# *§3 上极限和下极限

数列的上极限与下极限是非常有用的概念，通过它们可得出数列极限存在的另一个充要条件．在下册第十二、十四章讨论级数收敛性时，常会遇到所考虑的某些数列不存在极限的情形，那时需要用上极限或下极限来解决问题．此外，对于不少后继课程来说，上（下）极限也是不可缺少的工具．

一、上(下)极限的基本概念

二、上（下）极限的基本性质

# 一、上(下)极限的基本概念

定义1 若数列 $\{x_n\}$ 满足：在数 $x_0$ 的任何一个邻域内均含有 $\{x_n\}$ 中的无限多项，则称 $x_0$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个聚点.

注 点集的聚点与数列的聚点之间的区别在于：前者要求"含有无限多个点"，后者要求"含有无限多个项". 现举例如下：

常数列 $(a_n \equiv a)$ 只有一个聚点：$a$ .

$\{(-1)^n\}$ 作为点集来说它仅有两个点, 故没有聚点;

但作为数列来说, 它却有两个聚点: 1 和 −1.

数列 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$ 有五个聚点: $-1, -\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2, 1$.

从数列聚点的定义不难看出, $x_0$ 是数列 $\{x_n\}$ 的聚点的一个充要条件是: 存在 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$,

$$x_{n_k} \to x_0,\ k \to \infty.$$

定理7.4 有界数列至少存在一个聚点, 并且有最大聚点和最小聚点.

证 设 $\{x_n\}$为有界数列，由致密性定理，存在一个收敛子列$\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0\ (k\to\infty)$, 于是 $x_0$是$\{x_n\}$的一个聚点.

又设 $E=\Big\{\, x \mid x$ 是$\{x_n\}$的聚点$\Big\}$, 由于 $E$ 非空有界，故由确界原理，存在

$$\overline{A}=\sup E,\quad \underline{A}=\inf E.$$

下面证明 $\overline{A}$ 是$\{x_n\}$的最大聚点，亦即 $\overline{A}\in E$.

首先，由上确界的性质，存在 $a_n\in E$, 使 $a_n\to\overline{A}$.

前页 后页 返回

因为 $a_i$ 是 $\{x_n\}$ 的聚点，所以对任意正数 $\varepsilon$,在区间 $(a_i-\varepsilon,\ a_i+\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无限多项. 现依次令

$$\varepsilon_1=1,\ \text{存在}\ x_{n_1},\ \text{使}\ |x_{n_1}-a_1|<1;$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{2},\ \text{存在}\ x_{n_2}(n_2>n_1),\ \text{使}\ |x_{n_2}-a_2|<\frac{1}{2};$$

.............

$$\varepsilon_k=\frac{1}{k},\ \text{存在}\ x_{n_k}(n_k>n_{k-1}),\ \text{使}\ |x_{n_k}-a_k|<\frac{1}{k};$$

.............

这样就得到了 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - a_k) + \lim_{k\to\infty} a_k = \overline{A},$$

即证得 $\overline{A}$ 也是 $\{x_n\}$ 的一个聚点, 所以

$$\overline{A} \in E.$$

同理可证 $\underline{A} \in E$.

定义 2 有界数列 $\{x_n\}$ 的最大聚点 $\overline{A}$ 与最小聚点 $\underline{A}$ 分别称为 $\{x_n\}$ 的上、下极限, 记为

$$\overline{A} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n, \quad \underline{A} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

注 由定理 7.4 得知，有界数列必有上、下极限. 这样，上、下极限的优越性就显现出来了：一个数列若有界，它的极限可以不存在，此时想通过极限来研究该数列往往是徒劳的；但是有界数列的上、下极限总是存在的，这为研究数列的性质提供了一个新的平台.

例1 考察以下两个数列的上、下极限:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}=0\ (=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n});$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n\frac{n}{n+1}=1,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n\frac{n}{n+1}=-1.$$

从中可大致看出数列的极限和数列的上、下极限之间存在着的内在联系. 详细讨论请见下文.

