一种基于时滞区间不均分方法的变时延网络控制系统的新稳定性条件

张 俊[1,2],罗大庸[1],孙妙平[1]
(1. 中南大学信息科学与工程学院,湖南长沙 410075;2. 湖南现代物流职业学院,湖南长沙 410131)

摘 要: 针对一种变时延线性网络控制系统,采用时滞区间不均分法,将时滞分割成 m 个区间. 在每个区间都构建不同的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,并引入三重积分项,同时结合自由权矩阵法,在各自的时滞区间上采用保守性小的积分不等式来处理泛函导数,进而获得了保证网络控制系统的一种新的稳定性条件. 并且,最后通过相应的数值算例验证了本文中的结论.

关键词: 变时延; 网络控制系统; Lyapunov-Krasovskii 泛函; 稳定性
中图分类号: TP13 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)01-0054-06
电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.01.009

A New Stability Condition for Networked Control System with Time-Varying Delay Based on Time Delay Uneven-Partitioning Approach

ZHANG Jun[1,2], LUO Da-yong[1], SUN Miao-ping[1]
(1. *School of Information Science and Engineering*, *Central South University*, *Changsha*, *Hunan* 410075, *China*;
2. *Hunan Modern Logistics Occupation Technical College*, *Changsha*, *Hunan* 410131, *China*)

Abstract: Aimed to a type of networked control system with time-varying delay, it divided the time area into m sections unevenly. Then, it made each different Lyapunov-Krasovskii functional by taking triple integral and combined with free-weighting matrices, used less conservative integral inequality to tackle the derivative of Lyapunov-Krasovskii functional. Furthermore, it got a new stability condition for time-varying delay of networked control system. Finally, numerical example was given to prove the result in this paper.

Key words: time-varying delay; networked control system; Lyapunov-Krasovskii functional; stability

1 引言

众所周知,网络控制系统将网络引入控制系统后,在物理空间上大大提高了系统结构的灵活性. 但同时,控制与通信的相互作用带来了因网络时延造成的不利问题,使得 NCS 的分析和设计变得复杂. 一旦网络时延过长或无法测量,极有可能造成系统失稳. 因此,网络控制系统的时延稳定性判据是大家一直以来研究的一个热点问题.

对于网络控制系统中存在的时延,一般分为固定时延控制、随机时延控制等. 固定时延的方法通常是通过在接收端设置缓存区,人为地把所有随机时延变成了固定的最大时延参数;也有一些方法利用随机控制法分析系统的稳定性问题,但前提是要求网络时延能够满足一定的分布特性,可以对其进行回归建模预测[1],这点在实际应用中难以获取. 关于随机时延的处理,时滞分割法、自由权矩阵法和积分不等式等方法应用很广泛,通过建立 Lyapunov-Krasovskii 泛函,并结合线性矩阵不等式(LMI)[2,3]等方法或者凸优化方法设计满足性能指标的控制器,得到系统稳定判据.

很多前人的研究结论都是构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函,主要是采用一定的一重积分或二重积分,导致所得结论的保守性. 自从何、吴[4~7]和刘[8]引入自由权矩

收稿日期:2015-04-03;修回日期:2015-07-29;责任编辑:孙瑶
基金项目:国家青年科学基金(No. 61403425);湖南省科技厅课题(No. 2013GK3137);湖南省教育厅课题(No. 14C0814)

阵的方法,避免了对系统进行模型变换,也无须设定交叉项,降低了系统稳定性条件的保守性. Zhang 等[9]构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函时,对一部分的积分项没有进行分段处理,同时在推导过程中放大了时延参数 δ. Zhu[10]、Park[11]、Zeng[12]、Pavlovi′c G[13]、Han[14]和 Sun[15]等将积分不等式方法引入到网络控制系统的稳定性分析中,并做了一定程度上的放大,进而得到不同保守性的结果. Wu[16]和 Balasubramaniam P[17]研究了时滞分割法,但是分解数目增加造成决策变量太多. Wang 等[18]又提出了一种新的时滞分割方法,形式简单,含矩阵变量少,有利于降低系统的保守性.

