§2 连续函数的性质

在本节中,我们将介绍连续函数的局部性质与整体性质.熟练地掌握和运用这些性质是具有分析修养的重要标志.

一、连续函数的局部性质

二、闭区间上连续函数的性质

三、反函数的连续性

四、一致连续性

一、连续函数的局部性质

所谓连续函数局部性质就是指: 若函数 f 在点 x_0 连续(左连续或右连续), 则可推知 f 在点 x_0 的某个局部邻域(左邻域或右邻域)内具有有界性、保号性、四则运算的保连续性等性质.

定理4.2（局部有界性）若函数 f 在点 x_0 连续，则 f 在某邻域 $U(x_0)$ 上有界.

证 因为 f 在 x_0 连续，所以对 $\varepsilon = 1$，存在 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < 1$，故

$$|f(x)| \le |f(x_0)| + 1.$$

注意：我们在证明有界性时，取 $\varepsilon = 1$ 这个特定的值，而不是用术语“对于任意的 $\varepsilon > 0$ ”，这样可求得 $|f(x)|$ 的一个明确的上界.

定理4.3（局部保号性）若函数 f 在点 x_0 连续,且 $f(x_0)>0$ (或 $f(x_0)<0$)，则对任意一个满足 $0<r<f(x_0)$ 或 $(f(x_0)<-r<0)$ 的正数 r, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时,

$$f(x)>r \qquad (\text{或 } f(x)<-r<0),$$

证 因为 f 在 x_0 连续, 所以对正数 $\varepsilon_0=f\left(x_0\right)-r$, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0=f(x_0)-r,$$

前页 后页 返回

于是证得 $f(x) > r > 0.$

注 在具体应用保号性时，我们经常取 $r = \dfrac{f(x_0)}{2}.$

定理4.4（连续函数的四则运算）若函数 $f(x), g(x)$ 均在点 x_0 连续，则函数

(1) $f(x)+g(x),$ (2) $f(x)-g(x),$

(3) $f(x)\cdot g(x),$ (4) $f(x)/g(x),\ g(x_0)\neq 0$

在点 x_0 也是连续的 .

此定理的证明可以直接从函数极限的四则运算得到, 具体过程请读者自行给出.

我们知道, 常函数 $y = c$ 与线性函数 $y = x$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, 故由四则运算性质, 易知多项式函数

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

也是连续函数.

同理, 有理函数

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

(分母不为零) 同样是连续函数.

下面这个定理刻划了连续这个性质在复合运算下是不变的.

定理4.5 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, $g(u)$ 在点 u_0 连续, $u_0=f(x_0)$. 则复合函数 $g(f(x))$ 在点 x_0 连续.

证 由于 $g(u)$ 在点 u_0 连续,因此对于任意的 $\varepsilon > 0$,

存在 $\delta_1 > 0$, 当 $|u - u_0| < \delta_1$ 时, 有

$$|g(u) - g(u_0)| < \varepsilon,$$

又因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 故对上述 $\delta_1 > 0$,

存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| = |u - u_0| < \delta_1,$$

于是

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| = |g(u) - g(u_0)| < \varepsilon,$$

前页 后页 返回

这就证明了 $g(f(x))$ 在点 x_0 连续.

对这个定理我们再作一些讨论, 以加深大家对该定理的认识.

(1) 由 $\lim\limits_{u\to u_0} g(u)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=u_0$, 不一定有

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=A.$$

请大家仔细观察定理4.5 的证明, 看看此时究竟哪里通不过.

(2) 若 $g(u)$ 在 u_0 连续, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=u_0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(u_0)=g(\lim_{x\to x_0} f(x)). \qquad (*)$$

事实上, 只要补充定义（或者重新定义）$f(x_0)=u_0$ 使得 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 应用定理4.5, 就得到所需要的结论. 若将 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=u_0$ 改为

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=u_0,\ \lim_{x\to -\infty} f(x)=u_0 \text{ 或 } \lim_{x\to \infty} f(x)=u_0,$$

$(*)$ 式相应的结论仍旧是成立的.