## 二、上(下)极限的基本性质

由上、下极限的定义，立即得出:

定理7.5 对任何有界数列 $\{x_n\}$, 有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n. \tag{1}$$

下面这个定理刻画了极限与上、下极限之间的关系.

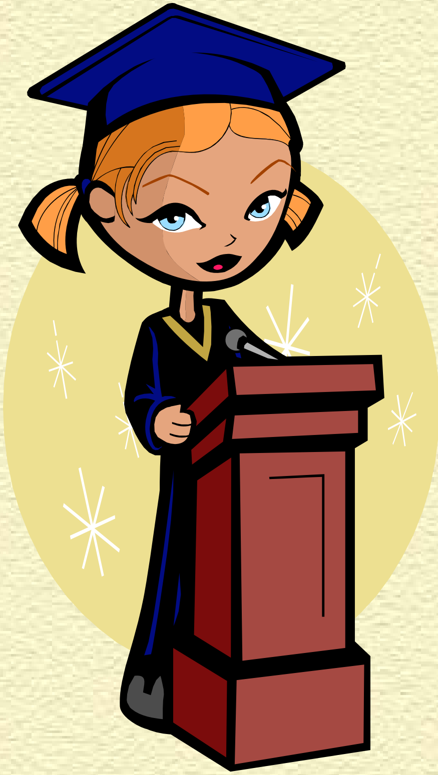
定理7.6 有界数列 $\{x_n\}$ 存在极限的充要条件是:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n. \tag{2}$$

**证** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 对于任意正数 $\varepsilon$, 在 $U(A;\varepsilon)$ 之外 $\{x_n\}$ 只有有限项. 这样, 对任意的 $B \neq A$, 若取 $\varepsilon_0 = \dfrac{|B-A|}{2} > 0$, 那么在 $U(B;\varepsilon_0)$ 内(此时必在 $U(A;\varepsilon_0)$ 之外) $\{x_n\}$ 只有有限项. 这就是说, $B$ 不是 $\{x_n\}$ 的聚点, 故 $\{x_n\}$ 仅有一个聚点 $A$, 从而

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n .$$

反之, 若上式成立, 则 $\{x_n\}$ 的聚点惟一 (设为 $A$),



此时易证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A.$

倘若不然，则存在 $\varepsilon_0 > 0,$ 使得在 $U(A;\varepsilon_0)$ 之外含有 $\{x_n\}$ 的无限多项. 由致密性定理，这无限多项必有另一聚点，导致与聚点惟一的假设相矛盾.

**定理7.7** 设$\{x_n\}$为有界数列, 则有

1° $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = A$ 的充要条件是: 对于任意的 $\varepsilon > 0$,

(i) 存在 $N$, 当 $n > N$ 时, $x_n < A + \varepsilon$;

(ii) 存在 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} > A - \varepsilon$, $k = 1, 2, \cdots$.

2° $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = B$ 的充要条件是: 对于任意的 $\varepsilon > 0$,

(i) 存在 $N$, 当 $n > N$ 时, $x_n > B - \varepsilon$;

(ii) 存在$\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} < B + \varepsilon$, $k = 1, 2, \cdots$.

**证** 1° 和 2° 在形式上是对称的, 所以仅证明 1°.

**必要性** 设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = A$. 因为 $A$ 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点, 所以存在 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k} \to A \ (k \to \infty)$, 故对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K > 0$, 当 $k > K$ 时, $A - \varepsilon < x_{n_k}$. 将 $\{x_{n_k}\}$ 中的前面 $K$ 项剔除, 这样就证明了(ii).

又因 $A$ 是 $\{x_n\}$ 的最大聚点, 所以对上述 $\varepsilon$, 在区间 $[A+\varepsilon, +\infty)$ 上, 至多只含 $\{x_n\}$ 的有限项. 不然的话, 因为 $\{x_n\}$ 有界, 故 $\{x_n\}$ 在 $[A+\varepsilon, +\infty)$ 上还有聚点, 这与 $A$ 是最大聚点相矛盾. 设这有限项

的最大下标为 $N$, 那么当 $n > N$ 时,

$$x_n < A + \varepsilon.$$

充分性 任给 $\varepsilon > 0$, 综合 (i) 和 (ii), 在 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 上含有 $\{x_n\}$ 的无限项, 即 $A$ 是 $\{x_n\}$ 的聚点.

