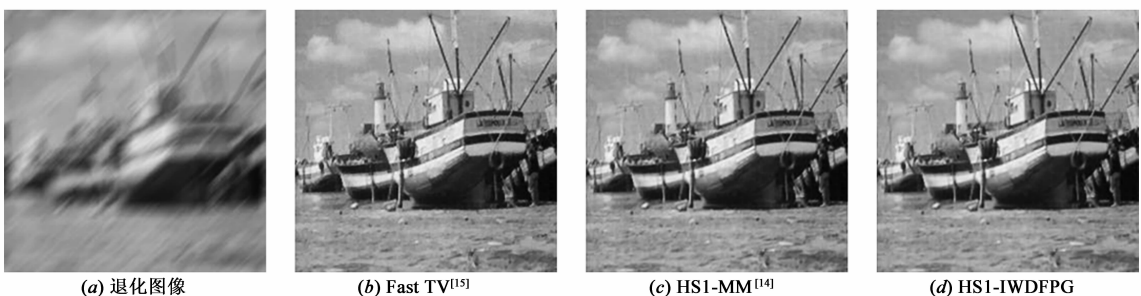


图3 各算法对Boat图像在运动模糊情况下的复原结果比较

表 1 各算法的 PSNR(dB),迭代次数 Iteration 和运行时间 Time(s)结果比较

模糊核类型	高斯模糊			均值模糊			运动模糊		
	PSNR	Iteration	Time	PSNR	Iteration	Time	PSNR	Iteration	Time
Barbara									
退化图像	24.08			22.57			20.06		
Fast TV ^[15]	31.12	93	3.57	30.60	105	3.96	31.74	97	3.85
HS1-MM ^[14]	31.25	261	60.56	30.69	286	66.53	31.78	318	73.23
HS1-IWDFPG	31.33	40	8.78	30.81	48	9.75	31.91	70	12.76
Boat									
退化图像	24.17			22.72			20.56		
Fast TV ^[15]	34.06	94	3.85	32.96	105	4.01	33.77	105	4.37
HS1-MM ^[14]	34.85	239	54.83	33.52	264	61.25	34.46	304	71.62
HS1-IWDFPG	34.92	47	9.84	33.64	51	10.34	34.66	65	12.25
Cell									
退化图像	25.84			24.40			22.41		
Fast TV ^[15]	33.25	116	3.98	32.27	141	4.95	33.52	114	3.79
HS1-MM ^[14]	33.69	309	58.33	32.52	358	67.53	34.01	360	67.56
HS1-IWDFPG	33.72	59	10.42	32.71	87	12.79	34.04	57	8.97
Lena									
退化图像	23.37			21.81			19.72		
Fast TV ^[15]	32.01	105	4.65	31.35	117	4.84	33.25	105	4.10
HS1-MM ^[14]	32.21	287	68.38	31.46	321	74.24	33.58	314	72.93
HS1-IWDFPG	32.55	37	8.00	31.87	46	9.25	33.95	68	12.43
Peppers									
退化图像	23.49			21.67			18.72		
Fast TV ^[15]	34.42	100	3.95	33.41	117	4.62	34.58	111	4.60
HS1-MM ^[14]	34.63	244	58.48	33.65	285	66.24	34.59	318	75.86
HS1-IWDFPG	34.71	37	8.52	33.87	50	10.55	34.88	63	12.90

为了更明显地体现本文 HS1-IWDFPG 算法与 Fast TV^[15], HS1-MM^[14]算法之间的收敛性差异,图 4 分别显示了各算法对 Lena 图像在高斯模糊情况下的图像 PSNR 和相对偏差(relative difference,本文使用的计算公式为 $\frac{\|f^{(k+1)} - f^{(k)}\|_2}{\|f^{(k+1)}\|_2}$)与迭代次数之间的变化关系图.如图 4(a)所示,本文 HS1-IWDFPG 算法仅需最少的迭代次数即可得到最大的图像 PSNR,而 HS1-MM^[14]算法得到的图像 PSNR 不仅小于 HS1-IWDFPG 算法的 PSNR,而且其所需的迭代次数是 HS1-IWDFPG 算法的 8 倍左右,计算代价太大.同时,如图 4(b)所示,我们可以看出,本文 HS1-IWDFPG 算法与 Fast TV^[15], HS1-MM^[14]算法相比,HS1-IWDFPG 算法的收敛速度最快,仅需最少的迭代次数就能达到收敛,而 HS1-MM^[14]算法的收敛速度最慢,进一步说明了本文 HS1-IWDFPG 算法的高效性.