上述(1)和(2)究竟有什么本质的区别呢？请读者作出进一步的讨论.

例1 求 $\lim_{x\to 1}\sin(1-x^2)$.

解 $\sin(1-x^2)$可视为 $g(u)=\sin u,\ u=(1-x^2)$的复合，所以

$$\lim_{x\to 1}\sin(1-x^2)=\sin(\lim_{x\to 1}(1-x^2))=0.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$.

解 因为 $g(u)=\sqrt{u}$ 在 $u=1$ 连续, 所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to 1}(2-\frac{\sin x}{x})}=\sqrt{2-1}=1.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(1+\dfrac{1}{x})^x$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$, $\sin u$ 在点 $u=\mathrm{e}$ 连续, 所以

$$\lim_{x\to\infty}\sin(1+\frac{1}{x})^x=\sin\mathrm{e}.$$

二、闭区间上连续函数的性质

设 f 在闭区间 $[a,b]$上连续. 在本节中将研究 f 在 $[a,b]$ 上的整体性质, 证明将在第七章里给出.

定义1 设 $f(x)$为定义在数集 D上的一个函数. 若存在$x_0 \in D$,使得对一切 $x \in D$, 均有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)),$$

则称 $f(x)$ 在D上有最大(小)值, x_0 称为最大(小)值点, $f(x_0)$ 称为$f(x)$在D上的最大(小)值.

例如，符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 的最大值为1，最小值为-1；正弦函数 $y=\sin x$ 的最大值为1，最小值为-1；函数 $y=x-[x]$ 的最大值不存在，最小值为零. 注意：

$y=\sin x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上 既无最大值，又无最小值.

(其上确界为1，下确界为-1)

定理4.6（最大、最小值定理）若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大、最小值.

这个定理刻画了闭区间上连续函数的一个深刻的

内涵, 在今后的学习中有很广泛的应用.

推论　若函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续 , 则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

这是因为由定理4.6 可知, 函数 $f(x)$有最大、最小值，从而有上界与下界, 于是 $f(x)$ 在$[a, b]$ 上是有界的.

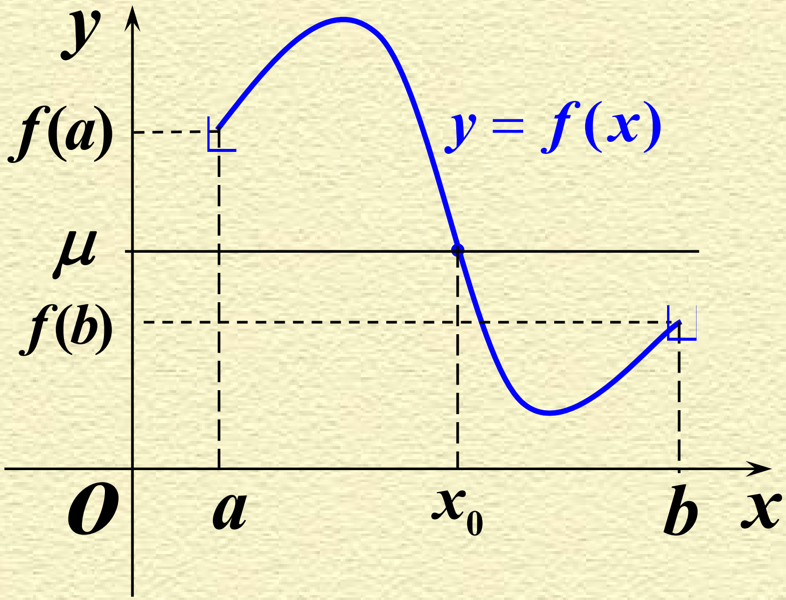
函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in(0,1)$ 虽然也是连续函数, 但是在$(0, 1)$上无界.

