

# 基于秩亏傅里叶变换的交替投影编码波形设计

赵宜楠, 李凤从, 王 军, 乔晓林

(哈尔滨工业大学电子与信息工程学院, 黑龙江哈尔滨 150001)

**摘 要:** 本文提出了一种在设定区间具有极低功率谱和自相关幅值的恒模波形设计方法. 该方法首先将波形设计的信号模型转化为相位提取问题, 通过定义三个代表不同设计目标和约束的集合, 利用交替投影的方法来实现波形优化. 由于利用了色噪声协方差矩阵与功率谱的近似关系, 算法中基于秩亏傅里叶变换矩阵的投影算子能由快速傅里叶变换高效实现, 提高了计算效率. 最后, 计算机仿真验证了算法的有效性. 算法所设计的波形可用于雷达、声呐和无线通信系统, 以抑制色噪声、有源干扰和距离旁瓣干扰.

**关键词:** 波形设计; 相位编码; 色噪声抑制; 交替投影; 秩亏傅里叶变换

**中图分类号:** TN957.51      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2014)06-1216-04

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.06.027

## Coded Waveform Design via Alternating Projection Based on Rank Deficient Fourier Transform

ZHAO Yi-nan, LI Feng-cong, WANG Jun, QIAO Xiao-lin

(School of Electronics and Information Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

**Abstract:** A method is presented to design constant modulus waveforms with low magnitude of power spectral density and autocorrelation in desired intervals. The waveform design problem is transformed into a phase retrieval one, and three sets corresponding to different design objects and constraints are defined. The waveform optimization problem is solved via alternating projection. According to the relationship between the covariance matrix and the power spectral density of the colored noise, the projector used in the algorithm is implemented efficiently based on fast Fourier transformation. Thus the computational efficiency is improved. Finally, the numerical simulations demonstrate the effectiveness of this algorithm. The waveforms designed by this algorithm can be used in radar, sonar, and wireless communication systems to suppress colored noise, active interference and range sidelobes.

**Key words:** waveform design; phase code; colored noise suppression; alternating projection; rank deficient Fourier transform

## 1 引言

随着无线电技术的发展,越来越多的民用和军用无线应用使有限的频谱资源变得更加紧张. 对于宽带系统,其工作频段内很可能出现友方或敌方无线设备的干扰,传统的抗干扰方法是在接收端通过相应的信号处理算法进行干扰抑制. 然而,理论研究表明,合理的波形设计是对抗干扰的最有效方法<sup>[1]</sup>. 随着技术的进步,在线波形设计已逐渐成为可能<sup>[2]</sup>. 通过在频率上分配波形能量,让信号主动避开强干扰频段,即可实现干扰抑制,这样的波形设计实际上是功率谱合成问题<sup>[3]</sup>. 文献[4]提出一种算法,通过对已有波形的相位进行最小调整,在功率谱上形成凹口. 由于相位调整量被减至最小,使得原波形的模糊函数特性得到了尽可能的保留. 然而,由于没有对自相关进行显式约束,不能保证自相关主瓣宽

度和旁瓣深度具有满意的特性<sup>[5]</sup>. 针对这一问题,文献[6]提出在设计波形功率谱的同时对自相关全部旁瓣进行约束的方法. 由于自相关和功率谱互耦,优化算法无法同时使两者达到最优,需要折中.

对于很多应用,系统只要求波形自相关旁瓣在某些区间具有较低幅值<sup>[7]</sup>. 波形设计自由度得以提高,可获得更理想的自相关和功率谱. 本文提出一种波形设计方法,利用理想功率谱、理想自相关和恒模约束集合间的交替投影实现波形优化.

