基于生成树集结算子的群组 AHP 判断矩阵集结算法

鲁智勇[1],安成锦[2],焦 波[1],毕建权[1],庞训龙[1]
(1.中国洛阳电子装备试验中心,河南洛阳 471003;2.国防科技大学电子科学与工程学院,湖南长沙 410073)

摘 要: 针对现有群组 AHP(Analytic Hierarchy Process)判断矩阵集结算法,偏重于专家权重的选择,而忽略判断矩阵元素之间联系的不足,提出一种基于生成树集结算子的群组 AHP 判断矩阵集结算法.该算法依据判断矩阵与简单无向图生成树之间的关系,采用生成树集结算子获取完全一致集结矩阵,并利用完全一致集结矩阵和群组关联集结矩阵,综合考虑判断矩阵元素之间的个体一致性和群组关联性,计算获得满足一致性约束和最优相似性的群组集结结果.通过算例分析,说明该算法的可行性与有效性.

关键词: 群组集结;层次分析法;判断矩阵;生成树
中图分类号: TP309 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2015)12-2449-06
电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.12.015

An Aggregation Algorithm for Group AHP Judgment Matrices Based on the Collective Operator of Spanning Trees

LU Zhi-yong[1], AN Cheng-jin[2], JIAO Bo[1], BI Jian-quan[1], PANG Xun-long[1]
(1. *LEETC*, *Luoyang*, *Henan* 471003, *China*;
2. *College of Electronic Science and Engineering*, *National University of Defense Technology*, *Changsha*, *Hunan* 410073, *China*)

Abstract: The existing group aggregation algorithms based on AHP(Analytic Hierarchy Process) judgment matrices pay more attentions on the determination of the weights of experts, and neglect the relationships among the values of judgment matrices. Therefore, a new aggregation algorithm based on the collective operator of spanning trees is proposed in this paper. The algorithm obtains complete consistency collective matrix using collective operator of spanning trees and the relationship between a judgment matrix and a spanning tree of a simple undirected graph. In the algorithm, a complete consistency collective matrix and a group incidence matrix, which represent the individual consistency and group incidence of the values of judgment matrices, are used to compute group collective result under the restraints of consistency and similarity. Finally, a numerical example shows that the method is feasible and effective.

Key words: group aggregation; analytical hierarchy process; judgment matrix; spanning tree

1 引言

层次分析法[1~3]作为多目标多因素决策的有效方法,而被广泛应用.为了使决策具有广泛的代表性,提高决策的有效性和准确性,一个复杂的系统通常需要由多个专家参与决策,通过对专家给出的判断矩阵进行集结,最终获得一个合理的决策.因此,群组决策中 AHP 判断矩阵的集结问题,成为 AHP 理论研究和应用中需要解决的一项重要问题.

目前,WA(Weighted Average)[4]和 OWA(Ordered Weighted Average)系列[5~7]集结算子,是群组 AHP 判断矩阵集结的常用工具.WA 算子要求给定专家的常权值,OWA 允许根据决策者偏好,自适应选择专家权值.专家权值的计算方法,是 OWA 算子理论研究及其应用的关键.Gong[6]提出一种改进的 OWA 算子,其采用线性规划和二次规划模型,在给定 orness 度的前提下,计算具有最小分散度的专家权值.Merigo[7]给出了大量 OWA 算子的通用框架,其通过参数变更,可以在同一公式框架下,获得多种 OWA 算子.然而,WA 和 OWA 系列算子未深入考虑判断矩阵元素之间的联系.吕跃进[8]采用等

收稿日期:2014-01-16;修回日期:2014-05-05;责任编辑:梅志强
基金项目:国家自然科学基金(No.61101073,No.61301236,No.61303061)