这说明定义在开区间和闭区间上的连续函数的性质有着根本的区别.

定理4.7（介值性定理）设函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$. 若μ是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一数($f(a) < \mu < f(b)$ 或 $f(b) < \mu < f(a)$), 则(至少)存在一点 $x_0 \in (a,b)$, 使得

$$f(x_0) = \mu.$$

从几何上看, 当连续曲线 $y = f(x)$ 从水平直线 $y = \mu$ 的一侧穿到另一侧时, 两者至少有一个交点.



前页 后页 返回

推论（根的存在性定理）若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 x_0，使

$$f(x_0)=0$$

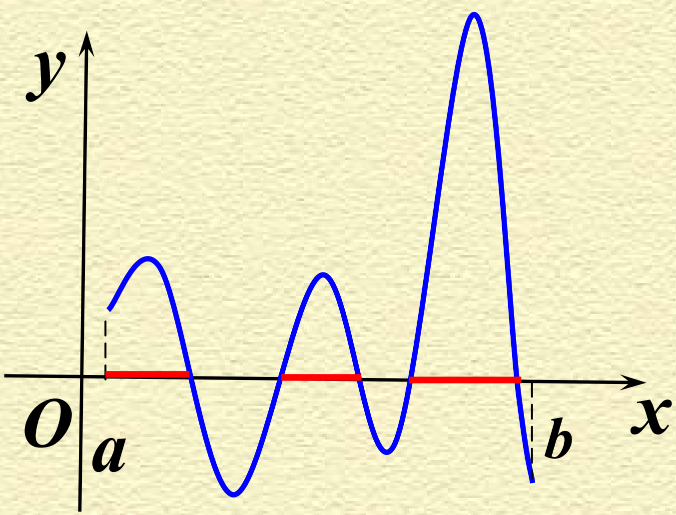
应当注意，此推论与定理4.7是等价的. 于是, 只要证明了推论, 也就完成了定理4.7 证明.

下面用确界定理来证明上述推论, 大家要注意学习确界定理的使用方法.

证 不妨设 $f(a)>0$, $f(b)<0$, 并设

$$E=\{x \mid x\in[a,b],\ f(x)\ge 0\}.$$

(E为图中x轴上的红线部分)从几何上看, E的最大值就是函数的零点. 证明如下:



前页 后页 返回

因为 $a\in E$，所以 $E\neq\varnothing$，又 E 是有界的，故由确界定理，$x_0=\sup E$ 存在，显然 $a\le x_0\le b$.

我们来否定下面两种情形:

1. 若 $f(x_0)>0$，则有 $a\le x_0<b$. 由 $f(x)$在点 x_0是连续的，根据保号性，存在 $\delta>0$ $(x_0+\delta<b)$，使当 $x\in[\,x_0\,,x_0+\delta\,)$ 时，仍有

$$f(x)>0\,.$$

特别是 $f(x_0+\frac{\delta}{2})>0$，使得 $x_0+\frac{\delta}{2}\in E$，这就与

前页 后页 返回

$x_0 = \sup E$ 相矛盾.

2. 若 $f(x_0) < 0$, 则有 $a < x_0 \leq b$. 同样根据保号性,

$\exists\, \delta > 0\,(x_0 - \delta > a)$, 当 $x \in (x_0 - \delta\ , x_0]$ 时, $f(x) < 0$.

同时由 $x_0 = \sup E$, 对上述 δ, 存在 x_1, 使得

$$x_0 - \delta < x_1 \leq x_0,\ x_1 \in E.$$

从而 $f(x_1) \geq 0$, 也导致矛盾.

排除了上面两种情形后, 就推得 $f(x_0) = 0$.

由介值性定理与最大、最小值定理立刻得到如下结论:

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 那么它的最大值 M 与最小值 m 存在, 并且

$$f([a,b])=[m,M].$$

下面再举一些应用介值性定理的例题.

例3 若 $r>0, n$ 为正整数， 则存在唯一的正数 x_0，使得 $x_0^n = r$.

