

低幂平均列相关性测量矩阵构造算法

李哲涛^{1,2,3}, 潘 田^{1,3}, 朱更明⁴, 裴廷睿^{1,3}

(1.湘潭大学信息工程学院,湖南湘潭 411105;2.国防科学技术大学计算机学院,湖南长沙 410073;
3.湘潭大学智能计算与信息处理教育部重点实验室,湖南湘潭 411105;4.湖南科技大学计算机科学与工程学院,湖南湘潭 411201)

摘 要: 压缩感知是一种新的信号描述、采样和重构理论,其核心问题包括测量矩阵的选择和构造以及重构算法设计.本文首先提出感知矩阵幂平均列相关性定义,进而得出测量矩阵的择优原则;然后依据等角紧框架理论和特征向量近似法,提出新的测量矩阵构造算法,减小感知矩阵的幂平均列相关性.实验结果表明,本文算法达到了降低感知矩阵列相关性的目的.另外,当重构算法相同时,采用本文算法得到的测量矩阵比采用 Gaussian、Elad、Xu 和 Vahid 算法得到测量矩阵的重构错误率要低.

关键词: 压缩感知; 测量矩阵; 列相关性; 等角紧框架

中图分类号: TP393

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2014)07-1360-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.07.017

A Construction Algorithm of Measurement Matrix with Low Power Average Column Coherence

LI Zhe-tao^{1,2,3}, PAN Tian^{1,3}, ZHU Geng-ming⁴, PEI Ting-rui^{1,3}

(1. The College of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, China;

2. School of Computer, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China;

3. Key Laboratory of Intelligent Computing & Information Processing of Ministry of Education, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, China;

4. School of Computer Science & Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan, Hunan 411201, China)

Abstract: Compressed sensing is a theory for signal description, sampling and reconstruction, the core issues of which are selection and construction of measurement matrix as well as reconstruction algorithm. This paper firstly presents the definition of sensing matrix with power average column coherence, and gets the preferential principle of measurement matrix according to the power average column coherence; then a construction algorithm of measurement matrix based on equiangular tight frame (ETF) and approximation method of eigenvector is proposed to decrease column coherence of sensing matrix. Experimental results show that the proposed algorithm decreases the coherence of sensing matrix efficiently. Meanwhile, the proposed algorithm obtains lower reconstruction error ratio compared with Gaussian, Elad's, Xu's, and Vahid's method with the same reconstruction algorithm.

Key words: compressed sensing; measurement matrix; column coherence; equiangular tight frame

1 引言

在 Nyquist 采样定理中,为了避免信号失真,其采样频率必须大于或等于信号带宽的两倍.压缩感知(Compressed Sensing, CS)^[1~4]突破了 Nyquist 采样定理对采样频率的限制,实现了信号采样和压缩的同步,受到模式识别、雷达探测、图像压缩与重建^[5]等领域学者们的广泛关注.CS 理论数学模型是:假定信号 $x \in R^n$ 存在稀疏

变换 $x = \Psi\alpha$, $\alpha \in R^k$ 为稀疏矢量, $\|\alpha\|_0 \ll n$, $\Psi \in R^{n \times k}$ 为字典矩阵.可通过测量矩阵 $\Phi \in R^{m \times n}$ ($m \ll n$) 获得测量值 $y \in R^m$, $y = \Phi x = \Phi\Psi\alpha$, $\Theta = \Phi\Psi$ 为感知矩阵.由观测值 y 恢复信号 x ,可描述为 L_0 问题:

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \tag{1}$$
$$\text{s.t. } y = \Phi x = \Phi\Psi\alpha$$

精确求解式(1)是 NP 难问题^[6],但采用逼近方法可得

到近似解,如基追踪算法(Basis Pursuit, BP)^[7]和正交匹配追踪算法(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)^[8].