级偏差矩阵,衡量群组判断矩阵中同一元素之间的差异性,将等级偏差矩阵中元素(差异度值)按从小到大的顺序排列,依次将差异度值对应的边,添加至判断矩阵对应的简单无向图(初始状态为孤立节点集),最终获得简单无环图(生成树),并由生成树拓展为完全一致集结矩阵,但该方法未考虑个体判断矩阵元素之间的一致性联系,并且忽略了群组判断矩阵中差异度值较大的元素对集结结果的影响.周漩[9]采用一致性衡量个体判断矩阵元素之间的联系,并将一致性作为专家权值计算的一项指标,但该方法采用群组判断矩阵对应的特征向量进行集结,弱化了不同判断矩阵元素之间的关联性对集结结果的影响.因此,本文提出了一种基于生成树集结算子的群组 AHP 判断矩阵集结算法.该算法采用完全一致集结矩阵和群组关联集结矩阵,表现判断矩阵元素之间的个体一致性和群组关联性,能够更有效地利用判断矩阵元素之间的信息.

2 正互反与模糊互补判断矩阵以及相应的生成树

定义 1[10] 设判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,若矩阵元素满足以下条件:$a_{ij}>0$, $a_{ii}=1$, $a_{ij}=1/a_{ji}$; $i,j=1,2,\cdots,n$,则称 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为正互反判断矩阵.若该矩阵满足完全一致性,则具有以下特征:$a_{ij}=a_{ik}/a_{jk}(i,j,k=1,2,\cdots,n)$.

定义 2[10] 设判断矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$,若矩阵元素满足以下条件:$0\leqslant p_{ij}\leqslant 1$, $p_{ii}=0.5$, $p_{ij}+p_{ji}=1$; $i,j=1,2,\cdots,n$,则称 $P=(p_{ij})_{n\times n}$为模糊互补判断矩阵.若该矩阵满足完全一致性,则具有以下特征:$p_{ik}=p_{ij}+p_{jk}-0.5(i,j,k=1,2,\cdots,n)$.

AHP 判断矩阵包含正互反和模糊互补两种表现形式[10],其中正互反判断矩阵采用 Saaty 的 1~9 标度,进行知识表达;模糊互补判断矩阵将元素的取值范围限定在[0,1],并具有更好的连续性.正互反和模糊互补两种表达形式,可以相互转换[10]:

$$p_{ij}=(1+\log_9 a_{ij})/2,\ a_{ij}=9^{2p_{ij}-1} \tag{1}$$

定理 1[8] 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为任意正互反判断矩阵,则:

(1)从 A 中任选满足以下条件的 $n-1$ 个元素,这 $n-1$ 个元素中的任意一个元素,都不能由其它 $n-2$ 个元素(依据完全一致性约束)导出,则,由这 $n-1$ 个元素就能构造出一个完全一致的矩阵;

(2)满足上述条件的 $n-1$ 个元素,与不含回路的连通无向简单图 $G^*=(V^*,E^*)$一一对应,其中顶点和边的对应关系如下:

①元素 a_{ij}的下标 i,j 分别对应于图 G^* 中两个顶点;

②元素 a_{ij}对应于图 G^* 中两个顶点 i,j 之间的边 (i,j).

Saaty 的 1~9 标度,使得正互反判断矩阵更适合于专家知识的表述.但是,模糊互补判断矩阵的有界性和连续性,使之更适合于算法流程的设计.因此,本文将正互反判断矩阵,全部转化为模糊互补判断矩阵,并在模糊互补判断矩阵的基础上,进行群组集结.

3 生成树集结算子

将正互反判断矩阵与简单无向图之间的对应关系,推广至模糊互补判断矩阵.