证 先证存在性：

因为 n 为正整数，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$. 由极限的保号性知，存在 x_1，使 $x_1^n > r$. 又因为函数 $f(x) = x^n$ 在 $[0, x_1]$ 上连续，且 $f(0) < r < f(x_1)$，所以存在 $x_0 \in (0, x_1)$，使得 $x_0^n = r$. 这个 x_0 我们记为 $x_0 = \sqrt[n]{r}$（读作 r 的 n 次算术根）.

再证唯一性:

我们只需证明 $f(x)=x^n$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增即可. 事实上, $\forall x, y$, 使 $0\le x<y$, 有

$$y^n-x^n=(y-x)(y^{n-1}+y^{n-2}x+\cdots\cdots+yx^{n-2}+x^{n-1})$$
$$>0,$$

即 $f(x)<f(y)$.

例4 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, $f([a,b])\subset[a,b]$. 求证: 存在 $x_0\in[a,b]$, 使 $f(x_0)=x_0$.

证 由条件知$a \le f(a)$, $f(b) \le b$.

若$a = f(a)$或$b = f(b)$,则结论成立.

现设$a < f(a)$, $f(b) < b$. 作辅助函数

$$F(x) = f(x) - x,$$

则 $F(a) \cdot F(b) = (f(a) - a) \cdot (f(b) - b) < 0.$

因$f(x)$在$[a, b]$上连续,故$F(x)$在$[a, b]$上也连续.

由介值性定理，存在$x_0 \in (a, b)$,使$F(x_0) = 0$, 即

$$f(x_0) = x_0.$$

前页 后页 返回

例5 设 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内满足介值性,并且对于任意的实数 r, $f(x)=r$ 至多有有限个解. 证明: $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

证 只要证 $\forall x_0 \in (a,b)$, $f(x)$ 在点 x_0 连续. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由条件, 方程

$$f(x) = f(x_0) + \varepsilon \quad 与 \quad f(x) = f(x_0) - \varepsilon$$

的解至多为有限个.

1. 设这有限个解为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 记

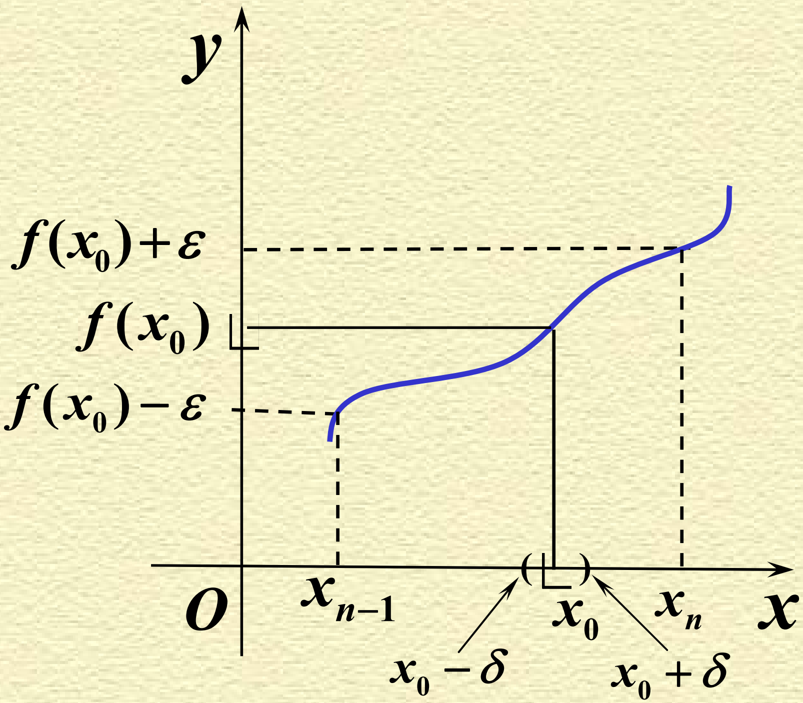
$$\delta = \min\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|, \cdots, |x_n - x_0|\},$$

显然 $\delta > 0$.