在实际过程中,大部分的网络控制系统都不同程度地存在网络时延. 一般而言时延是时变的,但是它又存在一定的变化范围. 综合考虑到上述因素,本文设计了一种时滞不均匀分段的方法,在不同的分割区间分别构造合适的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,并且引入了三重积分和自由权矩阵等方法,结合积分不等式、Schur 补等公式,得到了时滞相关的稳定性判据,更有利于降低结论的保守性.

2　变时延网络控制系统分析

2.1　问题描述

下面,考虑具有时变的 NCS 系统状态方程,表示为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-\tau(t))\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t)=\phi(t),t\in(-h,0)\end{cases}\tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量,$\boldsymbol{y}(t)$是系统的输出向量,$\boldsymbol{A}_0\in\mathbb{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{A}_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{n\times n}$是系统的常数矩阵,$\tau(t)$是系统时变网络时延且存在变化范围.

首先,令 $0<\tau(t)<h$. 在这里,先把时滞区间分为 m 个时滞子区间,即有$[0\quad h]=\bigcup_{j=1}^{m}[h_{j-1}\quad h_j]$,$m$ 为正整数,且有 $h_{j-1}<h_j,h_0=0,\delta_j=h_j-h_{j-1}(j=1,\cdots,m)$. 同时令,对于 $t>0$,有 $l\in\{1,\cdots,m\}$,满足 $\tau(t)\in[h_{l-1}\quad h_l]$.

在进行稳定性证明之前,先给出下面需要使用的有关引理.

引理 1　假设存在一定维数的正定对称矩阵 h 和某一常数 $\alpha>0$,满足下面不等式成立

$$-\alpha\int_{t-\alpha}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{h}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\alpha)]\begin{bmatrix}-\boldsymbol{h}&\boldsymbol{h}\\ \boldsymbol{h}&-\boldsymbol{h}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t-\alpha)\end{bmatrix}$$

引理 2　对于任意定常对称矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times n}$,且 $\boldsymbol{X}>0$,若有 $h>0$ 和向量函数 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$,满足下面积分不等式[19],即

$$-\frac{h^2}{2}\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{X}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant\xi^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}-\boldsymbol{X}&\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{X}&-\boldsymbol{X}\end{bmatrix}\xi(t)$$

其中,$\xi^{\mathrm{T}}(t)=\left[h\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right]$.

2.2　稳定性分析

定理 1　对系统(1)来说,假设存在一定维数的正定矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{M}_j,\boldsymbol{N}_j,\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{Z}_l(i=1,\cdots,l;j=1,\cdots,m)$,且有一定维数的矩阵 $\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2$,若能满足下面式(2)和(3)的矩阵不等式组成立,则保证系统(1)是渐近稳定的.

$$\boldsymbol{\Lambda}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{0,0}&\boldsymbol{\Omega}_{0,1}&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&\delta_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_1&\cdots&\delta_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_m&0\\ *&\boldsymbol{\Omega}_{1,1}&\boldsymbol{M}_2&0&\frac{(\boldsymbol{G}_2-\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}})}{2}&\frac{(\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{H}_1)}{2}&0&\cdots&\cdots&\cdots&0&-\frac{\boldsymbol{H}_1}{2}\\ *&*&\boldsymbol{\Omega}_{2,2}&\boldsymbol{M}_3&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ *&*&*&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ *&*&*&*&\boldsymbol{\Omega}_{l-1,l-1}&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ *&*&*&*&*&\boldsymbol{\Omega}_{l,l}&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&-\frac{\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}}{2}\\ *&*&*&*&*&*&\cdots&\boldsymbol{M}_{m-1}&0&\cdots&\cdots&0\\ *&*&*&*&*&*&*&\boldsymbol{\Omega}_{m,m}&0&\cdots&\cdots&\cdots\\ *&*&*&*&*&*&*&*&-\boldsymbol{N}_1&0&\cdots&\cdots\\ *&*&*&*&*&*&*&*&*&\cdots&0&\cdots\\ *&*&*&*&*&*&*&*&*&*&-\boldsymbol{N}_m&0\\ *&*&*&*&*&*&*&*&*&*&*&-\delta_l\boldsymbol{M}_l\end{bmatrix}<0\tag{2}$$