定理 2 设 $P=(p_{ij})_{n\times n}$为任意模糊互补判断矩阵,则:

(1)存在唯一简单赋权图 $G=(V,E)$与之对应,其中顶点集 $V=\{1,2,\cdots,n\}$,边集 $E=\{(i,j)\mid i<j;i,j=1,2,\cdots,n\}$,且任意 $e=(i,j)\in E$ 的权值 $w(e)=p_{ij}$;

(2)若 P 满足完全一致性约束,则对任意 $i<j$,边权 $p_{ij}=\sum_{t=0}^{j-i-1}p_{i+t,i+t+1}-0.5(j-i-1)$;

(3)设 T 为图 G 中的任意生成树,则 T 中的任意边权,不能由其它 $n-2$ 个边权(依据完全一致性约束)导出;并且,由 T 的边权可以构造出一个完全一致的矩阵.

证明 由 $p_{ij}(i<j)$的下标(i,j)与图 G 的边集 E 之间的一一对应关系,(1)易证.采用归纳法,证明(2)的正确性:当 $j=i+1$ 时,$p_{ij}=p_{i,i+1}$成立;假设 $i<j=k<n$ 时,(2)成立,即 $p_{ik}=\sum_{t=0}^{k-i-1}p_{i+t,i+t+1}-0.5(k-i-1)$;

则当 $j=k+1$ 时:

$$p_{ij}=p_{ik}+p_{kj}-0.5=\sum_{t=0}^{j-i-1}p_{i+t,i+t+1}-0.5(j-i-1)$$,即(2)成立.依据定义 1、定义 2、式(1)和定理 1,易证明(3)的正确性.

一致性是衡量个体判断矩阵元素之间关系的重要尺度.单个元素相对于个体判断矩阵的一致性程度,可以采用完全一致性的三角约束条件计算.因为 $p_{ji}=1-p_{ij}(i<j)$,所以个体判断矩阵中元素的不一致度,仅考虑 $i<j$ 的情况.

定义 3 设 $G=(V,E)$为与模糊互补判断矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$对应的简单赋权图,则任意元素 $p_{ij}(i<j)$与图 G 中的边$(i,j)\in E$ 对应;设 $\varepsilon_{i,j,k}=|p_{ik}+p_{kj}-p_{ij}-0.5|$为元素 p_{ij}相对于图 G 中顶点 $k(\neq i,j)$的不一致度;设 $\varepsilon_{i,j}=\sum_{1\leqslant k\leqslant n,k\neq i,j}\varepsilon_{i,j,k}/(n-2)$为元素 p_{ij}的不一致度.

设 T_ε 为图 G 中以$\varepsilon_{i,j}$为边权的最小生成树.根据定理 2,可以由 T_ε 构造模糊互补判断矩阵 P 的完全一致

矩阵 $\boldsymbol{P}(T_\varepsilon)$,该矩阵综合考虑了 $\boldsymbol{P}$ 中元素之间的一致性联系.设 $\boldsymbol{P}^1,\boldsymbol{P}^2,\cdots,\boldsymbol{P}^m$ 为群组模糊互补判断矩阵,$\boldsymbol{W}=(w^1,w^2,\cdots,w^m)$为由决策者或 OWA 系列算子给出的专家权重向量.生成树集结算子可以描述为:

Step1　对专家给出的正互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}^l(l=1,2,\cdots,m)$进行一致性检验,将未通过满意一致性的矩阵反馈给相应的专家重新判断,直至达到满意一致性指标的要求[8];

Step2　采用式(1),将正互反判断矩阵转换为模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{P}^l(l=1,2,\cdots,m)$;

Step3　计算 $\boldsymbol{P}^l(l=1,2,\cdots,m)$对应的最小生成树 T_ε^l,并由 T_ε^l 依据定义 2 中的完全一致性约束,构造完全一致矩阵 $\boldsymbol{P}^l(T_\varepsilon^l)$;

Step4　采用 WA 算子,计算群组集结矩阵 $R^{\mathrm{ST}}=\sum_{l=1}^{m} w^l\cdot\boldsymbol{P}^l(T_\varepsilon^l)$;

定理 3　群组集结矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}}=\sum_{l=1}^{m} w^l\cdot\boldsymbol{P}^l(T_\varepsilon^l)$为完全一致矩阵.