在 CS 理论中,测量矩阵的列相关性不仅对信号的压缩采样过程有着重要的影响,也间接影响重构效果的好坏和重构速度的快慢.目前典型的测量矩阵 Φ 构造的算法有 Elad^[9]、Xu^[10]和 Vahid^[11]的方法. Elad 首次利用逐步迭代缩减由 Φ 构造的 Gram 矩阵中非对角线元素,重复迭代使感知矩阵 t 平均相关性逐步减小,最后得到优化的 Φ . 该算法构造的测量矩阵重构错误率较低. Xu 和 Vahid 的算法采用逼近方法逐步将 Φ 逼近等角紧框架(Equiangular Tight Frame, ETF)^[12]. Xu 提出依据 ETF 理论改变 Gram 矩阵中非对角线元素,使得感知矩阵逼近 ETF. 该算法构造的测量矩阵重构错误率比 Elad 算法低. Vahid 算法先依据 ETF 理论改变 Gram 矩阵中非对角线元素,然后使用梯度迭代法将 Gram 矩阵还原为 Φ . 该算法构造的测量矩阵重构错误率比 Xu 的算法略有优势.

本文首先提出幂平均列相关性定义和测量矩阵择优原则. 然后依据 ETF 理论改变 Gram 矩阵非对角线元素值,采用特征值分解法分解 Gram 矩阵,将 Gram 矩阵还原为 Φ . 再通过令分解后特征向量矩阵的前 m 行为新的 Φ ,进而求出优化的 Φ . 该算法得到的 Φ 幂平均列相关性比 Elad、Xu 和 Vahid 方法明显降低,符合测量矩阵择优原则. 对比性实验也表明:采用相同的重构算法时,本文算法构造的测量矩阵比 Elad、Xu 和 Vahid 构造的测量矩阵的重构错误率低.

2 幂平均列相关性和测量矩阵择优原则

定义 1 感知矩阵 $\Theta \in \mathbf{R}^{m \times k}$ 的列相关性最大值^[13]

$$\mu_{\max}\{\Theta\} = \max_{1 \leq i, j \leq k \text{ 且 } i \neq j} \frac{|\Theta_i^T \Theta_j|}{\|\Theta_i\| \cdot \|\Theta_j\|} \quad (2)$$

$\mu_{\max}\{\Theta\}$ 表示 Θ 中列相关性中最大值. 通过减小感知矩阵列相关性最大值构造重构性能更优的测量矩阵的理论依据是:若 α 满足 $\|\alpha\|_0 \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu_{\max}\{\Theta\}}\right)$, 则 α 必然是式(1)的解,逼近算法能精确重构 $\mathbf{x}^{[14]}$. 可见,减小 $\mu_{\max}\{\Theta\}$, 可重构非零信号的数目将增大,重构性能提高. 因此,为了实现高准确率的重构原始信号,要求构造测量矩阵时使感知矩阵列不相关或尽可能减小列相关性.

定义 2 感知矩阵 $\Theta \in \mathbf{R}^{m \times k}$ 的幂平均列相关性

$$\mu_{\beta}\{\Theta\} = \sqrt[\beta]{\frac{\sum_{1 \leq i, j \leq k, i \neq j} \left(\frac{|\Theta_i^T \Theta_j|}{\|\Theta_i\| \cdot \|\Theta_j\|} \right)^{\beta}}{k(k-1)}} \quad \beta \in [1, +\infty) \quad (3)$$

$\mu_{\beta}\{\Theta\}$ 越大,列相关性中数值大的元素越多;

$\mu_{\beta}\{\Theta\}$ 越小,列相关性中数值大的元素越少. 随 β 值增大, $\mu_{\beta}\{\Theta\}$ 判别列相关性中数值大的元素多少的能力越强. 易证,当 β 趋于 $+\infty$ 时, $\mu_{\beta}\{\Theta\}$ 趋于 $\mu_{\max}\{\Theta\}$.

通过对比定义 1 和定义 2,发现仅采用减小列相关性最大值的方法来构造测量矩阵不够全面. 压缩感知重构算法通常要求感知矩阵任意两列之间的列相关性都较小,才能较好的重构原始信号. 通过调整幂平均列相关性 $\mu_{\beta}\{\Theta\}$ 中的 β 值, $\mu_{\beta}\{\Theta\}$ 可以更多反映出感知矩阵任意两列之间相关性的大小.