5 结论

本文针对 Hessian 核范数正则化图像复原问题,利用半二次正则化思想,以及变量分裂和线性空间不变模糊算子的结构性,提出了一种交替迭代最小的快速复原算法.该算法将图像复原问题分解成去模糊、去噪

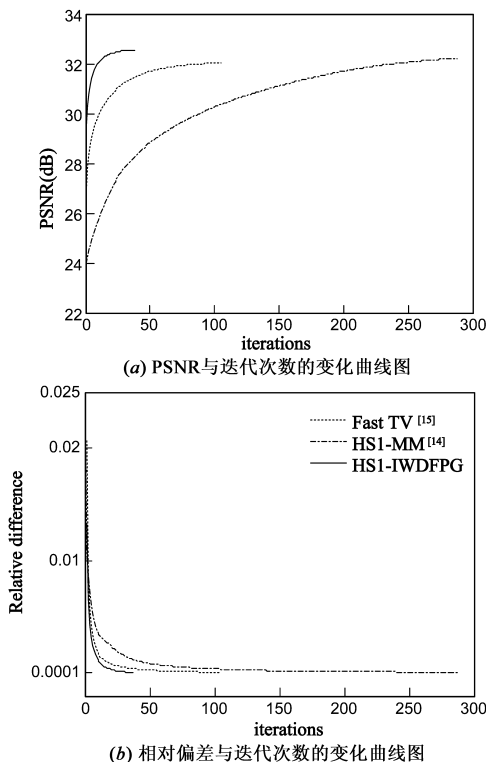


图4 各算法对Lena图像在高斯模糊情况下的曲线图

问题进行分步求解,其中,去模糊问题采用迭代 Wiener 解卷积进行求解,而去噪问题采用快速投影梯度算法进行求解.其次,给出了本文算法的收敛性分析.与 Fast TV 正则化方法和最新的 HSI-MM 方法相比,本文 HSI-IWDFPG 算法在峰值信噪比方面取得更好的效果,减少了复原图像中的阶梯效应,锐化了图像边缘和纹理.同时,相比于 HSI-MM 方法,本文算法降低了算法复杂度,减少了算法的迭代次数和运行时间.实验结果验证了本文算法的有效性.

参考文献

- [1] L Rudin, S Osher, E Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. *Physica D*, 1992, 60(1-4): 259 - 268.
- [2] Y Wang, J Yang, W Yin, Y Zhang. A new alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction [J]. *SIAM Journal on Imaging Science*, 2008, 1(3): 248 - 272.
- [3] 张航, 罗大庸. 一种改进的全变差盲图像复原方法 [J]. *电子学报*, 2005, 33(7): 1288 - 1290.
Zhang Hang, Luo Da-yong. A modified method for total variation blind image restoration [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2005, 33(7): 1288 - 1290. (in Chinese)
- [4] 卢成武, 宋国乡. 带曲波域约束的全变差正则化抑噪方法 [J]. *电子学报*, 2008, 36(4): 646 - 649.
Lu Cheng-wu, Song Guo-xiang. Total variation regularization denoising method with constraint on curvelet-domain [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2008, 36(4): 646 - 649. (in Chinese)
- [5] A Beck, M Teboulle. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, 18(11): 2419 - 2434.
- [6] 王静, 吕科, 何宁, 王茜. 基于分裂 Bregman 方法的全变差图像去模糊 [J]. *电子学报*, 2012, 40(8): 1503 - 1508.
Wang Jing, Lv Ke, He Ning, Wang Qian. Total variation image deblurring based on split Bregman method [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2012, 40(8): 1503 - 1508. (in Chinese)
- [7] A Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, 20(1): 89 - 97.
- [8] T F Chan, J Shen. Mathematical models for local nontexture inpainting [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2002, 62(3): 1019 - 1043.
- [9] Y You, M Kaveh. Fourth-order partial differential equations for noise removal [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, 9(10): 1723 - 1730.

- [10] M Lysaker, A Lundervold, X C Tai. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003, 12(12): 1579 - 1590.
- [11] Yue Hu, Mathews Jacob. Higher degree total variation (HDTV) regularization for image recovery [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, 21(5): 2559 - 2571.
- [12] S Lefkimmiatis, A Bourquard, M Unser. Hessian-based norm regularization for image restoration with biomedical applications [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, 21(3): 983 - 995.
- [13] S Lefkimmiatis, M Unser. A projected gradient algorithm for image restoration under Hessian matrix-norm regularization [A]. *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing [C]*. Orlando, FL: IEEE, 2012. 3029 - 3032.
- [14] S Lefkimmiatis, J Ward, M Unser. Hessian Schatten-norm regularization for linear inverse problems [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2013, 22(5): 1873 - 1888.
- [15] Y M Huang, M K Ng, Y W Wen. A fast total variation minimization method for image restoration [J]. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 2008, 7(2): 774 - 795.
- [16] Lv Xiao-guang, Song Yong-zhong, Wang Shun-xu, Le Jiang. Image restoration with a high-order total variation minimization method [J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2013, 37(16-17): 8210 - 8224.
- [17] Y Nesterov. A method for solving a convex programming problem with convergence rates $O(1/k^2)$ [J]. *Soviet Mathematics Doklady*, 1983, 27(2): 372 - 376.

作者简介



刘鹏飞 男, 1990 年出生于安徽安庆, 南京理工大学计算机科学与工程学院博士生, 研究方向为图像去噪、图像恢复、压缩感知。
E-mail: liupengfei199091@163.com



肖亮(通信作者) 男, 1976 年出生于湖南长沙, 南京理工大学计算机科学与工程学院教授、博士生导师, 主要研究领域为图像处理反问题、稀疏表示与压缩感知、计算机视觉。
E-mail: xiaoliang@mail.njust.edu.cn