$$
\boldsymbol{\Lambda}_2=\begin{bmatrix}
\boldsymbol{\Omega}_{0,0} & \boldsymbol{\Omega}_{0,1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \delta_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_1 & \cdots & \delta_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_m & 0 \\
* & \boldsymbol{\Omega}_{1,1} & \boldsymbol{M}_2 & 0 & \frac{(\boldsymbol{G}_2-\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}})}{2} & \frac{(\boldsymbol{H}_2^{T}-\boldsymbol{H}_1)}{2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{\boldsymbol{G}_2}{2} \\
* & * & \boldsymbol{\Omega}_{2,2} & \boldsymbol{M}_3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
* & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
* & * & * & * & \boldsymbol{\Omega}_{l-1,l-1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
* & * & * & * & * & \boldsymbol{\Omega}_{l,l} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}}{2} \\
* & * & * & * & * & * & \cdots & \boldsymbol{M}_{m-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & \boldsymbol{\Omega}_{m,m} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{N}_1 & 0 & \cdots & \cdots \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & \cdots & 0 & \cdots \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{N}_m & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\delta_l\boldsymbol{M}_l
\end{bmatrix}<0 \quad (3)
$$

其中，

$$\boldsymbol{\Omega}_{0,0}=\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{M}_1-\sum_{j=1}^{m}\delta_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_j\delta_j+\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\left(\delta_j^2\boldsymbol{M}_j+\frac{h_j^2-h_{j-1}^2}{4}\boldsymbol{N}_j\right)\boldsymbol{A}_0$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{0,1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{m}\left(\delta_j^2\boldsymbol{M}_j+\frac{1}{4}(h_j^2-h_{j-1}^2)\boldsymbol{N}_j\right)\boldsymbol{A}_1$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{1,1}=\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{m}\left(\delta_j^2\boldsymbol{M}_j+\frac{h_j^2-h_{j-1}^2}{4}\boldsymbol{N}_j\right)\boldsymbol{A}_1-(1-\mu)\boldsymbol{Z}_l+\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{G}_2$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{j,j}=\begin{cases}\boldsymbol{Z}_{j+1}-\boldsymbol{Z}_j+\boldsymbol{Q}_{j+1}-\boldsymbol{Q}_j-\boldsymbol{M}_{j+1}-\boldsymbol{M}_j, j\in[1,l-2]\\ \boldsymbol{Z}_l-\boldsymbol{Z}_{l-1}+\boldsymbol{Q}_l-\boldsymbol{Q}_{l-1}-\boldsymbol{M}_{l-1}+\boldsymbol{G}_1, j=l-1\\ \boldsymbol{Q}_{l+1}-\boldsymbol{Q}_l-\boldsymbol{M}_{l+1}-\boldsymbol{H}_2, j=l\\ \boldsymbol{Q}_{j+1}-\boldsymbol{Q}_j-\boldsymbol{M}_{j+1}-\boldsymbol{M}_j, j\in[l+2,m-1]\\ -\boldsymbol{Q}_m-\boldsymbol{M}_m,\ j=m\end{cases}$$

矩阵不等式中标示"$*$"的部分代表了矩阵中的对称元.

注：随着时滞区间分段数 m 的增加，所得到的最大允许时滞上界增大，降低了所得结论的保守性，但是同时也会增加了上述矩阵不等式的维数，造成计算量增大. 基于保守性问题和矩阵不等式维数的考虑，需要权衡两者，折中考虑 m 的数值大小.