因此,可根据 $\mu_{\beta}\{\Theta\}$ 得出测量矩阵的择优原则: β 从大到小依次类推,当 $\mu_{\beta}\{\Theta\}$ 不同时, $\mu_{\beta}\{\Theta\}$ 较小的感知矩阵包含列相关性数值大的元素更少,测量矩阵性能更优;当 $\mu_{\beta}\{\Theta\}$ 相同时, $\mu_{\beta-1}\{\Theta\}$ 较小的感知矩阵包含列相关性数值大的元素更少,测量矩阵性能更优.

3 低幂平均列相关性测量矩阵构造

若将感知矩阵 $\Theta \in \mathbf{R}^{m \times k}$ 归一化,构造 Gram 矩阵 $\mathbf{G} = \Theta^T \Theta$, 则式(3)可等价于:

$$\mu_{\beta}\{\Theta\} = \sqrt[\beta]{\frac{\sum_{1 \leq i, j \leq k, i \neq j} |g_{ij}|^{\beta}}{k(k-1)}} \quad \beta \in [1, +\infty) \quad (4)$$

假定 Gram 矩阵 \mathbf{G} 中非对角线元素值相等,感知矩阵 Θ 可称作 ETF. 在 ETF 情况下,对于任意 β 值, $\mu_{\beta}\{\Theta\}$ 均相等. 若 $\mu_{\beta}\{\Theta\}$ 为 ETF 下界^[15], 即 $\mu_{\beta}\{\Theta\} = \sqrt{\frac{k-m}{m(k-1)}}$, 则列相关性最小^[16], 是为最优感知矩阵. 故在构造测量矩阵时,为使 Θ 近似 ETF 矩阵,可通过式(5)缩减 Gram 矩阵 \mathbf{G} 中的元素,

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ g_{ij}, & |g_{ij}| < \sqrt{\frac{k-m}{m(k-1)}} \\ \text{sign}(g_{ij}) \sqrt{\frac{k-m}{m(k-1)}}, & |g_{ij}| \geq \sqrt{\frac{k-m}{m(k-1)}} \end{cases} \quad (5)$$

获取优化的 Gram 矩阵 \mathbf{G}_{new} :

$$\mathbf{G}_{\text{new}} = \{ \mathbf{G} \in \mathbf{R}^{k \times k} : \mathbf{G} = \mathbf{G}^T, \text{diag}(\mathbf{G}) = 1, \max |g_{ij}| \leq \sqrt{\frac{k-m}{m(k-1)}}, i \neq j \} \quad (6)$$

在由 \mathbf{G}_{new} 构造优化的感知矩阵 Θ_{new} 时,本文算法采用特征向量近似法.

首先,将 \mathbf{G}_{new} 做特征值分解:

$$\mathbf{V} \mathbf{G}_{\text{new}} = \mathbf{U} \mathbf{V} \quad (7)$$

正交矩阵 $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{k \times k}$ 为 \mathbf{G}_{new} 的特征向量矩阵, $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{k \times k}$ 为对角线矩阵,其对角线上元素是 \mathbf{G}_{new} 的特征值. 根据式(7)和 $\Theta_{\text{new}}^T \Theta_{\text{new}} = \mathbf{G}_{\text{new}}$ 可得:

$$\Theta_{\text{new}}^T \Theta_{\text{new}} = \mathbf{V}^T \mathbf{U} \mathbf{V} \quad (8)$$

为使 Θ_{new} 的列相关性趋向于 0, 可令 \mathbf{U} 为单位矩

阵 E , 则式(8)可改写为:

$$\Theta_{\text{new}}^T \Theta_{\text{new}} = V^T E V = E \quad (9)$$

$V^T V$ 是列相关性为 0 的 ETF 矩阵, 因此, 令 $\Theta_{\text{new}} = V$, 则 $\mu_{\beta}\{\Theta_{\text{new}}\}$ 为 0. 因为此时得出的 $\Theta_{\text{new}} \in \mathbf{R}^{k \times k}$ 与 $\Theta \in \mathbf{R}^{m \times k}$ 维度不同, 可令 $\hat{\Theta}_{\text{new}}$ 为特征向量矩阵 V 的前 m 行, 对 Θ_{new} 进行降维, 得到的 $\hat{\Theta}_{\text{new}}$ 仍接近 ETF 矩阵, 具有 $\mu_{\beta}\{\hat{\Theta}_{\text{new}}\}$ 较小的特点.