## 2 信号模型

恒模波形的优异特性使其得到了广泛应用<sup>[8]</sup>. 恒模相位编码波形的离散基带形式可表示为

$$s = \exp(j \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\psi})) \mathbf{1} \quad (1)$$

其中

$$\boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_N]^T \quad (2)$$

$$\text{diag}(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{I} \odot \mathbf{1} \boldsymbol{\psi}^T = \begin{pmatrix} \psi_1 & & & \\ & \psi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \psi_N \end{pmatrix} \quad (3)$$

$(\cdot)^T$  为转置,  $\exp$  为矩阵指数函数,  $\odot$  为 Hadamard 积,  $(\mathbf{1})$  和  $\mathbf{I}$  分别为具有合适尺寸全 1 列向量和单位阵,  $N$  为码元总数. 令  $\mathbf{w}$  为零均值加性色噪声向量, 其协方差矩阵为

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}\{\mathbf{w}\mathbf{w}^H\} \quad (4)$$

其中  $\mathbf{E}\{\cdot\}$  为期望算子,  $(\cdot)^H$  为共轭转置. 抑制色噪声的波形设计目标函数为

$$J(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^H \mathbf{R} \mathbf{s} \quad (5)$$

文献[9]指出, 约束波形总能量时,  $\mathbf{R}$  最小特征值的特征向量对应最优波形. 由于未约束幅度和自相关, 这样得到的最优波形并不实用<sup>[10]</sup>. 当色噪声带宽远小于波形带宽时,  $\mathbf{R}$  的全部奇异值中只有少数几个较大. 因此, 将  $\mathbf{s}$  放到  $\mathbf{R}$  较小奇异值对应的子空间可获得较好的性能. 相比直接使用最小特征值的特征向量, 并非最优, 但增加了波形设计自由度, 可对幅度和自相关进行更好的约束. 对  $\mathbf{R}$  进行奇异值分解(SVD)有

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^H \quad (6)$$

其中  $\mathbf{D}$  为奇异值阵, 即

$$\mathbf{D} = \text{diag}([d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_N]^T), d_1 > d_2 > \cdots > d_N \quad (7)$$

设定门限  $\bar{d}$ , 令  $\tilde{\mathbf{U}}$  为所有大于等于的奇异值对应的左奇异向量构成的矩阵. 由 SVD 的性质, 波形优化问题可表示为

$$\min_{\mathbf{s}} \mathbf{s}^H \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{U}}^H \mathbf{s} \quad (8)$$

相比式(5)确定的一维子空间, 式(8)解为  $\mathbf{s} \in \text{null}(\tilde{\mathbf{U}}^H)$ , 波形设计自由度得到了提升, 其中  $\text{null}$  代表零空间.

### 3 基于交替投影的波形设计算法

由上一节知, 波形设计可描述为合成具有指定自相关的恒模波形, 使其在  $\text{null}(\tilde{\mathbf{U}}^H)$  中的分量尽可能大, 属于相位提取问题<sup>[11]</sup>, 可采用交替投影求解. 定义三个集合:  $\text{null}(\tilde{\mathbf{U}}^H)$ 、恒模波形集合  $A$  以及具有指定自相关的波形集合  $B$ . 理想情况下, 任何位于  $A \cap B \cap \text{null}(\tilde{\mathbf{U}}^H)$  中的向量都是波形优化的解. 可实际上, 三者交集常为空集, 此时设计波形应位于  $A$  中, 同时离  $B$  和  $\text{null}(\tilde{\mathbf{U}}^H)$  具有最近的距离.

用  $\text{proj}_{\text{null}(\tilde{\mathbf{U}}^H)}$ 、 $\text{proj}_A$ 、 $\text{proj}_B$  分别代表三个集合的投影算子, 交替投影迭代公式为

$$\mathbf{s}_{k+1} = \text{proj}_A(\text{proj}_{\text{null}(\tilde{\mathbf{U}}^H)}(\text{proj}_B(\mathbf{s}_k))) \quad (9)$$