下面开始进行系统稳定性证明.

证明 构造以下 Lyapunov-Krasovskii 泛函，具体如式(4)所示.

$$\boldsymbol{V}(t)=\sum_{i=1}^{5}\boldsymbol{V}_i(t) \quad (4)$$

其中，

$$\boldsymbol{V}_1(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$$

$$\boldsymbol{V}_2(t)=\sum_{j=1}^{m}\int_{t-h_j}^{t-h_{j-1}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$$

$$\boldsymbol{V}_3(t)=\sum_{j=1}^{m}\delta_j\int_{-h_j}^{-h_{j-1}}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{M}_j\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

$$\boldsymbol{V}_4(t)=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2}(h_j^2-h_{j-1}^2)\int_{-h_j}^{-h_{j-1}}\int_{\theta}^{0}\int_{t+\lambda}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\cdot\boldsymbol{N}_j\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta$$

$$\boldsymbol{V}_5(t)=\sum_{j=1}^{l-1}\int_{t-h_j}^{t-h_{j-1}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}_j\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau(t)}^{t-h_{l-1}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}_l\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$$

这里，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{M}_j,\boldsymbol{N}_j,\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{Z}_l$ 为待定的正定对称矩阵，($i=1,\cdots,l;j=1,\cdots,m$).

注：文献[9]对构造的 L-K 泛函中的一重积分和二重积分，利用时滞分段方法降低了所得结论的保守性，文献[4～7]采用自由权矩阵方法，一定程度上也有利于降低系统的保守性. 本节中建立的 L-K 泛函与文献[9]不同，对所有的积分项进行了分段处理，同时又适当地引入了自由权矩阵，并且还加入了三重积分项，进一步降低系统的保守性.

将 $\boldsymbol{V}_i(t)(i=1,\cdots,5)$ 分别沿着时间 t 取导数，计算得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_1(t)}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-\tau(t))\} \quad (5)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_2(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_{j-1})\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{x}(t-h_{j-1})-\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_{j-1})\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{x}(t-h_{j-1}) \quad (6)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_3(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{m}\delta_j^2\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{M}_j\dot{\boldsymbol{x}}(t)$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\delta_j\int_{t-h_j}^{t-h_{j-1}}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{M}_j\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_4(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{4}(h_j^2-h_{j-1}^2)^2\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{N}_j\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2}(h_j^2-h_{j-1}^2)\cdot\int_{-h_j}^{-h_{j-1}}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\cdot\boldsymbol{N}_j\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_5(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{l-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_{j-1})\boldsymbol{Z}_j\boldsymbol{x}(t-h_{j-1})-\sum_{j=1}^{l-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_j)\boldsymbol{Z}_j\boldsymbol{x}(t-h_j)-(1-\mu)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{Z}_l\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) \tag{9}$$

根据引理 1 和引理 2,分别有

$$\begin{aligned}&-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2}(h_j^2-h_{j-1}^2)\int_{-h_j}^{-h_{j-1}}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{N}_j\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\\&\leqslant-\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\delta_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_j\delta_j\boldsymbol{x}(t)+\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\delta_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_j\int_{t-h_j}^{t-h_{j-1}}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\\&-\sum_{j=1}^{m}\int_{t-h_j}^{t-h_{j-1}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\boldsymbol{N}_j\int_{t-h_j}^{t-h_{j-1}}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\\&+\sum_{j=1}^{m}\int_{t-h_j}^{t-h_{j-1}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\,\boldsymbol{N}_j\delta_j\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&-\sum_{j=1}^{m}\delta_j\int_{t-h_j}^{t-h_{j-1}}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{M}_j\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\\&\leqslant-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}(t)-\sum_{j=1}^{m-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_j)(\boldsymbol{M}_{j+1}+\boldsymbol{M}_j)\boldsymbol{x}(t-h_j)\\&+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_m)\boldsymbol{M}_m\boldsymbol{x}(t-h_m)+\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_{j-1})\boldsymbol{M}_j\boldsymbol{x}(t-h_j)\\&+\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_j)\boldsymbol{M}_j\boldsymbol{x}(t-h_{l-1})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_{l-1})\boldsymbol{M}_l\boldsymbol{x}(t-h_{l-1})\\&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_l)(-\boldsymbol{M}_l)\boldsymbol{x}(t-h_l)-\delta_l\int_{t-h_1}^{t-\tau(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{M}_l\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\\&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_{l-1})\boldsymbol{M}_l\boldsymbol{x}(t-h_l)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_l)\boldsymbol{M}_l\boldsymbol{x}(t-h_{l-1})\\&-\delta_l\int_{t-\tau(t)}^{t-h_{l-1}}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{M}_l\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{11}$$