最后, 令 $\hat{\Theta}_{\text{new}}$ 等于 Θ_{new} , 便得到优化的感知矩阵.

求解式(10), 可得优化的测量矩阵 Φ_{new} :

$$\Phi_{\text{new}} = \arg \min \|\Theta_{\text{new}} - \Phi_{\text{new}} \Psi\|_F^2 \quad (10)$$

低幂平均列相关性测量矩阵构造算法如算法 1.

算法 1 低幂平均列相关性测量矩阵构造算法

输入: 字典矩阵 $\Psi^{m \times k}$, ETF 下界 $\mu = \sqrt{\frac{k-m}{m(k-1)}}$, 迭代次数 Iter, 迭代

变量 K

初始化: 生成高斯矩阵 $\Phi^{m \times n}$, $K=0$

步骤:

1. 根据 Ψ 和 Φ 计算感知矩阵 Θ 和 Gram 矩阵 G ;
2. 对 G 进行归一化处理;
3. 更新 Gram 矩阵 G_{new} 非对角线元素, 使 G_{new} 接近 ETF;
4. 将优化的 Gram 矩阵 G_{new} 特征值分解, 即 $VG_{\text{new}} = UV$;
5. 更新 Θ_{new} 为 V 前 m 行;
6. 更新 Φ^{K+1} 为 $\Theta_{\text{new}} \Psi^{-1}$;
7. 令 $K = K + 1$. 若 $K < \text{Iter}$, 跳转至步骤 1; 否则, $\Phi_{\text{new}} = \Phi_K$, 结束.

输出: 优化后测量矩阵 Φ_{new}

4 实验结果与分析

4.1 符号定义和参数说明

未优化测量矩阵为高斯随机矩阵 $\Phi^{m \times n}$, 字典矩阵为高斯字典矩阵 $\Psi^{m \times k}$, 稀疏矢量矩阵为 $\alpha^{k \times N}$, 其中 $N = 100000$. 观测值数目 m , n 和 k 将根据实验需要取不同取值. 各算法迭代次数取 1000.

4.2 列相关性定性对比与分析

当 $m = 30$, $n = 200$ 和 $k = 400$ 时, 列相关性分布的对比如图 1 所示.

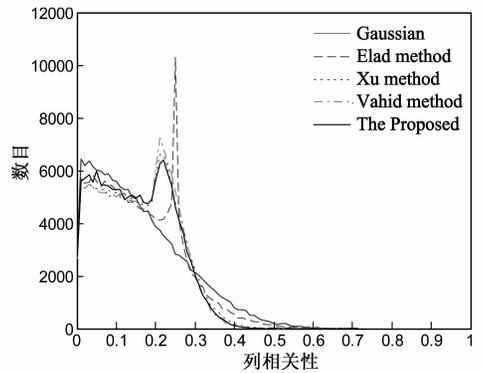


图1 列相关性分布对比

图 1 显示, 在感知矩阵列相关性较小的 0-0.2 段, 本文算法比 Elad、Xu 和 Vahid 的元素多. 在列相关性较大的 0.3-0.8 段, 本文算法比 Gaussian、Elad、Xu 和 Vahid 的元素少. 可见, 本文算法更好的降低了感知矩阵的列相关性.

4.3 列相关性定量对比与分析

图 2(a)(b) 和 (c) 为 $n = 80$, $k = 120$, m 取不同值时, 正无穷次、1 次和 2 次幂平均列相关性对比.

图 2(a) 显示, 随观测数目 m 增加, Gaussian、Elad、Xu、Vahid 和本文算法的 $\mu_{+\infty}\{\Theta\}$ 和 ETF 下界都逐步降低. 本文算法的 $\mu_{+\infty}\{\Theta\}$ 与 Xu 和 Vahid 算法相近, 但明显小于 Gaussian 和 Elad 的算法. 当 m 等于 30, 即采样率为 25% 时, 本文算法的 $\mu_{+\infty}\{\Theta\}$ 比 Gaussian、Elad 和 Xu 的算法分别降低 49%、10% 和 1%.

