

§3 函数概念

函数的概念，在中学数学中我们已有初步的了解。本节将作进一步的讨论。

一、函数的定义

二、函数的四则运算

三、复合函数

四、反函数

五、初等函数

前页

后页

返回

一、函数的定义

定义1 D 与 M 是 \mathbf{R} 中非空数集,若有对应法则 f ,使 D 内每一个数 x ,都有惟一的一个数 $y \in M$ 与它相对应,则称 f 是定义在 D 上的函数,记作

$$f : D \rightarrow M,$$

$$x \mapsto y.$$

D 称为 f 的定义域;

$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为 f 的值域;

前页

后页

返回

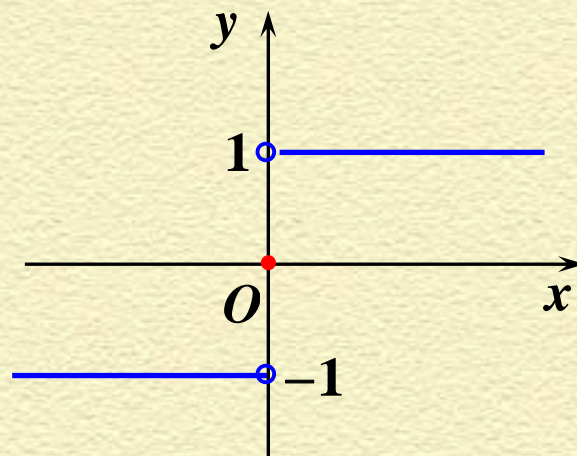
$G = \{ (x, y) \mid y = f(x), x \in D \}$ 称为 f 的图象.

注1 函数由定义域 D 和对应法则 f 二要素完全决定, 因此若给出函数的定义域和对应法则, 也就确定了函数. 它与自变量与应变量的符号无关.

注2 表示函数有多种方法, 常见的有解析法、列表法和图象法. 解析法表示函数时, 若没有特别指明其定义域, 则一般约定其定义域为使该解析式有意义的自变量的全体(即存在域).

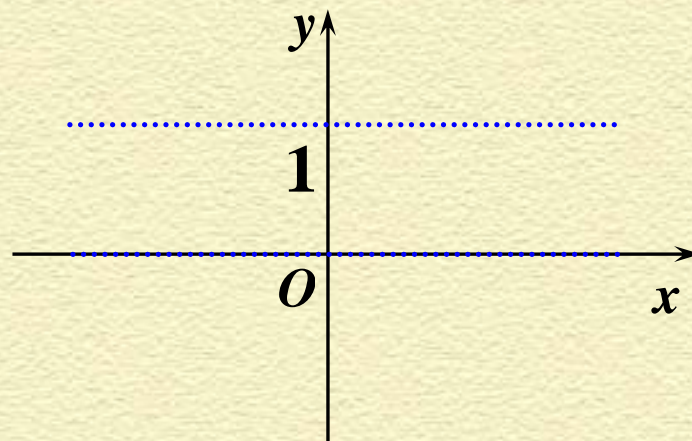
例1 符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



例2 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$



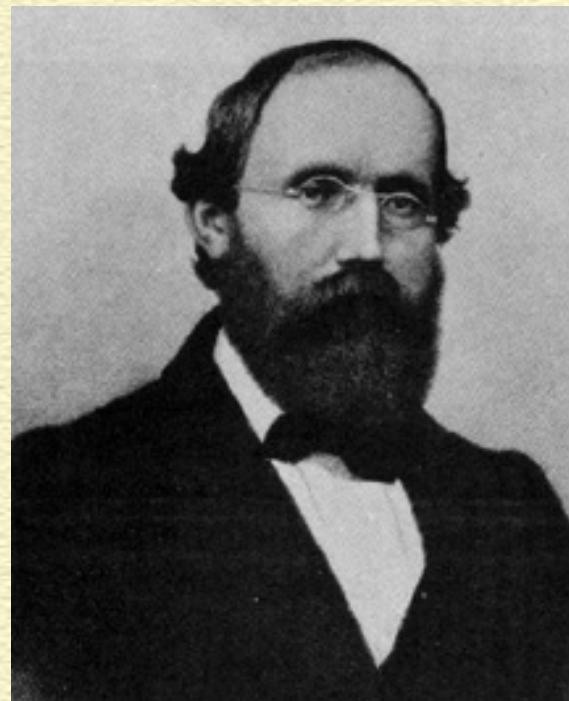
前页

后页

返回



狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.
1805—1859, 德国)



