§2 隐函数组

隐函数组的存在性、连续性与可微性是函数方程组求解问题的理论基础. 利用隐函数组的一般思想，又可进而讨论反函数组与坐标变换等特殊问题.

一、隐函数组概念

二、隐函数组定理

三、反函数组与坐标变换

一、隐函数组概念

设有一组方程

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0, \end{cases} \qquad (1)$$

其中 F 与 G 定义在 $V\subset \mathbf{R}^4$. 若存在 $D, E\subset \mathbf{R}^2$, 使得对于任给的 $(x,y)\in D$, 有惟一的 $(u,v)\in E$ 与之对应, 能使 $(x,y,u,v)\in V$, 且满足方程组 (1), 则称由 (1) 确定了隐函数组

前页 后页 返回

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in D, (u, v) \in E,$$

并有

$$\begin{cases} F(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0, \\ G(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0, \end{cases} \quad (x, y) \in D.$$

关于隐函数组的一般情形 (含有 $m + n$ 个变量的 m 个方程所确定的 n 个隐函数)，在本章不作详细讨论.

首先来看看，若由方程组 (1) 能确定两个可微的隐函数 $u = u(x, y)$ 与 $v = v(x, y)$，则函数 F、G 应满足何种条件呢?

不妨先设 F、G 都可微，由复合求导法，通过对 (1) 分别求关于 x 与关于 y 的偏导数，得到

$$\begin{cases} F_x + F_u u_x + F_v v_x = 0, \\ G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} F_y + F_u u_y + F_v v_y = 0, \\ G_y + G_u u_y + G_v v_y = 0. \end{cases} \tag{3}$$

能由 (2) 与 (3) 惟一解出 (u_x, v_x) 与 (u_y, v_y) 的充要条件是雅可比 (Jacobi) 行列式不等于零，即

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (4)$$

由此可见，只要 F、G 具有连续的一阶偏导数，且 $J\big|_{P_0} \neq 0$，其中 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 是满足 (1) 的某一初始点，则由保号性定理，$\exists U(P_0)$，使得在此邻域内 (4)式成立.

根据以上分析，便有下述隐函数组定理.

雅可比（ **Jacobi, C.G.J. 1804-1851,** 德国 ）

二、隐函数组定理

定理 18.4（隐函数组定理）设方程组 (1) 中的函数 F 与 G 满足下列条件:

(i) 在以点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 为内点的某区域 $V \subset \mathbf{R}^4$ 上连续;

(ii) $F(P_0) = G(P_0) = 0$ (初始条件);

(iii) 在 V 内存在连续的一阶偏导数;

(iv) $J\big|_{P_0} = \left.\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\right|_{P_0} \neq 0.$

则有如下结论成立:

1° 必定存在邻域 $U(P_0)=U(Q_0)\times U(W_0)\subset V$, 其中 $Q_0=(x_0,y_0)$, $W_0=(u_0,v_0)$, 使得

$$\forall (x,y)\in U(Q_0),\ \exists!\,(u,v)\in U(W_0),$$

即有 $\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y), \end{cases}$ $(x,y)\in U(Q_0),\ (u,v)\in U(W_0);$

且满足 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$ 以及

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0, \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0, \end{cases}\quad (x,y)\in U(Q_0).$$

2° $u(x,y), v(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 上连续.

3° $u(x,y), v(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 上存在一阶连续偏导数，且有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}. \end{cases}$$

本定理的详细证明从略 (第二十三章有一般隐函数定理及其证明)，下面只作一粗略的解释:

① 由方程组 (1) 的第一式 $F(x,y,u,v)=0$ 确定隐函数 $u=\varphi(x,y,v)$，且有

$$\varphi_x=-F_x/F_u\,,\ \ \varphi_y=-F_y/F_u\,,\ \ \varphi_v=-F_v/F_u\,.$$

② 将 $u=\varphi(x,y,v)$ 代入方程组(1) 的第二式，得

$$H(x,y,v)=G(x,y,\varphi(x,y,v),v)=0.$$

③ 再由此方程确定隐函数 $v=v(x,y)$，并代回至

$$u=\varphi(x,y,v(x,y))=u(x,y).$$

这样就得到了一组隐函数

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y).$$

通过详细计算，又可得出如下一些结果:

$$H_x = G_x + G_u\varphi_x, \quad H_v = G_u\varphi_v + G_v;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_x + \varphi_v v_x = -\frac{F_x}{F_u} - \frac{F_v}{F_u}\left(-\frac{H_x}{H_v}\right)$$

$$= -\frac{F_x}{F_u} - \frac{F_v}{F_u} \cdot \frac{G_x + G_u\varphi_x}{G_u\varphi_v + G_v} = \cdots = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_y + \varphi_v v_y = \cdots = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)};$$

同理又有 $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$.

例1 设有方程组

$$\begin{cases} xy + yz^2 + 4 = 0, \\ x^2y + yz - z^2 + 5 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

试讨论在点 $P_0(1,-2,1)$ 的近旁能确定怎样的隐函数组？并计算各隐函数在点 P_0 处的导数.

解 易知点 P_0 满足方程组 (5)．设

$$\begin{cases} F(x,y,z) = xy + yz^2 + 4, \\ G(x,y,z) = x^2y + yz - z^2 + 5, \end{cases}$$

它们在 $\mathbf{R}^3$ 上有连续的各阶偏导数. 再考察 F,G 在点 P_0 关于所有变量的雅可比矩阵

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix}_{P_0} = \begin{bmatrix} y & x+z^2 & 2yz \\ 2xy & x^2+z & y-2z \end{bmatrix}_{P_0}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

由于

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}=\begin{vmatrix}2 & -4\\ 2 & -4\end{vmatrix}=0,$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}=\begin{vmatrix}-4 & -2\\ -4 & -4\end{vmatrix}=8\neq 0,$$

因此由隐函数组定理可知，在点 P_0 近旁可以惟一地确定隐函数组：

$$\begin{cases}x=x(z),\\ y=y(z),\end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases}z=z(y),\\ x=x(y);\end{cases}$$

但不能肯定 y,z 可否作为 x 的两个隐函数.

运用定理 18.4 的结论 3°, 可求得隐函数在点 P_0 处的导数值:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right|_{P_0} = -\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)} \Big/ \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)_{P_0} = -\dfrac{0}{4} = 0, \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right|_{P_0} = -\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} \Big/ \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)_{P_0} = -\dfrac{(-8)}{4} = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right|_{P_0} = -\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)} \Big/ \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right)_{P_0} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}, \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{P_0} = -\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)} \Big/ \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right)_{P_0} = \dfrac{0}{8} = 0. \end{cases}$$

*注 通过详细计算，还能求得

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{P_0} = -\frac{1}{4} < 0 .$$

这说明 $x = x(y)$ 在 $y = -2$ 处取极大值，从而知道在点 P_0 的任意小邻域内，对每一个 x 的值，会有多个 y 的值与之对应. 类似地，对每一个 x 的值，也会有多个 z 的值与之对应. 所以方程组 (5) 在点 P_0 近旁不能惟一确定以 x 作为自变量的隐函数组.

例 2 设函数 $f(x,y), g(x,y)$ 具有连续的偏导数，$u=u(x,y)$ 与 $v=v(x,y)$ 是由方程组

$$u=f(ux, v+y), \quad g(u-x, v^2y)=0$$

所确定的隐函数组. 试求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 设 $F=u-f(ux,v+y)$, $G=g(u-x,v^2y)$, 则有

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y & F_u & F_v \\ G_x & G_y & G_u & G_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -uf_1 & -f_2 & 1-xf_1 & -f_2 \\ -g_1 & v^2g_2 & g_1 & 2vyg_2 \end{bmatrix}.$$

由此计算所需之雅可比行列式:

$$J_{uv}=\begin{vmatrix}1-xf_1 & -f_2\\ g_1 & 2vyg_2\end{vmatrix}=2vyg_2-2xyvf_1g_2+f_2g_1,$$

$$J_{xv}=\begin{vmatrix}-uf_1 & -f_2\\ -g_1 & 2vyg_2\end{vmatrix}=-2yuvf_1g_2-f_2g_1,$$

$$J_{uy}=\begin{vmatrix}1-xf_1 & -f_2\\ g_1 & v^2g_2\end{vmatrix}=v^2g_2-xv^2f_1g_2+f_2g_1.$$