另外,令存在一定维数的矩阵,根据牛顿-莱布尼茨公式,存在表达式(12)和(13)

$$\Delta_1=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_l)\boldsymbol{H}_2]\cdot\left[\boldsymbol{x}(t-\tau(t))-\boldsymbol{x}(t-h_l)-\int_{t-h_l}^{t-\tau(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right] \tag{12}$$

$$\Delta_2=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_{l-1})\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{G}_2]\cdot\left[\boldsymbol{x}(t-h_{l-1})-\boldsymbol{x}(t-\tau(t))-\int_{t-\tau(t)}^{t-h_{l-1}}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right] \tag{13}$$

综合上述表达式(5)至(13)后,得到表达式(14)

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t}\\&=\sum_{i=1}^{5}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_i(t)}{\mathrm{d}t}+\Delta_1+\Delta_2\\&=\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_j)\boldsymbol{M}_j\boldsymbol{x}(t-h_{l-1})\\&+\sum_{j=1}^{m}\int_{t-h_j}^{t-h_{j-1}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\boldsymbol{N}_j\delta_j\boldsymbol{x}(t)\\&+\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\delta_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_j\int_{t-h_j}^{t-h_{j-1}}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\\&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{H}_1\int_{t-h_l}^{t-\tau(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\\&+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{M}_1\\-\sum_{j=1}^{m}\delta_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_j\delta_j\\+\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\sum_{j=0}^{m}\left(\delta_j^2\boldsymbol{M}_j+\frac{h_j^2-h_{j-1}^2}{4}\boldsymbol{N}_j\right)\boldsymbol{A}_0\end{array}\right\}\boldsymbol{x}(t)\\&+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\\\cdot\sum_{j=1}^{m}\left(\delta_j^2\boldsymbol{M}_j+\frac{h_j^2-h_{j-1}^2}{4}\boldsymbol{N}_j\right)\boldsymbol{A}_1\end{array}\right\}\boldsymbol{x}(t-\tau(t))\\&+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\left\{\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{m}\left(\delta_j^2\boldsymbol{M}_j+\frac{h_j^2-h_{j-1}^2}{4}\boldsymbol{N}_j\right)\boldsymbol{A}_0\right\}\\&\cdot\boldsymbol{x}(t)\\&+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{m}\left(\delta_j^2\boldsymbol{M}_j+\frac{1}{4}(h_j^2-h_{j-1}^2)\boldsymbol{N}_j\right)\boldsymbol{A}_1\\-(1-\mu)\boldsymbol{Z}_l+\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{G}_2\end{array}\right\}\\&\cdot x(t-\tau(t))\\&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\boldsymbol{H}_m)(-\boldsymbol{Q}_m-\boldsymbol{M}_m)\boldsymbol{x}(t-\boldsymbol{H}_m)\\&+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_l)(\boldsymbol{Q}_{l+1}-\boldsymbol{Q}_l-\boldsymbol{M}_{l+1}-\boldsymbol{H}_2)\boldsymbol{x}(t-h_l)\\&+\sum_{j=1}^{l-2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_j)\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{j+1}-\boldsymbol{Z}_j+\boldsymbol{Q}_{j+1}-\boldsymbol{Q}_j\\-\boldsymbol{M}_{j+1}-\boldsymbol{M}_j\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t-h_j)\\&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{x}(t-h_l)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_l)\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{x}(t-\tau(t))\\&+\sum_{j=l+1}^{m-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_j)(\boldsymbol{Q}_{j+1}-\boldsymbol{Q}_j-\boldsymbol{M}_{j+1}-\boldsymbol{M}_j)x(t-h_j)\\&+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{x}(t-h_{l-1})-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_{l-1})\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{x}(t-\tau(t))\\&+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_{l-1})\begin{pmatrix}(1-\mu)\boldsymbol{Z}_l-\boldsymbol{Z}_{l-1}+\boldsymbol{Q}_l-\boldsymbol{Q}_{l-1}\\-\boldsymbol{M}_{l-1}+\boldsymbol{G}_1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t-h_{l-1})\\&-\delta_l\int_{t-\tau(t)}^{t-h_{l-1}}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{M}_l\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\\&+\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_{l-1})\boldsymbol{M}_j\boldsymbol{x}(t-h_j)\\&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_l)\boldsymbol{H}_1\int_{t-h_l}^{t-\tau(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\\&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_{l-1})\boldsymbol{G}_1\int_{t-\tau(t)}^{t-h_{l-1}}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\\&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{G}_2\int_{t-\tau(t)}^{t-h_{l-1}}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\\&-\delta_l\int_{t-h_l}^{t-\tau(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{M}_l\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\\&-\sum_{j=1}^{m}\int_{t-h_j}^{t-h_{j-1}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\boldsymbol{N}_j\delta_j\int_{t-h_j}^{t-h_{j-1}}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$= \int_{t-h_l}^{t-\tau(t)} \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\xi}(t,s)\mathrm{d}s$$
$$+ \int_{t-\tau(t)}^{t-h_{l-1}} \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{\xi}(t,s)\mathrm{d}s \qquad (14)$$