而对于任意的 $A' > A$, 令 $\varepsilon_0 = \dfrac{A'-A}{2}$, 由于满足

$$x_n > A + \varepsilon_0 = \frac{A+A'}{2}$$

的项至多只有有限个, 这说明在 $(A'-\varepsilon_0, A'+\varepsilon_0)$

上也至多只有$\{x_n\}$的有限项，故$A'$不是$\{x_n\}$的聚点, 所以$A$是$\{x_n\}$的最大聚点．从而有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = A.$$

**定理7.8 (保不等式性)** 设$\{x_n\}, \{y_n\}$均为有界数列, 并且满足：存在$N_0 > 0$，当$n > N_0$时，有

$$x_n \le y_n.$$

则取上(下)极限后，原来的不等号方向保持不变:

前页 后页 返回

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n \le \varlimsup_{n\to\infty} y_n, \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varliminf_{n\to\infty} y_n. \qquad (3)$$

特别若 $a \le x_n \le y_n \le b$, 则更有

$$a \le \varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varlimsup_{n\to\infty} y_n \le b. \qquad (4)$$

证 设 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 因为 $B$ 是 $\{y_n\}$ 的聚点, 所以存在 $\{y_{n_k}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = B$. 又 $\{x_{n_k}\}$ 有界, 故存在 $\{x_{n_k}\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{n_{k_j}}\}$, $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = A'$.

又因

$$x_{n_{k_j}} \le y_{n_{k_j}},$$

取$j\to\infty$ 的极限, 便得$A' \le B$. 由于 $A'$ 也是$\{x_n\}$的聚点，它与$\{x_n\}$的最小聚点 $A$ 理应满足

$$A \le A' \le B.$$

同理可证关于上极限的不等式；而 **(4)** 式则可由 **(1)** 与 **(3)** 式直接推得.

前页 后页 返回

**例1** 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是有界数列, 那么

(i) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,b_n;$ (5)

(ii) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\ge\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,b_n.$ (6)

**证** 这里只证明 (i) , (ii) 可同理证明. 设

$$A=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n,\quad B=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,b_n.$$

由定理7.7, 存在 $N$, 当 $n>N$ 时,

$$a_n<A+\frac{\varepsilon}{2},\qquad b_n<B+\frac{\varepsilon}{2},$$

故

$$a_n + b_n < A + B + \varepsilon.$$

再由定理 7.8 的 (4) 式, 得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n + b_n) \le A + B + \varepsilon.$$

因为 $\varepsilon$ 是任意的, 故

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n + b_n) \le A + B = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n.$$

注 这里严格不等的情形确实会发生, 例如

$$a_n = (-1)^{n-1}, \quad b_n = (-1)^n.$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = 1,\ \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = 1,\ 而\ \overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) = 0.$$

例2 设 $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = A < B = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1})$ $= 0$. 求证 $\{x_n\}$ 的全体聚点的集合为 $[A, B]$.

证 设 $E$ 是$\{x_n\}$的全体聚点的集合, 显然有

$$E \subset [A, B],\ A \in E,\ B \in E.$$

任给 $x_0 \in (A, B)$, 欲证 $x_0 \in E$. 如若不然, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 在 $U(x_0; \varepsilon_0)$ 内仅含 $\{x_n\}$ 的有限项:

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \cdots,\ x_{n_N}\ (n_1 < n_2 < \cdots < n_N).$$

这就是说, 当 $n > n_N$ 时, 所有的 $x_n$ 均不在 $U(x_0;\varepsilon)$ 之内. 又因 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = 0$, 所以存在 $K'$, 当 $n > K'$ 时, 有

$$-\varepsilon_0 < x_n - x_{n-1} < \varepsilon_0. \tag{7}$$

令 $K = \max\{K', n_N\}$, 当 $n > K$ 时, 由 (7) 导致所有的 $x_n$ 或者都有 $x_n \le x_0 - \varepsilon_0$,或者都有 $x_n \ge x_0 + \varepsilon_0$. 前者与 $B$ 是 $\{x_n\}$ 的聚点矛盾; 后者与 $A$ 是 $\{x_n\}$