由介值性条件不难证明:

当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$



2. 如果解为空集, 任意取 $\delta > 0$, $U(x_0;\delta) \subset (a,b)$,

当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

即 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

三、反函数的连续性

定理4.8 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调且连续，则反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 或 $[f(b),f(a)]$ 上连续，且 $f^{-1}(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的单调性.

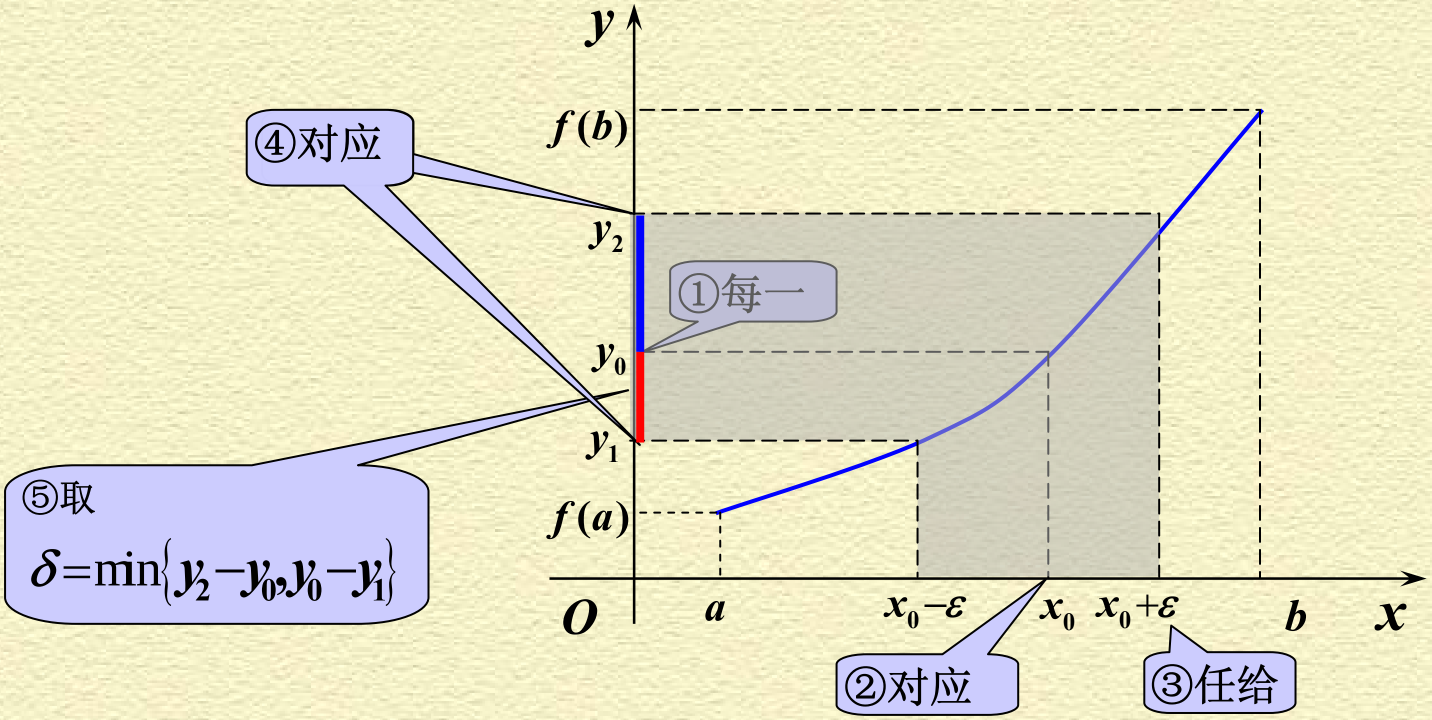
证 不妨设 $f(x)$ 严格增，那么 $[f(a),f(b)]$ 就是反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域.