在这里,有

$$\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t) = [\boldsymbol{x}(t)\ \ \boldsymbol{x}(t-\tau(t))\ \ \boldsymbol{x}(t-h_1)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{x}(t-h_m)]$$
$$\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}(t,s) = \left[\int_{t-h_1}^{t}\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\ \ \cdots\ \ \int_{t-h_m}^{t-h_{m-1}}\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\ \ \dot{\boldsymbol{x}}(s)\right]$$
$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t,s) = [\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t)\ \ \ \boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}(t,s)]$$

根据式(14),对于 $l=1,2,\cdots,m$,如有 $\boldsymbol{\Lambda}_1<0,\boldsymbol{\Lambda}_2<0$,则存在充分小的 ε,有 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t}\mid_l < -\varepsilon\|\boldsymbol{x}(t)\|^2$,由 Lyapunov 稳定性理论可知,系统(1)是渐近稳定的. $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_2$ 见定理 1 中定义.

2.3　数值算例

下面将通过数值算例来验证本节中提出的方法以及和其他已有结论的对比.

例 1　考虑如下参数的线性网络控制系统

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

为了方便比较,令 $\delta_1=\delta_2=\cdots=\delta_m$.

Case1:当 μ 和 m 选择不同数值的时候,利用定理 1 得到最大允许时滞上界和已有一些文献的结论都列在表 1 中.

表 1　保证系统(1)稳定的最大允许时滞上界

方法	$\mu=0$	$\mu=0.3$	$\mu=1$
文献[15]	2.748	2.051	1.095
文献[13]	4.472	3.835	1.941
文献[9]	4.935	3.273	1.638
文献[12]($m=2$)	5.429	3.657	1.794
文献[14]($m=2$)	5.717	3.856	1.988
定理 1($m=2$)	5.821	4.338	2.109
定理 1($m=3$)	5.904	4.402	2.217
定理 1($m=5$)	6.025	4.657	2.468