证明　设 $p_{12}^l,p_{23}^l,\cdots,p_{(n-1)n}^l$ 为完全一致矩阵 $\boldsymbol{P}^l(T_\varepsilon^l)$的次对角元素,即与 $\boldsymbol{P}^l(T_\varepsilon^l)$对应的简单赋权图 G^l 中边集 $E'=\{(i,i+1)\}_{i=1}^{n-2}$上的权值.根据定理 2,由边集 E'同样可以构造完全一致矩阵 $\boldsymbol{P}^l(E')$,且对 $\forall\, i<j\cdot\boldsymbol{P}^l(E')$中的第 i 行 j 列元素 $p_{ij}^l=\sum_{t=0}^{j-i-1} p_{i+t,i+t+1}^l-0.5(j-i-1)$.根据完全一致性约束,$p_{ij}^l$ 由 $p_{12}^l,p_{23}^l,\cdots,p_{(n-1)n}^l$唯一确定.由 $\boldsymbol{P}^l(T_\varepsilon^l)$的完全一致性,可知 $\boldsymbol{P}^l(T_\varepsilon^l)$等同于$\boldsymbol{P}^l(E')$.因此,集结矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}}$中的第 i 行 j 列$(i<j)$元素 $r_{ij}=\sum_{l=1}^{m} w^l\cdot\sum_{t=0}^{j-i-1} p_{i+t,i+t+1}^l-0.5(j-i-1)$.根据定义 2,可知 $r_{ji}(i<j)=1-r_{ij}$且 $r_{ii}=0.5$.下面证明 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}}$满足定义 2 的完全一致性约束:

若 $1\leqslant i<j<k\leqslant n$,则:

$r_{ik}=\sum_{l=1}^{m} w^l\cdot\sum_{t=0}^{k-i-1} p_{i+t,i+t+1}^l-0.5(k-i-1)$,$r_{kj}=0.5(k-j+1)-\sum_{l=1}^{m} w^l\cdot\sum_{t=0}^{k-j-1} p_{j+t,j+t+1}^l$,即 $r_{ij}=r_{ik}+r_{kj}-0.5$.同理,针对 $\forall\,1\leqslant i,j,k\leqslant n$ 的其它五种情况$(i=k,i=j<k,i<k=j,j<i<k,i<k<j)$,可以采用相同的方法验证 $r_{ij}=r_{ik}+r_{kj}-0.5$ 的正确性.因此,集结矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}}$为完全一致矩阵.

4　基于生成树集结算子的群组 AHP 判断矩阵集结算法

根据生成树集结算子,计算获得完全一致集结矩阵,该矩阵综合考虑了个体判断矩阵中元素之间的一致性关系.对于不同判断矩阵中同一位置元素之间的关联性,可以采用 WA 算子获得的集结矩阵描述,因为其中每个元素的计算,仅考虑了不同判断矩阵中同一位置的元素.因此,群组关联集结矩阵的计算方法,可以描述为:

Step1　对专家给出的正互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}^l=(a_{ij}^l)(l=1,2,\cdots,m)$进行一致性检验,将未通过满意一致性的矩阵反馈给相应的专家重新判断,直至达到满意一致性指标的要求[8];

Step2　采用 WA 算子,计算群组集结矩阵:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{WA}}=\begin{cases}\sum_{l=1}^{m} w^l\cdot a_{ij}^l, & i\leqslant j\\ 1/a_{ji}^l, & i>j\end{cases}\tag{2}$$

Step3　采用式(1),将 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{WA}}$转换为模糊互补群组集结矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{WA}}$;