图 2(b) 显示, 当观测数目 m 等于 16 时, Gaussian、Elad、Xu 和 Vahid 的 $\mu_1\{\Theta\}$ 相同且大于本文算法的 $\mu_1\{\Theta\}$. 随着 m 值增加, Elad、Xu、Vahid 和本文算法都起到降低 $\mu_1\{\Theta\}$ 的效果, 但本文算法的 $\mu_1\{\Theta\}$ 降低效果更明显. 当 m 等于 30 时, 本文算法的 $\mu_1\{\Theta\}$ 比 Gaussian、Elad、Xu 和 Vahid 的算法分别降低 12%、5%、5% 和 5%.

图 2(c) 显示, 本文算法的 $\mu_2\{\Theta\}$ 比 Gaussian、Elad、Xu 和 Vahid 算法低. 如当 m 等于 30 时, 本文算法的

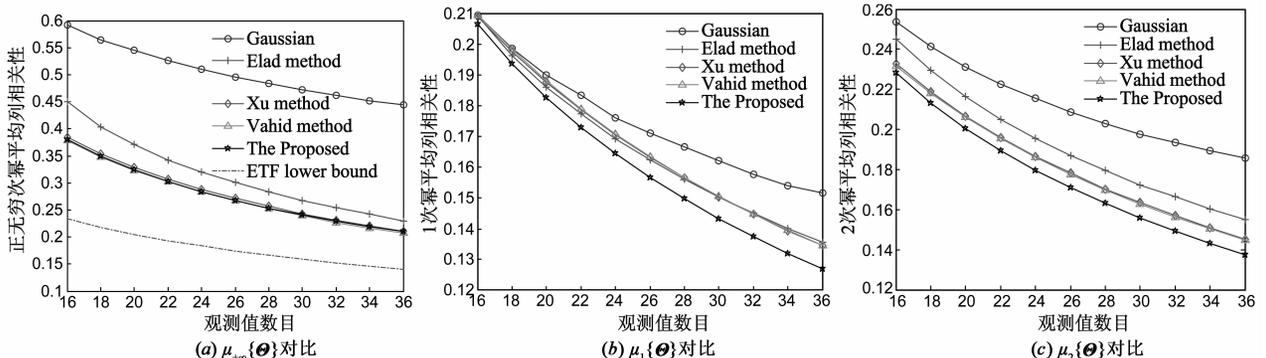


图2 正无穷次、1次和2次幂平均列相关性对比

$\mu_2\{\Theta\}$ 比 Gaussian、Elad、Xu 和 Vahid 算法分别降低 21%、10%、5% 和 4%。由此可见,本文算法感知矩阵幂平均列相关性比其他测量矩阵更小,能更好的满足重构需要。

4.4 不同采样率时算法运行时间对比与分析

当 $n = 200$ 和 $k = 400$, m 取不同值时,用双核 2.5GHz、2G 内存计算机对高斯矩阵通过四种算法进行单次优化,不同采样率运行时间对比如图 3 所示。四种算法复杂度的不同之处主要体现在 Gram 矩阵缩减方法和 Gram 矩阵求解测量矩阵方法。

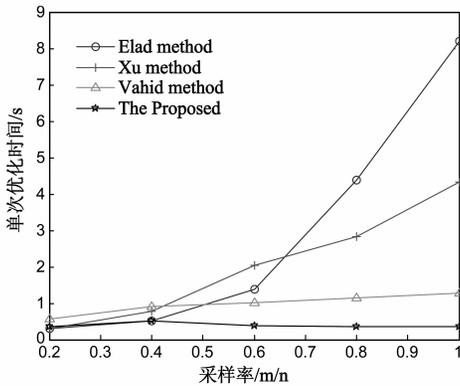


图3 单次优化运行时间对比

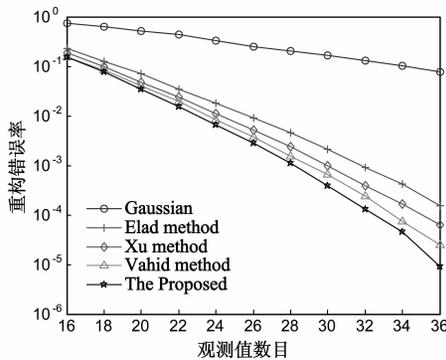
图 3 显示,Elad、Xu 和 Vahid 算法运行时间随采样率增加而增加,本文算法运行时间随采样率增加基本