黎曼(Riemann,B. 1826—1866,德国)

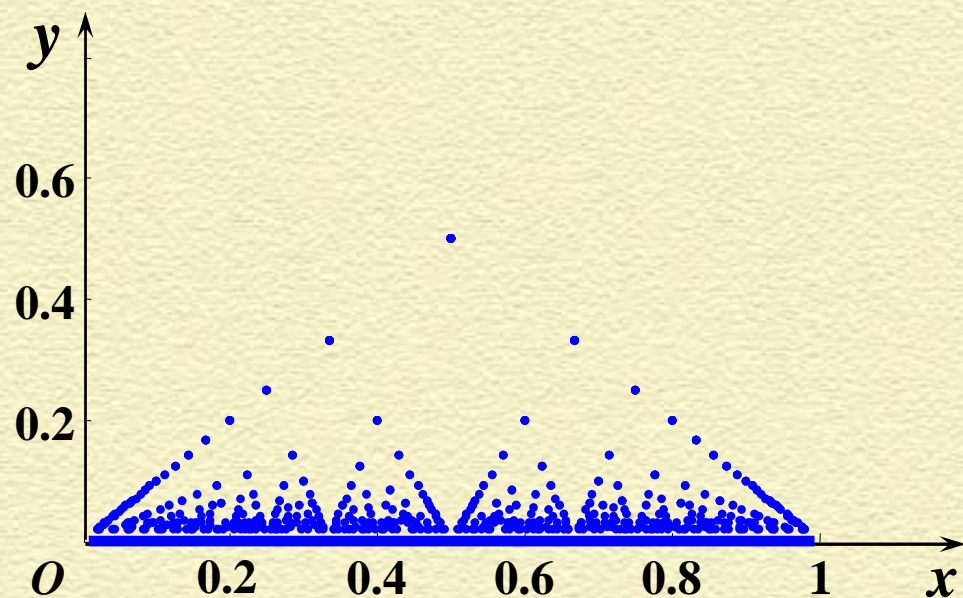
前页

后页

返回

例3 黎曼函数

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{当 } x = \frac{p}{q} \text{ (} p, q \in \mathbf{N}_+, \frac{p}{q} \text{ 既约真分数);} \\ 0, & x = 0, 1 \text{ 或 } x \in (0, 1) \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$



前页

后页

返回

二、函数的四则运算

设函数 f 的定义域为 D_f , 函数 g 的定义域为 D_g .

1. $f \pm g$ 的定义域为 $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$,

且 $\forall x \in D_f \cap D_g, (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$.

2. $f \cdot g$ 的定义域为 $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$,

且 $\forall x \in D_f \cap D_g, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

3. $\frac{f}{g}$ 的定义域为 $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D^*$, 其中 $D^* = \{x \mid x \in D_g,$

且 $g(x) \neq 0\}$, $\forall x \in D_{\frac{f}{g}}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

三、复合函数

设函数 f 的定义域为 D_f , 函数 g 的定义域为 D_g ,
复合函数 $f \circ g$ 的定义域为

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, \text{且 } g(x) \in D_f\}, \text{ 则}$$

$$\forall x \in D_{f \circ g}, f \circ g(x) = f(g(x)).$$

例4 函数 $f(u) = \sqrt{u}, u \in [0, +\infty)$ 与函数 $g(x)$

$= 1 - x^2, x \in \mathbf{R}$ 的复合函数为 $y = f(g(x)) = \sqrt{1 - x^2}$,

其中 $D_{f \circ g} = [-1, 1]$.

