# §3 二元函数的连续性

无论是单元微积分还是多元微积分，其中所讨论的函数，最重要的一类就是连续函数. 二元函数连续性的定义比一元函数更一般化了些；而它们的局部性质与在有界闭域上的整体性质，二者完全相同.

一、二元函数的连续性概念

二、有界闭域上连续函数的性质

## 一、二元函数的连续性概念

### ※ 连续性的定义

**定义1** 设 $f$ 为定义在点集 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的二元函数, $P_0 \in D$. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 只要 $P \in U(P_0;\delta) \cap D$, 就有

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon, \tag{1}$$

则称 $f$ 关于集合 $D$ 在点 $P_0$ 连续. 在不致误解的情形下, 也称 $f$ 在点 $P_0$ 连续.

若 $f$ 在 $D$ 上任何点都关于集合 $D$ 连续, 则称 $f$ 为 $D$ 上的连续函数.

前页 后页 返回

由上述定义知道：若 $P_0$ 是 $D$ 的孤立点, 则 $P_0$ 必定是 $f$ 的连续点. 若 $P_0$ 是 $D$ 的聚点, 则 $f$ 关于集合 $D$ 在点 $P_0$ 连续等价于

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P) = f(P_0). \qquad (2)$$

如果 $P_0$ 是 $D$ 的聚点, 而 (2) 式不成立 (其含义与一元函数的对应情形相同 ), 则称 $P_0$ 是 $f$ 的不连续点 (或称间断点). 特别当 (2) 式左边极限存在, 但不等于 $f(P_0)$ 时, $P_0$ 是 $f$ 的可去间断点.

如上节例1、2 给出的函数在原点连续；例3、4、5

前页 后页 返回

给出的函数在原点不连续. 又若把上述例3 的函数改为

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \in \{(x, y) \mid y = mx, x \neq 0\}, \\ \dfrac{m}{1 + m^2}, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

其中 $m$ 为固定实数, 亦即函数 $f$ 只定义在 $y = mx$ 上，这时由于

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ y = mx}} f(x, y) = \frac{m}{1 + m^2} = f(0, 0),$$

前页 后页 返回

因此 $f$ 在原点沿着直线 $y = mx$ 是连续的.

例1 讨论函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha}}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

在坐标原点的连续性.

解 由于当 $\alpha > 2$ 且 $r \to 0$ 时,

$$\left| f(r\cos\theta, r\sin\theta) \right| = \left| r^{\alpha-2}(\cos\theta)^{\alpha} \right| \leq r^{\alpha-2} \to 0,$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, 此时 $f$ 在原点连

续；而当 $\alpha \le 2$时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，此时 $f$ 在原点间断.

※ 全增量与偏增量

设$P_0(x_0, y_0)$、$P(x, y) \in D$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$,

称
$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$
$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

为函数 $f$ 在点 $P_0$ 的全增量. 和一元函数一样, 可用增量形式来描述连续性，即当

前页 后页 返回

$$\lim_{\substack{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} \Delta z = 0$$

时, $f$ 在点 $P_0$ 连续.

如果在全增量中取 $\Delta x = 0$ 或 $\Delta y = 0$, 则相应得到的增量称为偏增量, 分别记作

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

一般说来, 函数的全增量并不等于相应的两个偏增量之和.

若一个偏增量的极限为零，如 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta_x f(x_0, y_0)=0$，则表示当固定 $y=y_0$ 时，$f(x, y_0)$ 作为 $x$ 的函数，它在 $x_0$ 连续. 同理，若 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta_y f(x_0, y_0)=0$，则表示当固定 $x=x_0$ 时，$f(x_0, y)$ 在 $y_0$ 连续.

容易证明：当 $f$ 在其定义域的内点 $(x_0, y_0)$ 连续时，$f(x, y_0)$ 在 $x_0$ 与 $f(x_0, y)$ 在 $y_0$ 都连续. 但是反过来，由二元函数对单个自变量都连续，一般不能保证该函数的连续性 (除非另外增加条件). 例如二元函数

前页 后页 返回

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0\end{cases}$$

在原点处显然不连续，但由于 $f(0,y)=f(x,0)=0$，因此它在原点处对 $x$ 和对 $y$ 分别都连续.