从表 1 中可以看出,当 μ 为不同数值时,利用本文定理 1 得到的最大网络时延最大值和表 1 中已有文献的结果均都列表其中. 文献[9]在构造了 L-K 泛函中,对其中的一项 $\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$ 没有进行时滞区间不均分处理,并且当 $d(t)\in[(k-1)\delta\quad k\delta]$时,人为地将 $d(t)-(k-1)\delta$ 和 $k\delta-d(t)$ 分别扩大为 δ. 在文献[12]中,构造的 L-K 泛函对时滞区间进行了分区处理,并且引入了自由权矩阵来降低系统的保守性. 文献[13]根据 Razumikhin 定理研究了随机时延问题,没有对积分区间细化处理. 文献[14,15]在 L-K 泛函中引入了积分不等式,并进一步在形式上进行不同程度的扩大,都只是对整个时延区间进行积分. 综合前面文献,本文构造的 L-K 泛函中所有项都分别时滞区间不均分处理,而且在每个时滞区间都引入三重积分,同时又在网络时延 $\tau_k(t)$所在时滞区间增加了自由权矩阵. 相比于前面文献中提出的方法来说,本文更加细化处理了 L-K 泛函的每个子项,进一步降低系统的保守性. 根据表 1 中的结果可以看出,当 μ 变大的过程中,网络时延的上限值随之变小. 表 1 中,当 $m=2$,随着 μ 从 0 变为 1,本文中的结果从 5.821s 降低为 2.109s,数值上比文献[12,14]的结果要大一些. 另外,采用了时滞区间不均分处理,如果分区数量越大,则网络实验的上限值也变大,就本文中提出的方法,当 $m=5$,网络时延上限值分别为 6.025s(当 $\mu=0$)、4.657s(当 $\mu=1$),相对比 $m=2$ 和 $m=3$ 的网络时延参数对应增大. 由此可见,本文中提出的方法增大了系统的最大网络时滞的上界范围,保守性进一步降低. 而且时滞区间细分数量越大,越有利于降低系统的保守性.

Case2:当 $m=2$,分别对 μ_1 和 μ_2 取不同数值的时候,保证系统稳定的最大时滞上界,都列表在表 2 中.

表 2　μ_1 和 μ_2 取不同数值时保证系统(1)稳定的最大允许时滞上界

$\mu_1\setminus\mu_2$	$\mu_2=0$	$\mu_2=0.3$	$\mu_2=1$
$\mu_1=0$	5.821	4.819	2.507
$\mu_1=0.3$	4.652	4.338	2.216
$\mu_1=1$	3.014	2.336	2.109

算例中以 2 变量的网络控制系统为例,因此每个变量产生的网络时延不同,时延的变化率也不同,系统网络时延的上限值也发生变化. 从表 2 的结果来看,当 $\mu_1=\mu_2=0$ 时,网络时延上限值为 5.821s,当 μ_1 和 μ_2 都变大至 1,网络时延上限值变为 2.109s. 而且从表 2 中看到,无论是 μ_1 还是 μ_2,只要任何一个参数变大,都会造成网络时延变短.

3　结论

本文以一类变时延线性网络控制系统为对象,基于时滞不均分法,研究其稳定性问题. 在构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函时,将时滞区间分割为若干个子区间,并分别在不同的时滞分割区间引入了三重积分项,并且增加自由权矩阵用来,细化处理不同子区间的泛函导数产生的交叉项,有利于降低系统的保守性,获得了新的系统稳定性判据. 而且,时滞区间分割数越多,系统的保守性越低,最后通过数值算例验证了该方法的有效性.

参考文献

[1] 田大中,高宪文,李琨. 基于 EMD 与 LS-SVM 的网络控制系

统的时延预测方法[J]. 电子学报,2014,42(5):868 – 874.
TIAN Da-zhong, GAO Xian-wen, LI Kun. Time-delay prediction method of networked control system based on EMD and LS-SVM[J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(5): 868 – 874. (in Chinese)

[2] LIAO X F, WONG K W. Robust stability of interval bidirectional associative memory neural networks with time delays[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-B, 2004, 34(2): 1141 – 1154.