1. $x=f^{-1}(y)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 上严格增 (证明见定理1.2).

2. $x = f^{-1}(y)$ 在 $[f(a), f(b)]$ 上连续.

对于任意 y_0 , $f(a) < y_0 < f(b)$, 令 $x_0 = f^{-1}(y_0)$,

则 $a < x_0 < b$. (如图所示)



前页 后页 返回

对于任意的正数 ε , $a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$, 设

$$y_1 = f(x_0 - \varepsilon), y_2 = f(x_0 + \varepsilon),$$

令 $$\delta = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\} > 0,$$

当 $(y_1 \le) y_0 - \delta < y < y_0 + \varepsilon (\le y_2)$ 时,

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2),$$

即 $$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < y < f^{-1}(y_0) + \varepsilon.$$

这就说明了 $x = f^{-1}(y)$ 在 $\big(f(a), f(b)\big)$ 上连续.

请读者类似地证明该函数在端点的连续性.

例6 由于 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续且严格增,因此它的反函数 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上也是连续且严格增. 关于其它的反三角函数

$$y=\arccos x,\ y=\arctan x,\ y=\operatorname{arccot} x,$$

均可得到在定义域内连续的结论.

例7 由于 $y=x^n$ (n为正整数) 在 $[0,+\infty)$ 上连续且严格增, 那么其反函数 $y=x^{\frac{1}{n}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上亦为连续且严格增.

前页 后页 返回

四、一致连续性

在本节中，我们将介绍一致连续性这个及其重要的概念.

定义2. 设 $f(x)$为定义在区间I上的函数, 如果对于任意的正数$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$, 使得对任意$x_1, x_2\in I$, 只要$|x_1-x_2|<\delta$，就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在区间I上一致连续.

前页 后页 返回

首先来看两个例题.

例8 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续 .

证 因为对任意的 $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$,有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\le|x_2-x_1|,$$

所以对任意的正数 $\varepsilon>0$,只要取 $\delta=\varepsilon$,当

$|x_1-x_2|<\delta$ 时, $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\le|x_2-x_1|<\varepsilon$,

所以 $\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

例9 证明 $y=\frac{1}{x}$在 $(0,1)$ 内不一致连续.

证 首先我们根据一致连续的定义来叙述$f(x)$在区间I上不一致连续的定义:

存在$\varepsilon_0>0$, 对任意正数δ (无论δ多么小), 总有$x_1,x_2\in I$, 虽然$|x_1-x_2|<\delta$,但仍有

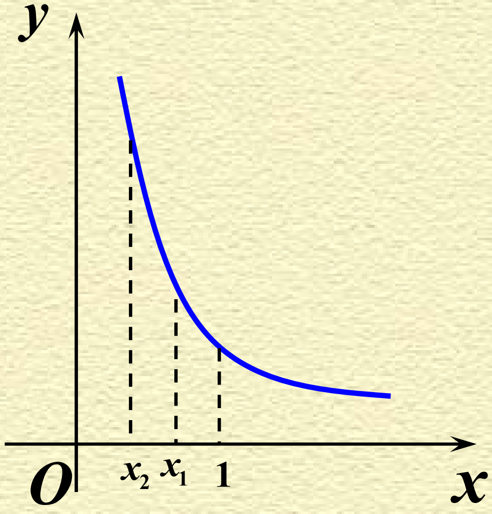
$$|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon_0.$$

现在来验证函数 $y=\frac{1}{x}$, $x\in(0,1)$ 确实不是一致连续的.

取$\varepsilon = 1$，对任意正数 $\delta\ (\delta < \frac{1}{2})$,

令 $x_1 = \delta,\ x_2 = \frac{\delta}{2}$, 虽$|x_1 - x_2| < \delta$,

但 $\left|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right| = \frac{1}{\delta} > 1.$



这就说明$y = \frac{1}{x}$在 $(0,1)$ 内不一致连续.