### 3.1 基于秩亏傅里叶变换矩阵的功率谱约束集合投影算子

$\mathbb{C}^{N \times 1}$  中任一向量  $\boldsymbol{\beta}$  到  $\text{null}(\tilde{\mathbf{U}}^H)$  的投影算子为

$$\text{proj}_{\text{null}(\tilde{\mathbf{U}}^H)}(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{U}}^H \tilde{\mathbf{U}})^{-1} \tilde{\mathbf{U}}^H) \boldsymbol{\beta} \quad (10)$$

实际应用中, 常需数千次投影才能得到较理想的波形, 采用式(10)计算量太大. 由于  $\mathbf{R}$  是半正定共轭对称阵, 式(6)的 SVD 可由离散傅里叶变换(DFT)近似<sup>[8]</sup>, 即

$$\mathbf{F}^H \cdot \text{diag}(\mathbf{p}_{\text{noise}}) \cdot \mathbf{F} \approx \mathbf{R} \quad (11)$$

其中  $\mathbf{F}$  为具有合适尺寸的单位 DFT 阵, 其行向量为  $\mathbf{R}$  特征向量的近似,  $\mathbf{p}_{\text{noise}}$  为色噪声功率谱采样, 为  $\mathbf{R}$  特征值的近似.  $\mathbf{p}_{\text{noise}}$  中取值较大元素对应  $\mathbf{F}$  行向量张成的子空间, 是对  $\text{range}(\tilde{\mathbf{U}})$  的近似. 这样就能用高效的 FFT 近似实现式(10)的投影算子. 由于  $R$  维数越高则式(11)近似效果越好, 以下采用  $2N$  阶 DFT 阵, 同时令

$$\tilde{\mathbf{s}} = [\mathbf{s}^T \quad \mathbf{0}_{1 \times N}]^T \quad (12)$$

其中  $\mathbf{0}_{1 \times N}$  为  $1 \times N$  的全零向量. 强噪声基带归一化频率构成的集合用  $\Omega$  表示. 定义  $Q_f$

$$Q_f = \{2Nf; f \in \Omega\} \quad (13)$$

其中  $\lfloor \cdot \rfloor$  为向下取整. 定义  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \text{diag}(\mathbf{h}) \quad (14)$$

其中

$$(\mathbf{h})_k = \begin{cases} 1, & k \in Q_f \\ 0, & k \notin Q_f \end{cases}, \quad k = 0 \cdots 2N \quad (15)$$

$\text{range}(\mathbf{H}\mathbf{F})$  为  $\text{range}(\tilde{\mathbf{U}})$  的近似, 其中  $\text{range}$  代表值域空间. 将这种由 0 和 1 构成的对角阵与  $\mathbf{F}$  相乘的结果称为秩亏傅里叶变换阵.  $\text{null}(\mathbf{H}\mathbf{F})$  的投影算子为

$$\text{proj}_{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{I} - \mathbf{F}^H \mathbf{H} \mathbf{F}) \boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}^H (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{F} \boldsymbol{\beta} \quad (16)$$

交替投影中, 以式(16)所示投影算子替代式(10). 由于  $\mathbf{I} - \mathbf{H}$  是由 0 和 1 构成的对角阵, 因此  $(\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{F}$  也是秩亏傅里叶变换阵.

### 3.2 恒模约束和自相关优化

假设存在一理想波形, 其自相关具有指定特性. 因为自相关与功率谱是傅里叶变换对,  $B$  与  $A$  投影算子的推导可抽象为相同的问题

$$\min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{2N \times 1}} \|\boldsymbol{\beta} - \exp(\mathbf{j} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{r}\| \quad (17)$$

其解为

$$\exp(\mathbf{j} \Phi(\boldsymbol{\beta})) \mathbf{r} \quad (18)$$

其中

$$\Phi(\cdot) = \text{Im}(\ln(\text{diag}(\cdot))) \quad (19)$$

$\ln$  为矩阵对数,  $\text{Im}$  为矩阵虚部. 对于  $A$  的投影, 式(18)中的  $\mathbf{r}$  对应波形幅度约束. 导出  $\text{proj}_A$  为

$$\text{proj}_A(\boldsymbol{\beta}) = \exp(j\Phi(\boldsymbol{\beta}))\mathbf{v} \quad (20)$$