定义 4　矩阵一致度:设 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}}$和 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{WA}}$分别为完全一致矩阵和群组关联矩阵(模糊互补判断矩阵),$\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}$和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{WA}}$分别为相对应的正互反判断矩阵,其中 λ^{ST}和 λ^{WA}分别为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}$和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{WA}}$的最大特征值.对于任意群组集结矩阵 $\boldsymbol{R}$(相对应正互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值为λ),该矩阵的一致度定义为:

$$\mathrm{CD}(\boldsymbol{R})=\begin{cases}(\lambda-\lambda^{\mathrm{WA}})/(\lambda^{\mathrm{ST}}-\lambda^{\mathrm{WA}}), & \lambda^{\mathrm{ST}}>\lambda^{\mathrm{WA}}\\ 1, & \lambda^{\mathrm{ST}}=\lambda^{\mathrm{WA}}\end{cases}\tag{3}$$

由 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}}$的完全一致性可知,$\lambda^{\mathrm{ST}}\geq\lambda^{\mathrm{WA}}$.

定义 5　矩阵相似度:设 $\boldsymbol{A}^l=(a_{ij}^l)_{n\times n}(l=1,2,\cdots,m)$为专家给出的正互反判断矩阵,$\boldsymbol{W}=(w^1,w^2,\cdots,w^m)$为由决策者或 OWA 系列算子给出的归一化专家权重向量.对于任意群组集结矩阵 $\boldsymbol{R}$(正互反形式为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$),该矩阵与群组矩阵的差异性定义为:

$$d(\boldsymbol{R})=\sum_{l=1}^{m} w^l\cdot\sum_{i<j}(a_{ij}-a_{ij}^l)^2\tag{4}$$

设 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}}$和 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{WA}}$分别为完全一致矩阵和群组关联矩阵,则该矩阵的相似度定义为:

$$\mathrm{SD}(\boldsymbol{R})=\begin{cases}\dfrac{(d(\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}})-d(\boldsymbol{R}))}{(d(\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}})-d(\boldsymbol{R}^{\mathrm{WA}}))}, & d(\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}})>d(\boldsymbol{R}^{\mathrm{WA}})\\ 1, & d(\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}})=d(\boldsymbol{R}^{\mathrm{WA}})\end{cases}\tag{5}$$

由等式$\partial(d(\boldsymbol{R}))/\partial(a_{ij})_{i<j}=2\sum_{l=1}^{m} w^l\cdot(a_{ij}-a_{ij}^l)=0$,可知 $d(\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}})\geq d(\boldsymbol{R}^{\mathrm{WA}})$.正互反判断矩阵的下三角元素由上三角元素唯一确定,因此矩阵相似度仅考虑上三角元素.

专家给出的判断矩阵,通常不需要严格的完全一致性要求,而需要综合考虑群组集结矩阵的一致性和相似性.因此,本文提出的基于生成树集结算子的群组

AHP 判断矩阵集结算法,以完全一致矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}}$和群组关联矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{WA}}$为基础,在一致性和相似性的综合性尺度 $\mathrm{CD}(\boldsymbol{R})\cdot\mathrm{SD}(\boldsymbol{R})$约束下,通过权值优化,计算获得综合考虑个体一致性和群组关联性的集结结果.算法步骤,可以描述为:

Step1 对专家给出的正互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}^l(l=1,2,\cdots,m)$进行一致性检验,将未通过满意一致性的矩阵反馈给相应的专家重新判断,直至达到满意一致性指标的要求[8];并给定满意的一致性约束指标 α;

Step2 采用式(1),将正互反判断矩阵转换为模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{P}^l(l=1,2,\cdots,m)$;

Step3 计算完全一致矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}}$和群组关联矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{WA}}$,以及相应的正互反矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{ST}}$和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{WA}}$;

Step4 计算集结矩阵

$$\boldsymbol{R}(w^*)=w^*\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}}+(1-w^*)\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{WA}} \tag{6}$$

权值 $w^*=\arg_w\max_{\mathrm{CR}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(w)))\leqslant\alpha,\, w\in\{0,0.01,0.02,\cdots,0.98,0.99,1\}}\mathrm{CD}(\boldsymbol{R}(w))\cdot\mathrm{SD}(\boldsymbol{R}(w))$,其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(w))$为集结矩阵 $\boldsymbol{R}(w)$对应的正互反判断矩阵, $\mathrm{CR}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(w)))$为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(w))$的 saaty 一致性比例[3].