于是求得

前页 后页 返回

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{J_{xv}}{J_{uv}}=\frac{2yuvf_1g_2+f_2g_1}{2yvg_2-2xyvf_1g_2+f_2g_1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{J_{uy}}{J_{uv}}=\frac{xv^2f_1g_2-f_2g_1-v^2g_2}{2yvg_2-2xyvf_1g_2+f_2g_1}.$$

注 计算隐函数组的偏导数 (或导数) 比较繁琐, 要学懂前两例所演示的方法 (利用雅可比矩阵和雅可比行列式), 掌握其中的规律. 这里特别需要

"精心＋细心＋耐心".

三、反函数组与坐标变换

设有一函数组

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y),\ (x, y) \in B(\subset \mathbf{R}^2), \qquad (6)$$

它确定了一个映射 (或变换) :

$$T:\ B \to \mathbf{R}^2,$$

$$P(x, y) \mapsto Q(u, v)\ .$$

写成点函数形式, 即为 $Q = T(P)$, $P \in B$; 并记 B 的象集为 $B' = T(B)$. 现在的问题是: 函数组 (6) 满足何种条件时, T 存在逆变换 T^{-1}? 即存在

$$T^{-1}:\ B' \to B,$$

$$Q(u,v) \mapsto P(x,y)$$

$$(\text{或}\ \ P = T^{-1}(Q),\ Q \in B'\ ),$$

亦即存在一个函数组

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ (u,v) \in B', \qquad (7)$$

使得满足

$$u \equiv u(x(u,v), y(u,v)),\ \ v \equiv v(x(u,v), y(u,v)).$$

这样的函数组 (7) 称为函数组 (6) 的反函数组. 它的存在性问题可化为隐函数组的相应问题来处理.

为此，首先把方程组 (6) 改写为

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = u - u(x,y) = 0, \\ G(x,y,u,v) = v - v(x,y) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

然后将定理 18. 4 应用于 (8)，即得下述定理.

定理 18. 5 (反函数组定理) 设 (6) 中函数在某区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上具有连续的一阶偏导数，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点，且

$$u_0 = u(x_0, y_0),\ v_0 = v(x_0, y_0),\ \left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0} \neq 0.$$

则在点 $P_0'(u_0,v_0)$ 的某邻域 $U(P_0')$ 内，存在惟一的一组反函数 (7)，使得

$$x_0 = x(u_0,v_0),\ y_0 = y(u_0,v_0);$$

$$(x(u,v), y(u,v)) \in U(P_0);$$

$$u \equiv u(x(u,v), y(u,v)),\ v \equiv v(x(u,v), y(u,v)).$$

此外，反函数组 (7) 在 $U(P_0')$ 内存在连续的一阶偏导数；若记

$$J_{xy} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},$$

前页 后页 返回

则有

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= -\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\Bigg/\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \\
&= -\frac{1}{J_{xy}}\begin{vmatrix} 1 & -u_y \\ 0 & -v_y \end{vmatrix} = \frac{v_y}{J_{xy}}, \\
\text{同理又有} & \\
\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u_y}{J_{xy}},\quad \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{v_x}{J_{xy}},\quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u_x}{J_{xy}}.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

由 (9) 式进一步看到:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{J_{xy}^{2}}\begin{vmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{vmatrix}$$

$$=\frac{u_x v_y-u_y v_x}{J_{xy}^{2}}=\frac{J_{xy}}{J_{xy}^{2}}=1\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.$$

此式表示：互为反函数组的 (6) 与 (7)，它们的雅可比行列式互为倒数，这和以前熟知的反函数求导公式相类似. 于是可把一元函数的导数和函数组 (6) 的雅可比行列式看作对应物.

例3 平面上点的直角坐标 (x,y) 与极坐标 (r,θ) 之间的坐标变换为

$$T:\quad x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta.$$

试讨论它的逆变换.