其中

$$\mathbf{v} = [\mathbf{1}_{1 \times N} \quad \mathbf{0}_{1 \times N}]^T \quad (21)$$

对于自相关优化,式(18)中的  $\mathbf{r}$  对应理想波形频谱幅度,导出  $\text{proj}_B$  为

$$\text{proj}_B(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{F}^H \exp(j\Phi(\mathbf{F}\boldsymbol{\beta}))\mathbf{f} \quad (22)$$

其中  $\mathbf{f}$  为理想波形的频谱幅度. 本文算法并不限定某种具体的理想频谱幅度构造方法. 实际应用时可采用文献[12]的方法,对第  $k$  次迭代,有

$$\mathbf{f} = \text{Re}(\text{diag}^{1/2}(\mathbf{F} \cdot \text{diag}(\mathbf{m}) \cdot \bar{\mathbf{a}})) \mathbf{1}_{2N \times 1} \quad (23)$$

其中

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{F}^H((\mathbf{F} \bar{\mathbf{s}}_k) \odot (\mathbf{F} \bar{\mathbf{s}}_k)^*) \quad (24)$$

$$(\mathbf{m})_n = \begin{cases} 1, & n \notin Q_r \\ 0, & n \in Q_r \end{cases} \quad (25)$$

Re 表示矩阵实部,  $Q_r$  为需要抑制的自相关采样点下标集合.

### 3.3 波形设计算法

得到了三个投影算子,即可用式(9)迭代. 此外,将  $\text{proj}_f$  和  $\text{proj}_B$  进行复合可消除冗余的傅里叶变换,即

$$\begin{aligned} (\text{proj}_f \circ \text{proj}_B)(\boldsymbol{\beta}) &= \text{proj}_f(\text{proj}_B(\boldsymbol{\beta})) \\ &= \mathbf{F}^H(\mathbf{I} - \mathbf{H}) \exp(j\Phi(\mathbf{F}\boldsymbol{\beta}))\mathbf{f} \end{aligned} \quad (26)$$

其中  $\circ$  代表算子复合. 迭代公式如下

$$\bar{\mathbf{s}}_{k+1} = \text{proj}_A((\text{proj}_f \circ \text{proj}_B)(\bar{\mathbf{s}}_k)) \quad (27)$$

算法总结如下:

- (1) 设置迭代计数器  $k=0$ , 设置迭代初始值  $\bar{\mathbf{s}}_0$ ;
  - (2) 计算式(27),  $k=k+1$ ;
  - (3) 如果未满足迭代退出条件,返回步骤(2);
  - (4) 取  $\bar{\mathbf{s}}_k$  的前  $N$  个元素构造波形向量  $\mathbf{s}$ ;
- 对于时间充裕的场景,可用

$$\|\bar{\mathbf{s}}_k - \bar{\mathbf{s}}_{k-1}\| < \epsilon \quad (28)$$

作为退出条件,  $\epsilon$  为退出迭代门限. 时间严重受限时,可直接限定最大迭代次数.

若不需要考虑波形自相关,迭代过程中可用下式

$$\bar{\mathbf{s}}_{k+1} = \text{proj}_A(\text{proj}_f(\bar{\mathbf{s}}_k)) \quad (29)$$

若不要求恒模,迭代中使用下式

$$\bar{\mathbf{s}}_{k+1} = (\text{proj}_f \circ \text{proj}_B)(\bar{\mathbf{s}}_k) \quad (30)$$

## 4 数值仿真

**仿真 1** 比较有无恒模约束的设计波形. 本例中,  $Q_r = [6, 36]$ ,  $\Omega = [0.078, 0.234]$ ,  $N = 128$ . 两种情况下的迭代次数均为  $10^4$ , 使用相同的  $\bar{\mathbf{s}}_0$ . 图 1 给出了两种情

况下波形包络. 图 2 给出两个波形自相关和功率谱. 由图 2 可以看出,无恒模约束的设计波形的自相关和功率谱都比恒模波形好. 因此,根据应用的具体需求,对算法进行适当裁剪,可以获得更好的效果.