Step5 采用式(1)将 $\boldsymbol{R}(w^*)$转换为正互反判断矩阵,并采用最大特征值对应的特征向量,对方案进行排序.

5 算例分析

假设由四位专家给出的判断矩阵分别为[8,9]:

$$\boldsymbol{A}^1=\begin{pmatrix}1&7&5&4\\1/7&1&1&1/2\\1/5&1&1&1/3\\1/4&2&3&1\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&6&7&5\\1/6&1&1&1\\1/7&1&1&1\\1/5&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}1&6&8&4\\1/6&1&1&1/2\\1/8&1&1&1\\1/4&2&1&1\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{A}^4=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\1/3&1&1/2&1/3\\1/2&2&1&2\\1&3&1/2&1\end{pmatrix}$$

通过计算可知各专家给出的正互反判断矩阵均通过一致性检验.采用式(1),将正互反判断矩阵转换为模糊互补判断矩阵:

$$\boldsymbol{P}^1=\begin{pmatrix}0.5&0.9428&0.8662&0.8155\\0.0572&0.5&0.5000&0.3423\\0.1338&0.5000&0.5&0.2500\\0.1845&0.6577&0.7500&0.5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^2=\begin{pmatrix}0.5&0.9077&0.9428&0.8662\\0.0923&0.5&0.5000&0.5000\\0.0572&0.5000&0.5&0.5000\\0.1338&0.5000&0.5000&0.5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^3=\begin{pmatrix}0.5&0.9077&0.9732&0.8155\\0.0923&0.5&0.5000&0.3423\\0.0268&0.5000&0.5&0.5000\\0.1845&0.6577&0.5000&0.5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^4=\begin{pmatrix}0.5&0.7500&0.6577&0.5000\\0.2500&0.5&0.3423&0.2500\\0.3423&0.6577&0.5&0.6577\\0.5000&0.7500&0.3423&0.5\end{pmatrix}$$

在模糊互补判断矩阵对应的简单赋权图中标注不一致度:

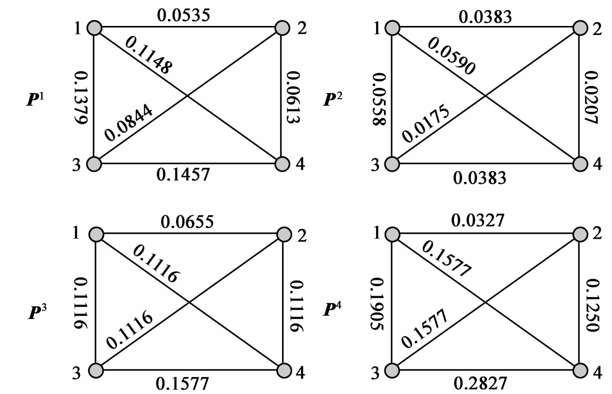

图1 模糊互补判断矩阵对应简单赋权图的不一致度权重

计算图 1 中的最小生成树,易知 $T=\{(1,2),(2,3),(2,4)\}$为 $\boldsymbol{P}^1,\boldsymbol{P}^2,\boldsymbol{P}^3,\boldsymbol{P}^4$ 共同的最小生成树.由该最小生成树,构造完全一致矩阵:

$$\boldsymbol{P}^1(T)=\begin{pmatrix}0.5&0.9428&0.9428&0.7851\\0.0572&0.5&0.5000&0.3423\\0.0572&0.5000&0.5&0.3423\\0.2149&0.6577&0.6577&0.5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^2(T)=\begin{pmatrix}0.5&0.9077&0.9077&0.9077\\0.0923&0.5&0.5000&0.5000\\0.0923&0.5000&0.5&0.5000\\0.0923&0.5000&0.5000&0.5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^3(T)=\begin{pmatrix}0.5&0.9077&0.9077&0.7500\\0.0923&0.5&0.5000&0.3423\\0.0923&0.5000&0.5&0.3423\\0.2500&0.6577&0.6577&0.5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^4(T)=\begin{pmatrix}0.5&0.7500&0.5923&0.5000\\0.2500&0.5&0.3423&0.2500\\0.4077&0.6577&0.5&0.4077\\0.5000&0.7500&0.5923&0.5\end{pmatrix}$$