例5 设 $f(x) = x^2; g(x) = \arcsin x; h(x) = \ln x$. 则

$$(f \circ g \circ h)(x) = \arcsin^2(\ln x), D_1 = [e^{-1}, e];$$

$$(f \circ h \circ g)(x) = \ln^2(\arcsin x), D_2 = (0, 1];$$

$$(g \circ f \circ h)(x) = \arcsin(\ln^2 x), D_3 = [e^{-1}, e];$$

$$(g \circ h \circ f)(x) = \arcsin(\ln x^2), D_4 = [e^{-1/2}, e^{1/2}];$$

$$(h \circ f \circ g)(x) = \ln(\arcsin^2 x), D_5 = [-1, 0) \cup (0, 1];$$

$$(h \circ g \circ f)(x) = \ln(\arcsin(x^2)), D_6 = [-1, 0) \cup (0, 1].$$

其中 $D_k, k = 1, \dots, 6$ 是相应复合函数的定义域.

四、反函数

若函数 f 的定义域为 D_f , 满足:

$$\forall y \in f(D), \exists \text{ 惟一 } x \in D, \text{ 使 } f(x) = y,$$

则存在函数 f^{-1} , $D_{f^{-1}} = f(D)$ 且 $\forall y \in f(D)$,

$f^{-1}(y) = x$, 其中 x 是使 $f(x) = y$ 的惟一的 $x \in D$.

注 反函数表示式 $f^{-1}(y) = x$ 中, y 是自变量, x 是因变量. 由于函数与自变量、因变量记号无关, 因此一般反函数 f^{-1} 记为 $y = f^{-1}(x)$.

例6 双曲函数 $\text{sh } x$ 和 $\text{ch } x$ 定义如下:

$$\text{sh } x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \text{ch } x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad x \in \mathbf{R}.$$

$\text{sh } x$ 在 \mathbf{R} 上严格增, 因此 $\text{sh } x$ 有反函数.

设 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, 得到 e^x 的一元二次方程

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

解得 $x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 + 1}\right)$ (负舍),

因此 $y = \text{sh } x$ 的反函数为

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

$\operatorname{ch} x$ 在 \mathbf{R}_+ 和 \mathbf{R}_- 的值域均为 $[1, +\infty)$, 在 \mathbf{R}_+ 上严格增, 在 \mathbf{R}_- 上严格减.

设 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, 得到 e^x 的一元二次方程

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0.$$

解得 $x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)$,

因此 $\operatorname{ch} x$ 在 \mathbf{R}_+ 和 \mathbf{R}_- 的反函数分别为

$$y_1 = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), x \in [1, +\infty).$$

$$y_2 = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right), x \in [1, +\infty).$$

五、初等函数

定义1 以下六类函数称为基本初等函数

(1) 常量函数 $y = c$ (c 为常数);

(2) 幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为实数);

(3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$);

(4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$);

(5) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x,$
 $y = \tan x, y = \cot x;$

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
 $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

定义2 $\forall a > 0, a \neq 1$, 定义

$$a^x = \begin{cases} \sup \{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r < x\}, & a > 1, \\ \inf \{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r < x\}, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

定义3 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数, 称为初等函数.

狄利克雷函数与黎曼函数是非初等函数.

复习思考题

1. 函数 $f(x)$ 定义在 $[a, b]$ 上, $f(a) = 0, f(b) = 1, [0, 1]$ 是否一定都在 f 的值域 $f([a, b])$ 之中.
2. $f(x)$ 和 $g(x)$ 定义在 $[a, b]$ 上, 是否一定存在某个区间 $[a_0, b_0] \subset [a, b]$, 使 $\forall x \in [a_0, b_0], f(x) \leq g(x)$ 或 $\forall x \in [a_0, b_0], f(x) \geq g(x)$?
3. 验证黎曼函数 $R(x)$ 具有以下性质:
 $\forall \varepsilon > 0, R(x) \geq \varepsilon$ 只有有限多个解.