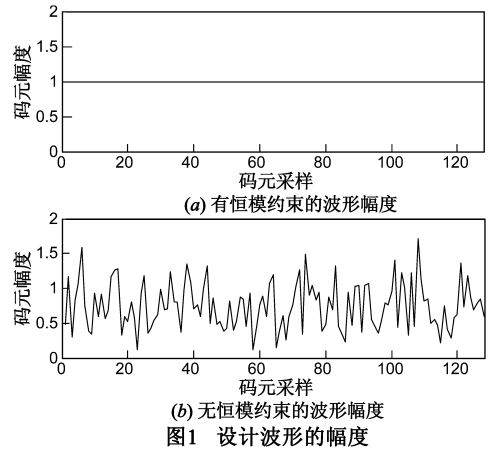


图1 设计波形的幅度

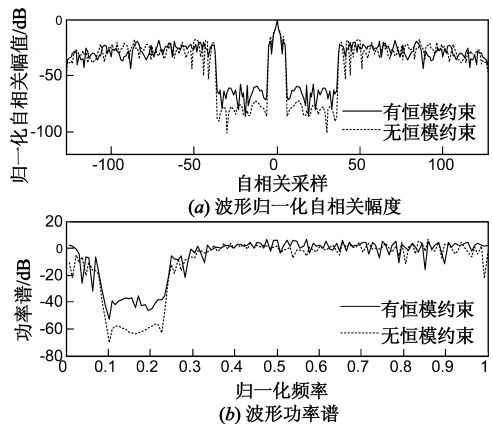


图2 设计波形的自相关和功率谱

**仿真 2** 比较有无自相关约束的设计波形. 设定  $Q_r = [5, 45]$ ,  $\Omega = [0.234, 0.312]$ ,  $N = 128$ . 两种情况下的迭代次数均为  $10^4$ . 由于两者都使用了  $\text{proj}_A$ , 得到的波形是恒模的. 图 3 给出两个波形自相关序列和功率谱的比较.

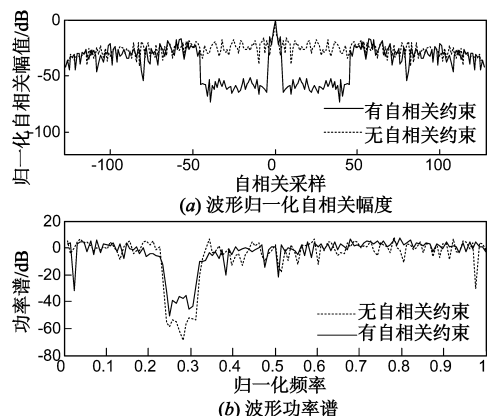


图3 设计波形的自相关和功率谱

可看出,不约束自相关旁瓣时,功率谱凹口深度可达  $-60\text{dB}$ ,而自相关旁瓣的归一化幅值为  $-30\text{dB} \sim -20\text{dB}$ .通过引入自相关约束, $Q_r$ 内自相关旁瓣幅值达  $-60\text{dB}$ ,但功率谱凹口损失近  $20\text{dB}$ .

**仿真 3** 测试时间消耗.本文仿真采用的软硬件平台为 Matlab<sup>®</sup> 2013a, i3 - 2100, 2GB RAM. 表 1 给出了不同迭代次数对应的算法时间消耗.使用的迭代公式是式 (27).波形码元个数  $N = 128$ .由表 1 可看出,对于仿真 1 和 2 所设计的波形,算法能在 1s 左右得到波形.