[3] 王占山,张化光,余文,张庆灵. 基于 LMI 的时变时滞 Cohen-Grossberg 神经网络鲁棒稳定性[J]. 电子学报, 2008, 36(11): 2220 – 2223.
WANG Zhan-shan, ZHANG Hua-guang, YU Wen, ZHANG Qing-ling. An LMI approach to robust stability analysis of Cohen-Grossberg neural networks with time varying delay[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(11): 2220 – 2223. (in Chinese)

[4] HE Y, WU M, SHE J H, et al. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays[J]. Systems & Control Letters, 2004, 51(1): 57 – 65.

[5] WU M, HE Y, SHE J H, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems[J]. Automatica, 2004, 40(8): 1435 – 1439.

[6] HE Y, WANG Q Q, LIN C, et al. Delay-range-dependent stability for systems with time varying delay[J]. Automatica, 2007, 43(2): 371 – 376.

[7] HE Y, WANG Q Q, XIE L, et al. Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(2): 293 – 299.

[8] 刘金良. 一类网络环境下的离散线性系统的可靠性滤波器设计研究[J]. 电子学报, 2013, 40(12): 2557 – 2561.
LIU Jin-liang. Network-based reliable filter design for a class of discrete linear systems[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 40(12): 2557 – 2561. (in Chinese)

[9] Zhang X M, Han Q L. A delay decomposition approach to delay-dependent stability for linear systems with time-varying delays[J]. International of Journal of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(7): 1922 – 1930.

[10] ZHU X L, YANG G H. New results of stability analysis for systems with time-varying delay[J]. International of Journal of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(5): 596 – 606.

[11] Park P G, Ko J W. Stability and robust stability for systems with a time-varying delay[J]. Automatica, 2007, 43(10): 1855 – 1858.

[12] ZENG H B, HE Y, WU M. Complete delay-decomposing approach to asymptotic stability for neural networks with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2011, 22(5): 806 – 812.

[13] Pavlovi′c G, Jankovi′c S. Razumikhin-type theorems on general decay stability of stochastic functional differential equations with infinite delay[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2012, 236(7): 1679 – 1690.

[14] HAN Q L. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity[J]. Automatica, 2005, 41(12): 2171 – 2176.

[15] SUN J, LIU G P, CHEN J, et al. Improved delay-range dependent stability criteria for linear systems with time varying delays[J]. Automatica, 2010, 46(2): 466 – 470.

[16] WU F, HU S. Razumikhin-type theorems on general decay stability and robustness for stochastic functional differential equations[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2012, 22(7): 763 – 777.

[17] Balasubramaniam P, Nagamani G. A delay decomposition approach to delay-dependent passivity analysis for interval neural networks with time-varying delay[J]. Neurocomputing, 2011, 74(10): 1646 – 1653.

[18] WANG C, SHEN Y. Delay partitioning approach to robust stability analysis for uncertain stochastic systems with interval time-varying delay[J]. IET Control Theory and Applications, 2012, 6(7): 875 – 883.

[19] ZHANG X M, HAN Q L. New Lyapunov-Krasovskii functional for global asymptotic stability of delayed neural networks[J]. IEEE Transaction on Neural Networks, 2009, 20(3): 533 – 539.

作者简介

张　俊　女,1978 年 9 月生于湖南吉首市,副教授,现为中南大学信息科学与工程学院博士生,主要从事网络控制技术、智能控制等方面的研究.
E-mail:linecon78@163.com

罗大庸　男,1944 年 10 月生于湖南长沙市,教授,博士生导师. 1962 年毕业于中南矿冶学院控制系,其后在中南大学任教,主要从事控制理论与控制工程,信息融合技术、综合自动化等方面的研究.
E-mail:dyluo@mail.csu.edu.cn