吕跃进[8]假设专家权重相同,即 $\boldsymbol{W}=(0.25,0.25,0.25,0.25)$.因此,采用此专家权重向量的最小生成树集结矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}}$(完全一致矩阵)和群组关联矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{WA}}$分别为:

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{ST}}=\begin{pmatrix}0.5&0.8771&0.8376&0.7357\\0.1229&0.5&0.4606&0.3586\\0.1624&0.5394&0.5&0.3981\\0.2643&0.6414&0.6019&0.5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{WA}}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.8879 & 0.8879 & 0.7851\\ 0.1121 & 0.5 & 0.4696 & 0.3773\\ 0.1121 & 0.5304 & 0.5 & 0.5182\\ 0.2149 & 0.6227 & 0.4818 & 0.5\end{pmatrix}$$

采用满意度的一致性约束指标 $\alpha=0.1$,计算获得 $w^*=0.48$,$\mathrm{CD}(\boldsymbol{R}(w^*))\cdot\mathrm{SD}(\boldsymbol{R}(w^*))=0.5400$,且最终的集结矩阵 $\boldsymbol{R}(w^*)$ 和对应的正互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(w^*))$分别为:

$$\boldsymbol{R}(w^*)=\begin{pmatrix}0.5 & 0.8827 & 0.8638 & 0.7614\\ 0.1173 & 0.5 & 0.4653 & 0.3684\\ 0.1362 & 0.5347 & 0.5 & 0.4605\\ 0.2386 & 0.6316 & 0.5395 & 0.5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(w^*))=\begin{pmatrix}1.0 & 5.3754 & 4.9464 & 3.1538\\ 0.1860 & 1.0 & 0.8585 & 0.5608\\ 0.2022 & 1.1649 & 1.0 & 0.8408\\ 0.3171 & 1.7833 & 1.1893 & 1.0\end{pmatrix}$$

采用 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(w^*))$最大特征值对应的特征向量,可以获得归一化排序向量为(0.5878,0.1062,0.1298,0.1762),即方案 s_1,s_2,s_3,s_4 的排列顺序为 $s_1>s_4>s_3>s_2$,与文献[8]方法的排序结果相同,但这主要原因在于输入数据 A^1,A^2,A^3,A^4 对应相同的最小生成树 T,且文献[8]方法弱化了个体判断矩阵中元素之间的一致性信息.

周漩[9]获得的专家权重向量为 $\boldsymbol{W}=(0.1941,0.5269,0.2047,0.0743)$.因此,采用此专家权重向量的最终集结矩阵 $\boldsymbol{R}(w^*)$ 和对应的正互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(w^*))$分别为:

$$\boldsymbol{R}(w^*)=\begin{pmatrix}0.5 & 0.9048 & 0.9079 & 0.8268\\ 0.0952 & 0.5 & 0.4899 & 0.4269\\ 0.0921 & 0.5101 & 0.5 & 0.4592\\ 0.1732 & 0.5731 & 0.5408 & 0.5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(w^*))=\begin{pmatrix}1.0 & 5.9223 & 6.0041 & 4.2051\\ 0.1689 & 1.0 & 0.9564 & 0.7251\\ 0.1666 & 1.0455 & 1.0 & 0.8360\\ 0.2378 & 1.3791 & 1.1962 & 1.0\end{pmatrix}$$

采用 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(w^*))$最大特征值对应的特征向量,可以获得归一化排序向量为(0.6369,0.1065,0.1125,0.1442),即方案 s_1,s_2,s_3,s_4 的排列顺序为 $s_1>s_4>s_3>s_2$,与文献[9]方法的排序结果相同,但文献[9]方法仅依据个体判断矩阵的一致性和少数服从多数的原则,确定专家权重,忽略对专家背景经验等的考虑,在专家权重的计算上具有片面性,且该方法对特征向量进行集结,弱化了不同判断矩阵元素之间的关系对集结结果的影响.