例2 设在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上 $f(x,y)$ 分别对 $x$ 和对 $y$ 都连续. 试证在下列条件之一满足时，$f(x,y)$ 在 $D$ 上处处连续：

(i) 对其中一个变量 (例如 $y$) 满足李普希茨条件，即 $\exists L>0$，使得对任何 $(x,y_1),(x,y_2)\in D$，恒有

前页 后页 返回

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right|;$$

(ii) 对其中一个变量 ($x$) 的连续关于另一个变量 ($y$) 是一致的, 即 $\forall x_0, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ (只与 $x_0, \varepsilon$ 有关, 而与 $y$ 无关), 当 $|x - x_0| < \delta$, 且 $(x,y) \in D$ 时, 对一切 $y$ 恒有 $\left| f(x,y) - f(x_0,y) \right| < \varepsilon$.

*(iii) 参见本节习题第 9 题 (这里不作证明).

证(i) $\forall (x_0, y_0) \in D$. 因 $f(x, y_0)$ 在 $x_0$ 连续, 故任给 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时, 有

前页 后页 返回

$$\left| f(x,y_0) - f(x_0,y_0) \right| < \varepsilon/2;$$

又当 $|y-y_0| < \delta_2 = \varepsilon/2L$ 时，满足

$$\left| f(x,y) - f(x,y_0) \right| \le L|y-y_0| < \varepsilon/2.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当

$$|x-x_0| < \delta, |y-y_0| < \delta \text{ 且 } (x,y) \in D$$

时，又有

$$\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) \right| \le \left| f(x,y) - f(x,y_0) \right|$$

$$+ \left| f(x,y_0) - f(x_0,y_0) \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

即 $f$ 在 $(x_0,y_0)$ 连续. 由 $(x_0,y_0)$ 的任意性, 便知 $f$ 在 $D$ 上处处连续.

(ii) $\forall(x_0,y_0)\in D$. 因 $f(x_0,y)$ 在 $y_0$ 连续, 故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$, 当 $|y-y_0|<\delta_1$ 时, 有

$$|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2;$$

又由 $f$ 对 $x$ 的连续关于 $y$ 是一致的, 故 $\exists\delta_2>0$, 使当 $|y-y_0|<\delta_2$, 且 $(x,y)\in D$ 时, 有

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon/2.$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$ 且 $(x,y)\in D$ 时, 又有

$$\begin{aligned}\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right| &\le \left|f(x,y)-f(x_0,y)\right| \\ &+\left|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,\end{aligned}$$

这就证得 $f$ 在 $D$ 上处处连续.

※ 连续函数的局部性质

若二元函数在某一点连续, 则与一元函数一样, 可以证明它在这一点近旁具有局部有界性、局部保号性以及相应的有理运算的各个法则. 下面只证明二元

复合函数的连续性定理, 其余留给读者自己去练习.

**定理16.7 (复合函数的连续性)** 设函数 $u=\varphi(x, y)$ 和 $v=\psi(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义, 并在点 $P_0$ 连续; $f(u, v)$ 在点 $Q_0(u_0, v_0)$ 的某邻域内有定义, 并在点 $Q_0$ 连续, 其中

$$u_0=\varphi(x_0, y_0),\ v_0=\psi(x_0, y_0).$$

则复合函数 $g(x, y)=f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 在点 $P_0$ 也连续.

**证** 由 $f$ 在点 $Q_0$ 连续可知: $\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0$, 使得当

前页 后页 返回

$|u-u_0|<\eta,\ |v-v_0|<\eta$ 时, 有

$$|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

又由 $\varphi$、$\psi$ 在点 $P_0$ 连续可知：对上述 $\eta>0, \exists\delta>0,$

使得当 $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$ 时, 有

$$|u-u_0|=|\varphi(u,v)-\varphi(u_0,v_0)|<\eta,$$

$$|v-v_0|=|\psi(u,v)-\psi(u_0,v_0)|<\eta.$$

综合起来, 当 $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$ 时, 便有

$$|g(x,y)-g(x_0,y_0)|=|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

所以 $f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

前页 后页 返回

## 二、有界闭域上连续函数的性质

本段讨论有界闭域上多元连续函数的整体性质. 这可以看作闭区间上一元连续函数性质的推广.

**定理16.8**（有界性定理与最大、小值定理）若二元函数 $f$ 在有界闭域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上连续, 则 $f$ 在 $D$ 上有界, 且能取得最大值与最小值.

证 先证明 $f$ 在 $D$ 上有界. 倘若不然, 则 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 存在 $P_n \in D$, 使得

$$|f(P_n)| > n,\ \ n = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

前页 后页 返回

于是得到一个有界点列$\{P_n\}\subset D$, 且能使$\{P_n\}$中有无穷多个不同的点. 由聚点定理的推论, $\{P_n\}$存在收敛子列$\{P_{n_k}\}$, 设$\lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k}=P_0$. 因$D$是闭域, 从而$P_0\in D$.