的聚点矛盾. 故证得 $x_0 \in E$, 即 $[A, B] \subset E$, 从而

$$E = [A, B].$$

定理7.9 设 $\{x_n\}$ 为有界数列. 则有

(i) $A$ 是 $\{x_n\}$ 的上极限的充要条件是

$$A = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} \{x_k\}; \tag{8}$$

(ii) $B$ 是 $\{x_n\}$ 的下极限的充要条件是

$$B = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} \{x_k\}. \tag{9}$$

证 这里仅证 (i). 设 $a_n = \sup\limits_{k \geq n} \{x_k\}$, 显然 $\{a_n\}$ 是一

递减数列, 并且有界, 设 $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. 一方面, 因为 $x_n \le a_n$, 所以

$$A=\varlimsup_{n\to\infty} x_n \le \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

另一方面, $\forall \varepsilon>0$, 由于 $a_1=\sup\{x_1,x_2,\cdots\}$, 根据上确界定义, $\exists n_1 \ge 1$, 使得 $x_{n_1} > a_1-\varepsilon$. 又因 $\{a_n\}$ 递减, 故 $a_n \ge a, n=1,2,\cdots$, 所以有

$$x_{n_1} > a_1-\varepsilon \ge a-\varepsilon.$$

同理, 由于

前页 后页 返回

$$a_{n_1+1} = \sup\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \cdots\},$$

$\exists n_2 \ge n_1 + 1 > n_1$, 使得 $x_{n_2} > a_{n_1+1} - \varepsilon \ge a - \varepsilon$. $\cdots$,

照此做下去, 可求得 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 使

$$x_{n_{k+1}} > a_{n_k+1} - \varepsilon \ge a - \varepsilon,\ k = 1, 2, \cdots. \qquad (10)$$

这样得到的子列$\{x_{n_k}\}$因仍为有界的, 故其上极限亦存在, 设为 $A'$, 且显然有 $A \ge A'$. (10) 式关于 $k$ 求上极限, 由不等式性质 (4), 得出$A \ge A' \ge a - 2\varepsilon$. 因$\varepsilon$是任意的, 所以又得 $A \ge a$. 从而证得 $A = a$.

例3 用上、下极限证明：若$\{x_n\}$为有界发散数列，则存在$\{x_n\}$的两个子列，收敛于不同的极限.

证 由定理7.6，有界数列$\{x_n\}$发散的充要条件为 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \neq \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. 于是存在$\{x_n\}$的两个子列$\{x'_{n_j}\}$，$\{x''_{n_j}\}$，使得

$$\lim_{j\to\infty} x'_{n_j} = \varliminf_{n\to\infty} x_n \neq \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{j\to\infty} x''_{n_j}.$$

注 本例命题用现在这种证法，可以说是最简捷的.

**例4** 证明：对任何有界数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 有

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\varliminf_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n. \tag{11}$$

**分析** 将 (11) 式改写为

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)-\varlimsup_{n\to\infty}y_n\le\varliminf_{n\to\infty}x_n, \tag{12}$$

若能证明 $-\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n=\varliminf\limits_{n\to\infty}(-y_n)$, 便不难得出结果.

**证** 根据定理7.9 的 (8) 与 (9), 可得

$$-\varlimsup_{n\to\infty}y_n=-\lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n}\{y_k\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n}\{-y_k\}=\varliminf_{n\to\infty}(-y_n).$$

把它用于 (12) 式，并利用例1 的结论 (6)，便有

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)-\varlimsup_{n\to\infty} y_n=\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)+\varliminf_{n\to\infty}(-y_n)$$

$$\le \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n-y_n)=\varliminf_{n\to\infty} x_n\,,$$

这也就证明了 (11) 式.

前页 后页 返回

## 复习思考题

数列的上、下极限，除用定义2 定义外，也可用它们的充要条件( 定理7.7 与定理7.9 ) 来定义.

试从直观性、应用的方便性等方面，分析这三种定义方式各有哪些特点?