表 1 算法的迭代次数与时间消耗

迭代次数	500	1000	5000	$10^4$	$5 \times 10^4$	$10^5$
时间消耗(s)	0.045	0.089	0.441	0.882	4.387	8.755

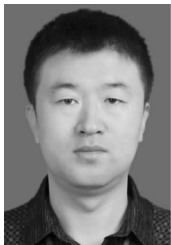
## 5 结论

本文提出的方法,能对指定区间的波形功率谱和自相关进行抑制,同时保持恒模特性.算法可任意裁剪以满足不同要求.本文仿真了同时抑制指定区间的自相关旁瓣和功率谱的情况,自相关和功率谱凹口深度分别达到了  $-50\text{dB}$  和  $-40\text{dB}$  以下.

## 参考文献

- [1] L KPatton, S W Frost, B D Rigling. Efficient design of radar waveforms for optimized detection in coloured noise [J]. IET Radar, Sonar and Navigation, 2011, 6(1): 21 - 29.
- [2] Yin Feng, C Debes C, A M Zoubir. Parametric waveform design using discrete prolate spheroidal sequences for enhanced detection of extended targets [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(9): 4525 - 4536.
- [3] 蒋飞, 刘中, 胡文, 包伯成. 任意频谱结构的连续混沌调频雷达波形设计 [J]. 电子学报, 2010, 38(9): 2195 - 2198.  
Jiang Fei, Liu Zhong, Hu Wen, Bao Bo-cheng. Waveform design of arbitrary spectrum structure for continuous-chaos frequency-modulating radar [J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38

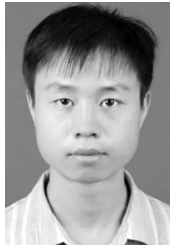
## 作者简介



赵宜楠(通信作者) 男, 1977年2月出生  
于黑龙江省哈尔滨市. 现为哈尔滨工业大学(威海)信息工程研究所副教授、博士生导师. 主要研究方向为新体制雷达、自适应信号处理.  
E-mail: hrbzyn@163.com

(9): 2195 - 2198. (in Chinese)

- [4] Gerlach K, Frey M R and Steiner M J. Spectral nulling on transmit via nonlinear FM radar waveforms [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(2): 1507 - 1515.
- [5] 位寅生, 刘永坦. 随机断续高频雷达波形设计和处理 [J]. 电子学报, 2002, 30(3): 437 - 440.  
Wei Yin-sheng, Liu Yong-tan. Random interrupted HF radar waveform designing and processing [J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(3): 437 - 440. (in Chinese)
- [6] Wang G H, Lu Y L. Designing signal/multiple sparse frequency waveforms with sidelobe constraint [J]. IET Radar, Sonar and Navigation, 2011, 5(1): 32 - 38.
- [7] Stoica P, He Hao, and Li Jian. New algorithms for designing unimodular sequences with good correlation properties [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(4): 1415 - 1425.
- [8] 蒋敏, 黄建国, 韩晶. MIMO 阵列恒定包络波形设计 [J]. 电子学报, 2011, 39(9): 2194 - 2199.  
Jiang Min, Huang Jian-guo, Han Jing. Constant envelope waveform design for MIMO array [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(9): 2194 - 2199. (in Chinese)
- [9] Kay S. 统计信号处理基础——估计与检测理论 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2011. 537 - 539.
- [10] L KPatton, B D Rigling. Autocorrelation constraints in radar waveform optimization for detection [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2012, 48(2): 951 - 968.
- [11] L KPatton, B D Rigling. Phase retrieval for radar waveform optimization [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2012, 48(4): 3287 - 3302.
- [12] 李风从, 赵宜楠, 乔晓林. 抑制特定区间距离旁瓣的恒模波形设计方法 [J]. 电子与信息学报, 2013, 35(3): 532 - 536.  
Li Feng-cong, Zhao Yi-nan, Qiao Xiao-lin. Constant modular waveform design method for suppressing range sidelobes in specified intervals [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2013, 35(3): 532 - 536. (in Chinese)



李风从 男, 1985年出生于湖北省黄石市.  
博士研究生. 主要研究方向为自适应信号处理.  
E-mail: xialulee@sina.com