6　结论

本文综合考虑正互反与模糊互补判断矩阵分别在知识表达和便于计算的优势,依据判断矩阵与简单无向图生成树之间的关系,采用完全一致矩阵和群组关联矩阵,在一致性和相似性的综合约束下,通过权值优化,计算获得综合考虑个体一致性和群组关联性的集结结果.该方法直观、合理、有效,适合于群决策中方案的排序.

参考文献

[1] Saaty T L.Decision-making with the AHP:Why is the principal eigenvector necessary[J].European Journal of Operational Research,2003,145(1):85－91

[2] Saaty T L.Principles of the Analytical Hierarchy Process[M].London:Springer-Verlag,1987.

[3] 鲁智勇,张磊,唐朝京.基于预排序和上取整函数的 AHP 判断矩阵生成算法[J].电子学报,2009,36(6):1247－1251.

Lu Z Y,Zhang L,Tang C J.A generating algorithm for the judgment matrix in AHP based on pre-ordering and top integral function[J].Acta Electronica Sinica,2009,36(6):1247－1251.(in Chinese)

[4] 徐泽水.基于残缺互补判断矩阵的交互式群决策方法[J].控制与决策,2005,20(8):913－916.

Xu Z S.Interactive approach based on incomplete complementary judgement matrices to group decision making[J].Control and Decision,2005,20(8):913－916.(in Chinese)

[5] Zarghami M,Szidarovszky F,Ardakanian R.A fuzzy-stochastic OWA model for robust multi-criteria decision making[J].Fuzzy Optimization Decision Making,2008,7(1):1－15.

[6] Gong Y B.A combination approach for obtaining the minimize disparity OWA operator weights[J].Fuzzy Optimization Decision Making,2011,10(4):311－321.

[7] Merigo J M.Decision making in complex environments with generalized aggregation operators[A].IEEE Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering & Economics[C].Barcelona,Spain:IEEE,2012.1－7.

[8] 吕跃进,郭欣荣.群组 AHP 判断矩阵的一种有效集结方法[J].系统工程理论与实践,2007,27(7):132－136.

Lü Y J,Guo X R.An effective aggregation method for the AHP judgment matrix in group decision-making[J].System Engineering-Theory & Practice,2007,27(7):132－136.(in Chinese)

[9] 周漩,张凤鸣,李克武,杨骥.一种基于专家赋权的综合评价方法及其应用[J].火力指挥与控制,2011,36(6):183－185.

Zhou X,Zhang F M,Li K W,Yang J.A comprehensive evaluation method based on determining experts' weight and its application[J].Fire Control & Command Control,2011,36(6):183－185.(in Chinese)

[10] Enrique H V, Francisco H, Francisco C. A consensus model for multiperson decision making with different preference structures[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, 2002, 32(3): 394 – 402.

作者简介

鲁智勇 男,1969 年生于河南,博士,高级工程师,主要研究方向为网络安全与评估.
E-mail: luzhiyong2002@sohu.com

安成锦 女,1982 年生于河南,博士,讲师,主要研究方向为信息安全评估、信号处理.

焦 波 男,1981 年生于河南,博士,主要研究方向为信息网络安全.

毕建权 男,1986 年生于江西,硕士,主要研究方向为信息网络安全.

庞训龙 男,1981 生于河南,硕士,主要研究方向为信息网络安全.