试问, 函数 $f(x)$ 在区间I上一致连续与 $f(x)$在区间I上连续的区别究竟在哪里？

前页 后页 返回

答:(1) 首先, 对于 $\varepsilon > 0$, 如果 $f(x)$在区间 I上连续,

那么, δ 不仅与 ε 有关, 而且还与所讨论的点 x_0有关,

即 $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$. 而 $f(x)$ 在区间 I上一致连续. 那么

δ 仅与 ε 有关.

比如 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $x_0 \in (0, 1)$连续, 对于任意正数 ε, 所得

$$\delta = \min\left\{\frac{2\varepsilon}{x_0^2}, \left|\frac{x_0}{2}\right|\right\}$$, 显然 它与 ε, x_0都有关.在例8中

已证得 $y = \sqrt{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续. 这是由于

前页 后页 返回

$\varepsilon=\delta$, δ与x_0无关.

(2) 函数$f(x)$在每一点$x_0\in I$ 连续, $\forall\varepsilon>0$,

$\exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$, 当$|x-x_0|<\delta$时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

若$\delta(\varepsilon,x_0)$在x_0的变化过程中有一个正下界(当然这个下界只与ε有关, 而与x_0无关), 则此时$f(x)$在区间I上就一致连续了.

下述定理是连续函数在闭区间上的又一整体性质.

定理4.9（一致连续性定理） 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

这个定理告诉我们: 定义在闭区间上的函数，连续和一致连续是等价的.

例10 设区间 I_1 的右端点为 $c \in I_1$，区间 I_2 的左端点也为c，并且 $c \in I_2$. 证明：若 $f(x)$ 分别在 I_1, I_2 上一致连续，则 $f(x)$ 在区间 $I_1 \cup I_2$上也一致连续.

证 对任意的 $\varepsilon > 0$，因为 $f(x)$ 在 I_1, I_2 上一致连续，所以分别存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$，使得

当 $x_1, x_2 \in I_1$, $|x_1 - x_2| < \delta_1$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$,

当 $x_1, x_2 \in I_2$, $|x_1 - x_2| < \delta_2$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 则对于任意的 $x_1, x_2 \in I_1 \cup I_2$,

当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有以下两种情形:

情形1. $x_1, x_2 \in I_1$ 或 $x, x_2 \in I_2$. 此时自然有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

前页 后页 返回

情形2. $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$. 注意到

$$c \in I_1 \cap I_2, |x_1 - c| < \delta, |x_2 - c| < \delta,$$

可得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(c)| + |f(x_2) - f(c)|$$

$$\le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

综上，证得 $f(x)$ 在区间 $I_1 \cup I_2$ 上一致连续.

注 例10的条件“$c \in I_1 \cap I_2$”是重要的. 比如

$$f(x)=\begin{cases}1, & 1\le x\le 2\\ 0, & 2<x\le 3\end{cases}$$

在区间 $[1,2]$ 与区间 $(2,3]$ 上分别一致连续, 但在区间 $[1,3]$ 上不连续, 当然也不一致连续.

例11 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，并且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. 证明 $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

证 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，所以对任意的正数$\varepsilon>0$，存在$X>a$，当$x_1,x_2>X$时，有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

又$f(x)$在$[a,X+1]$上连续，故由定理4.9可知$f(x)$在$[a,X+1]$上一致连续. 因此对上述ε，存在正数$\delta\,(\delta<1)$，使对任意$x_1,x_2\in[a,X+1]$,

只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 必有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

现对任何 $x_1, x_2 \in [a, +\infty), |x_1 - x_2| < \delta$, 讨论如下.

情形 1. $x_1, x_2 \in [a, X+1]$, 自然有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon;$$

情形2. 注意到 $\delta < 1$, 所以若情形1 不成立, 必然有

$$x_1 > X, x_2 > X,$$

于是

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

综上, 证得 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$上一致连续 .