解 由于

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

因此除原点 $(r=0)$ 外，在其余一切点处，T 存在逆变换 T^{-1}:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + \arctan \dfrac{y}{x}, & x < 0, \end{cases}$$

或 $$\theta = \begin{cases} \operatorname{arccot} \dfrac{x}{y}, & y > 0, \\ \pi + \operatorname{arccot} \dfrac{x}{y}, & y < 0. \end{cases}$$

例4 空间直角坐标 (x,y,z) 与球坐标 (ρ,φ,θ) 之间的坐标变换为 (见图18—5)

$$T:\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\varphi. \end{cases}$$

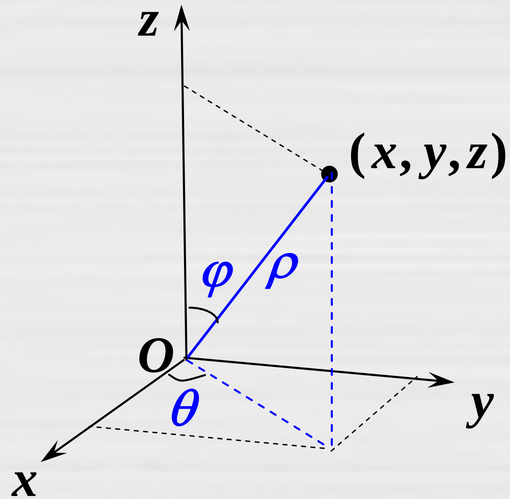

图 18—5

由于

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\rho^2\sin\varphi,$$

前页 后页 返回

因此在 $\rho^2\sin\varphi\neq 0$ (即除去 Oz 轴上的一切点) 时,

T 存在逆变换 T^{-1}:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \varphi=\arccos\frac{z}{\rho},\ \theta=\arctan\frac{y}{x}.$$

例5 设有一微分方程 (弦振动方程) :

$$a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\ (a>0), \tag{10}$$

其中 $\varphi(x,t)$ 具有二阶连续偏导数. 试问此方程在坐标变换 $T:u=x+at,v=x-at$ 之下, 将变成何种形式?

解　据题意，是要把方程 (10) 变换成以 u, v 作为自变量的形式. 现在按此目标计算如下：首先有

$$u_x = v_x = 1,\ u_t = -v_t = a,\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,t)} = -2a \neq 0,$$

故 T 的逆变换存在，而且又有

$$\mathrm{d}u = u_x \mathrm{d}x + u_t \mathrm{d}t = \mathrm{d}x + a\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x - a\,\mathrm{d}t.$$

依据一阶微分形式不变性，得到

$$\mathrm{d}\varphi = \varphi_u \mathrm{d}u + \varphi_v \mathrm{d}v = (\varphi_u + \varphi_v)\,\mathrm{d}x + a(\varphi_u - \varphi_v)\,\mathrm{d}t,$$

并由此推知

$$\varphi_x = \varphi_u + \varphi_v, \quad \varphi_t = a(\varphi_u - \varphi_v).$$

继续求以 u, v 为自变量的 φ_{xx} 与 φ_{tt} 的表达式:

$$\varphi_{xx} = \frac{\partial}{\partial u}(\varphi_u + \varphi_v)u_x + \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_u + \varphi_v)v_x$$

$$= \varphi_{uu} + \varphi_{vu} + \varphi_{uv} + \varphi_{vv} = \varphi_{uu} + 2\varphi_{uv} + \varphi_{vv},$$

$$\varphi_{tt} = a\frac{\partial}{\partial u}(\varphi_u - \varphi_v)u_t + a\frac{\partial}{\partial v}(\varphi_u - \varphi_v)v_t$$

$$= a^2(\varphi_{uu} - 2\varphi_{uv} + \varphi_{vv}).$$

最后得到以 u, v 为自变量的 微分方程为

$$a^2\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = 4a^2\varphi_{uv} = 0, \quad 即 \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v} = 0.$$

复习思考题

1. 验证：定理 18.4 的结论 3° 可以写成

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix}.$$

2. 验证：由定理 18.5 的 (9) 式 (课本中为 (13) 式)

可以推得 $\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=1,\quad \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=1.$