又因$f$在$D$上连续, 当然在点$P_0$也连续, 于是有

$$\lim_{k\to\infty} f(P_{n_k})=f(P_0).$$

这与不等式(3)矛盾，所以$f$是$D$上的有界函数.

下面证明$f$在$D$上能取到最大、小值. 为此设

$$m=\inf f(D),\quad M=\sup f(D).$$

可证必有一点$Q\in D$, 使$f(Q)=M$ (同理可证存在

$Q' \in D$, 使 $f(Q') = m$ ). 如若不然, 对任意 $P \in D$, 都有 $M - f(P) > 0$. 考察 $D$ 上的正值连续函数

$$F(P) = \frac{1}{M - f(P)},$$

由前面的证明知道, $F$ 在 $D$上有界. 又因 $f$ 不能在 $D$ 上达到上确界 $M$, 所以存在收敛点列$\{P_n\} \subset D$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n) = M$. 于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} F(P_n) = +\infty$, 这导致与 $F$ 在 $D$ 上有界的结论相矛盾, 从而证得 $f$ 在 $D$ 上能取到最大值.

**定理16.9 (一致连续性定理)** 若函数 $f$ 在有界闭域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上连续, 则 $f$ 在 $D$ 上一致连续. 即 $\forall \varepsilon > 0$, 存在只依赖于 $\varepsilon$ 的 $\delta > 0$, 使得对一切满足 $\rho(P, Q) < \delta$ 的点 $P, Q \in D$, 必有 $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$.

证 本定理可参照第七章中证明一致连续性定理的方法, 运用有限覆盖定理来证明, 也可以运用聚点定理来证明. 这里我们采用后一种证法.

倘若 $f$ 在 $D$ 上连续而不一致连续, 则存在某 $\varepsilon_0 > 0$, 对于任意小的 $\delta > 0$, 例如 $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \cdots$, 总有

前页 后页 返回

相应的 $P_n$、$Q_n \in D$, 虽然 $\rho(P_n, Q_n) < 1/n$, 但是

$$|f(P_n) - f(Q_n)| \geq \varepsilon_0.$$

由于 $D$ 为有界闭域, 因此存在收敛子列$\{P_{n_k}\} \subset \{P_n\}$,

并设 $\lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k} = P_0 \in D$. 再在$\{Q_n\}$中取出与$\{P_{n_k}\}$下

标相同的子列$\{Q_{n_k}\}$, 则因

$$0 \leq \rho(P_{n_k}, Q_{n_k}) < 1/n_k \to 0, k \to \infty,$$

有 $\lim\limits_{k\to\infty} Q_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k} = P_0$. 最后, 由 $f$ 在 $P_0$ 连续, 得

$$\lim_{k\to\infty} |f(P_{n_k}) - f(Q_{n_k})| = |f(P_0) - f(Q_0)| = 0.$$

这与 $|f(P_{n_k}) - f(Q_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0$ 相矛盾，所以 $f$ 在 $D$ 上一致连续.

**定理16.10（介值性定理）** 设函数 $f$ 在区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上连续，若 $P_1, P_2$ 为 $D$ 中任意两点，且 $f(P_1) < f(P_2)$，则对任何满足不等式

$$f(P_1) < \mu < f(P_2) \tag{4}$$

的实数 $\mu$，必存在点 $P_0 \in D$，使得 $f(P_0) = \mu$.

**证** 作辅助函数

前页 后页 返回

$$F(P) = f(P) - \mu, \quad P \in D.$$

易见 $F$ 仍在 $D$ 上连续, 且由 (4) 式知道 $F(P_1) < 0$, $F(P_2) > 0$. 下面证明必存在 $P_0 \in D$, 使 $F(P_0) = 0$.