不变.这是因为本文算法中 Gram 矩阵求解测量矩阵步骤基本不受采样率影响,其他三种算法受采样率影响较大.另外,Xu、Vahid 和本文算法的 Gram 矩阵缩减方法相同,但本文算法由感知矩阵得到测量矩阵过程比 Elad、Xu 和 Vahid 的方法更简单。

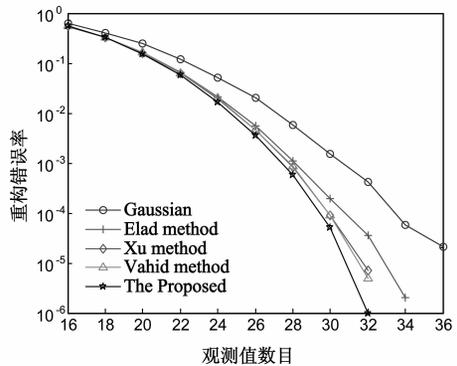
4.5 重构错误率对比与分析

为验证本文算法构造的测量矩阵的重构性能,采用 OMP 和 BP 算法做重构错误率对比实验.当重构信号与原始信号相对误差超过 10^{-3} 时为重构错误。 α 每一列非零元素的个数为 T 且位置随机.图 4(a)和图 4(b)是当 $T = 4$, $n = 80$, $k = 120$, m 取不同值时,对不同测量矩阵 OMP 和 BP 算法重构错误率对比;图 4(c)和图 4(d)是当 $m = 25$, $n = 80$, $k = 120$, T 取不同值时,对不同测量矩阵 OMP 和 BP 算法重构错误率对比。

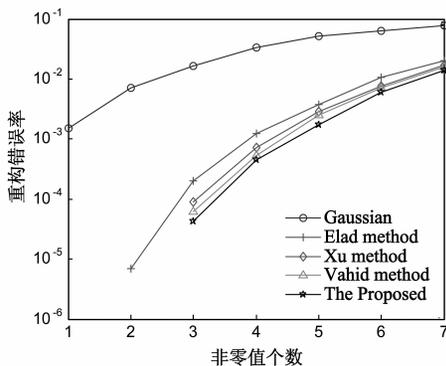
图 4 显示,Elad、Xu、Vahid 和本文算法构造的测量矩阵都能不同程度的降低重构错误率,但本文算法重构错误率最低.图 4(a)和图 4(b)显示当观测数目 m 等于 30 时,本文算法构造的测量矩阵比 Gaussian、Elad、Xu 和 Vahid 的测量矩阵的 BP 算法重构错误率分别降低 97%、73%、44% 和 43%,OMP 算法重构错误率分别降低 99%、82%、61% 和 39%。图 4(c)和图 4(d)显示,随 T 值增加,即原始信号的稀疏度增加,OMP 和 BP 算法的



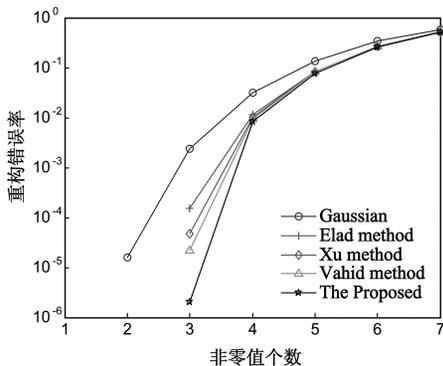
(a) 不同观测值数目的OMP算法重构错误率



(b) 不同观测值数目的BP算法重构错误率



(c) 不同稀疏度的OMP算法重构错误率



(d) 不同稀疏度的BP算法重构错误率

图4 重构错误率对比

重构错误率明显增高。因为 T 值增加, 而观测数目未随之增加, 导致 OMP 和 BP 算法重构性能降低, 重构错误率增高。与图 4(a) 和图 4(b) 实验结果一致, 本文算法构造的测量矩阵比 Gaussian、Elad、Xu 和 Vahid 的测量矩阵重构错误率低, 重构性能好。当稀疏度减小时, 本文算法构造的测量矩阵优势更为明显。