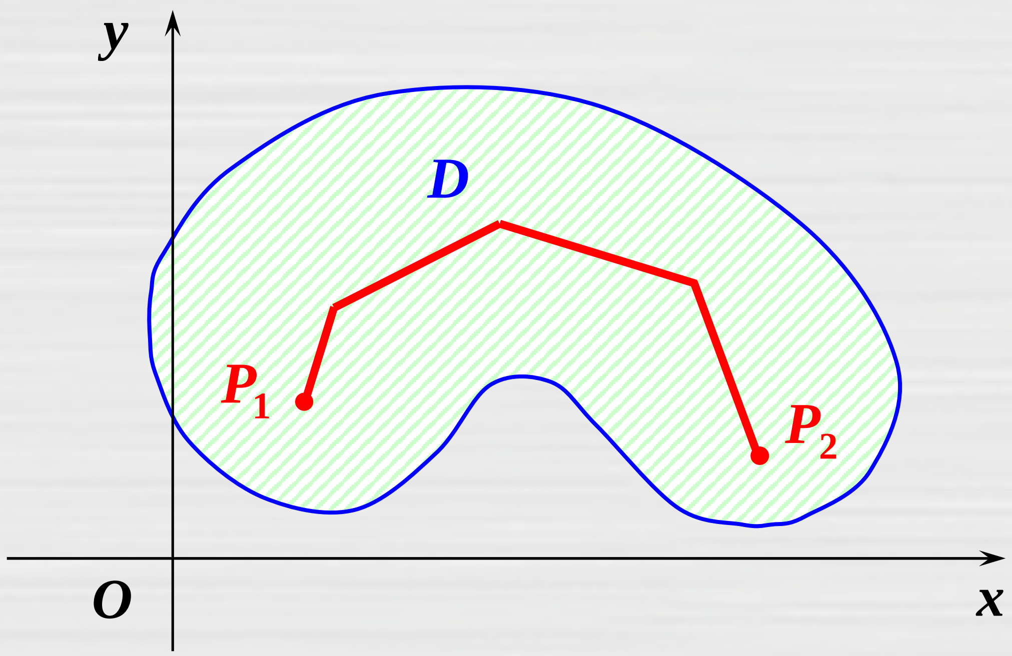


图 16 -18

由于 $D$ 为区域，我们可以用有限段都在 $D$ 中的折线连结 $P_1$ 和 $P_2$ (如图 16-18).

若有某一个连接点所对应的函数值为 0，则定理得证. 否则从一端开始逐段检查, 必定存在某直线段, 使得 $F$ 在它两端的函数值异号. 不失一般性, 设连结 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 的直线段含于 $D$, 其方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

在此直线段上, $F$ 变为关于 $t$ 的复合函数:

$$G(t) = F(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)), 0 \le t \le 1.$$

由于 $G$ 为 $[0, 1]$ 上的一元连续函数, 且

$$F(P_1) = G(0) < 0 < G(1) = F(P_2),$$

因此由一元函数根的存在定理, 在 $(0, 1)$ 内存在一点 $t_0$, 使得 $G(t_0) = 0$. 记

$$x_0 = x_1 + t_0(x_2 - x_1), y_0 = y_1 + t_0(y_2 - y_1),$$

则有 $P_0(x_0, y_0) \in D$, 使得

$$F(P_0) = G(t_0) = 0, \text{ 即 } f(P_0) = \mu.$$

注1 定理16.8 与 16.9 中的有界闭域 $D$ 可以改为有界闭集 (证明过程无原则性变化). 但是介值性定理中所考察的点集 $D$ 只能假设是一区域, 这是为了保证它具有连通性, 而一般的开集或闭集是不一定具有连通性的.

注2 由定理16.10 又可知道, 若 $f$ 为区域 $D$ 上的连续函数, 则 $f(D)$ 必定是一个区间 (有限或无限).

例3 设 $f(x, y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 又有函数序列 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且

$$c \le \varphi_k(x) \le d,\ \ x \in [a,b],\ \ k = 1, 2, \cdots .$$

试证 $\{F_k(x)\} = \{f(x,\varphi_k(x))\}$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛.

证 由定理16. 9 知道 $f$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上一致连续.

于是, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $x \in [a,b],\ y', y'' \in [c,d],$ 且

$|y' - y''| < \delta$ 时, 总有

$$| f(x,y') - f(x,y'') | < \varepsilon.$$

又 $\{\varphi_k\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 故 $\exists K > 0,$ 当 $n,m > K$

时, 对一切 $x \in [a,b],$ 有 $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \delta;$ 故又有

$$|F_n(x) - F_m(x)| = | f(x,\varphi_n(x)) - f(x,\varphi_m(x)) | < \varepsilon.$$

这就证得$\{F_k(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.

## 复习思考题

1. 在一元函数连续性定义中, 如何引入"孤立点必为连续点"这个概念?

2. 在讨论一元初等函数时有一个重要结论: "任何初等函数都是在其定义区间上的连续函数". 当引入了"孤立点必为连续点"后, 上述结论便可简单地说成是: "任何初等函数在其定义域上处处连续." 试讨论这两种说法有何不同? 你喜欢哪一种说法?