5 总结

本文首先提出了幂平均列相关性定义并通过理论分析得出了测量矩阵择优原则, 然后从 ETF 和特征值分解减小感知矩阵幂平均列相关性的角度出发, 提出对随机测量矩阵进行优化的方法。实验对比分析了 Gaussian、Elad、Xu、Vahid 和本文测量矩阵的感知矩阵列相关性。通过测量矩阵的重构错误率实验对比, 验证了本文算法的优越性。

参考文献

- [1] E J Candes, et al. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 5(2): 489 - 509.
- [2] ZheTao Li, et al. Sparse signal recovery by stepwise subspace pursuit in compressed sensing [J]. International Journal of Distributed Sensor Networks, 2013, 2013(8): 798537.
- [3] 焦李成, 杨淑媛, 刘芳, 侯彪. 压缩感知回顾与展望 [J]. 电子学报, 2011, 39(1): 18 - 22.
Jiao Licheng, Yang Shuai, Liu Fang, Hou Biao. Development and prospect of compressive sensing [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 18 - 22. (in Chinese)
- [4] 杨海蓉, 张成, 丁大为, 韦穗. 压缩传感理论与重构算法 [J]. 电子学报, 2011, 39(1): 142 - 148.
Yang Hairong, Zhang Cheng, Ding Dawei, Wei Sui. The theory of compressed sensing and reconstruction algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 142 - 148. (in Chinese)
- [5] ZheTao Li, et al. Compressed sensing based on best wavelet packet basis for image processing [J]. Journal of Computers, 2013, 8(8): 1947 - 1950.
- [6] B K Natarajan. Sparse approximate solutions to linear systems [J]. SIAM Journal of Computing, 1995, 24(2): 227 - 234.
- [7] D L Donoho. Compressive sensing [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
- [8] J A Tropp, A C Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2007, 53(12): 4655 - 4666.
- [9] M Elad. Optimized projections for compressed sensing [J]. IEEE Trans on Signal Process, 2007, 55(12): 5695 - 5702.
- [10] Jianping Xu, Yiming Pi, Zongjie Cao. Optimized projection matrix for compressive sensing [J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2010, 43(2): 1 - 8.

- [11] V Abolghasemi, S Ferdowsi, S Sanei. A gradient-based alternating minimization approach for optimization of the measurement matrix in compressive sensing [J]. Signal Process, 2012, 92(4): 999 - 1009.
- [12] M Sustik, J Tropp, I Dhillon, R Heath. On the existence of equiangular tight frames [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2007, 426(2 - 3): 619 - 635.
- [13] R Gribonval, M Nielsen. Sparse representations in unions of bases [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2003, 49(12): 3320 - 3325.
- [14] D L Donoho, M Elad. Optimally sparse representation in general (non - orthogonal) dictionaries via l_1 minimization [J]. Proceedings of National Academy of Sciences of USA, 2003, 100(5): 2197 - 2202.
- [15] T Strohmer, R Heath. Grassmannian frames with application to coding and communication [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2003, 14(3): 257 - 275.
- [16] S Sardy, A Bruce, P Tseng. Block coordinate relaxation methods for non-parametric wavelet denoising [J]. Journal of Computational and Graphical Statistics, 2000, 9(2): 361 - 379.

作者简介



李哲涛 男, 1980 年 1 月生, 湖南邵阳人。博士, 副教授。湘潭大学信息工程学院硕士生导师。主要研究方向为压缩感知、无线网络数据收集。
E-mail: chu5044130@sohu.com



潘田 男, 1990 年 10 月生, 湖南怀化人。湘潭大学信息工程学院硕士研究生。主要研究方向为多媒体信号处理、压缩感知。
E-mail: pantian_wnds@sina.com



朱更明(通信作者) 男, 1967 年出生。湖南科技大学计算机科学与工程学院硕士生导师, 教授。主要研究方向为信号处理、音视频技术。
E-mail: gengmingzhu@gmail.com