# 基于无噪后验错误矢量信号能量的 变正则因子仿射投影算法

# 师黎明,林 云

(重庆邮电大学移动通信技术重庆市重点实验室,重庆400065)

摘 要: 变正则因子技术是提高仿射投影自适应算法性能的重要方法之一.由于环境噪声的影响,现有的变正则因子自适应算法收敛速度较慢且稳态误差较大,各种测量、评估误差的存在进一步恶化了算法性能.为提高自适应 算法的跟踪性能,本文在分析无噪先验错误矢量、无噪后验错误矢量和额外均方错误间关系的基础上,提出通过最小 化无噪后验错误矢量信号能量来推导自适应变正则因子表达式的方法.在实践应用中,该方法利用了测量噪声的统计 方差特性,并提出一种更加光滑且更加容易控制的指数缩放因子评估方法.系统辨识的仿真结果表明本文方法与传统 的变正则因子方法以及变步长方法相比有更快的收敛速度与更低的稳态误差.

 关键词:
 自适应滤波; 仿射投影算法; 无噪后验错误矢量信号能量; 变正则因子; 指数缩放因子

 中图分类号:
 TN911.72
 文献标识码:
 A
 文章编号:
 0372-2112 (2015)01-0007-06

 电子学报 URL:
 http://www.ejournal.org.cn
 DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.01.002

# Variable Regularization Parameter for Affine Projection Algorithm Based on Energy of the Noise-Free a Posterior Error Vector Signal

#### SHI Li-ming, LIN Yun

(Chongqing Key Lab of Mobile Communications Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: Variable regularization (VR) parameter technique is an important method to improve the tracking performance of affine projection adaptive filtering algorithm. Existing VR algorithms suffer from environmental noise and estimation errors, making it slow to converge and have a large steady-state error. Based on the analysis of the relationships between noise-free a priori error vector, noise-free a posterior error vector and excess mean-square error, a novel VR method via minimizing energy of the noise-free a posterior error vector is proposed to improve the tracking performance. The statistical variance of the measurement noise and a smoother and more easily-controlled exponential scaling factor estimation method are used for practical implementation. Reduced steady-state misalignment and improved convergence speed as compared to conventional algorithms are demonstrated by simulations in system identification scenarios.

Key words: adaptive filtering; affine projection algorithm; energy of the noise-free a posterior error vector signal; variable regularization parameter; exponential scaling factor

## 1 引言

自适应滤波算法在通信领域应用广泛,如系统辨 识、网络回声消除等等<sup>[1~3]</sup>.为克服输入信号相关性影 响,常用仿射投影算法(Affine Projection Algorithm, APA) 替代归一化最小均方算法(Normalized Least Mean Square, NLMS)以提高自适应滤波算法的收敛速度<sup>[4]</sup>. APA 通过重复利用过去的输入信号以提高算法性能,可 视为 NLMS 算法的推广.众所周知, NLMS 算法的步长应 除以输入矢量 *l*<sub>2</sub> 泛数的平方与一个小的正常数之 和<sup>[1]</sup>.小的正常数是为避免除零风险.与之类似, APA 也 需添加一个正则化对角矩阵以避免对不满秩方阵求逆. 正则化对角矩阵可表示为正则因子 δ 与单位矩阵的乘 积.带有正则化对角矩阵的仿射投影算法称为正则化 APA(Regularized APA, R-APA)<sup>[5,6]</sup>.

变步长技术是一种提高 APA 收敛速度与稳态误差 性能<sup>[7~10]</sup> 的 重 要 方 法 (Variable Step-Size APA, VSS-APA).然而, APA 的跟踪性能也可通过变正则因子技术

收稿日期:2013-09-22;修回日期:2014-07-01;责任编辑:孙瑶

基金项目:长江学者和创新团队发展计划(No. IRT1299);重庆市科委重点实验室专项经费

来提高<sup>[6,11]</sup>.该方法在 H<sup>\*</sup>意义上是最优的,且在扰动 与模型不稳定方面有高鲁棒性.而且,一个好的常量正 则因子即可提高算法性能<sup>[12,13]</sup>.Rey 等提出一种通过最 小化滤波器系数错误矢量的 l<sub>2</sub> 泛数的期望来获得可变 正则因子 APA(Variable Regularization APA,VR-APA)表达 式的方法<sup>[6]</sup>.Choi 等人提出一种基于均方错误矢量的归 一化梯度来推导自适应正则矩阵(Adaptive Regularization APA,AR-APA)<sup>[14]</sup>表达式的方法.Yin 等人将已知或可测 的高斯噪声统计特性加入自适应过程,提出一种新的 变正则因子仿射投影算法<sup>[15]</sup>.

上述变正则因子方法在一定程度上提高了 R-APA 的跟踪性能,然而文献[6]与[14]的代价函数是基于传 统自适应滤波算法的推导思维,即尽可能使后验错误 为零,因而未能充分考虑环境噪声对自适应算法跟踪 性能的影响,文献[15]中代价函数的洗取考虑到了统计 噪声的影响,但其直接令无噪后验错误为零的处理方 法将迫使算法对不相关的干扰信号进行补偿,最终导 致稳态误差增加.除此之外,各种测量、评估误差的存 在也是影响上述各种变正则因子方法性能的重要因 素.鉴于上述不足,本文提出一种通过最小化无噪后验 错误矢量信号能量来推导自适应变正则因子表达式的 方法,由于以无噪后验错误矢量信号的能量最小化作 为代价函数,而非直接令无噪后验错误为零[15],这种带 有均方意义的处理方法使算法对不相关噪声信号的干 扰有较强的鲁棒性.在实践逼近中,本文使用了测量噪 声的统计方差特性,并给出一种更加光滑且更加容易 控制的指数缩放因子评估方法.除此之外,文中还讨论 了所提出算法的稳定性能,系统辨识的仿真结果表明 新算法比现有方法收敛速度更快目稳态误差更低.

### 2 VR-APA 自适应滤波算法

首先简要回顾传统的 R-APA, 然后推导新的 VR-APA.本文基于系统辨识模型<sup>[14~17]</sup>进行分析.设  $w_o$  是 待辨识系统的有限长冲激响应(L 为其长度);  $w_i$  是自 适应滤波器在第 i 次迭代时对  $w_o$  的评估; 期望信号  $\{d_i\}$ 满足:

$$d_i = \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{w}_o + v_i \tag{1}$$

其中  $u_i = (u_i, u_{i-1}, \dots, u_{i-L+1})^T, v_i$  表示测量噪声,上标 表 T 示矩阵转置.

### 2.1 传统的 R-APA

传统 R-APA 的迭代公式为:

 $w_{i} = w_{i-1} + \mu U_{i} (U_{i}^{T}U_{i} + \delta I)^{-1} e_{i}$ (2) 其中  $U_{i} = [u_{i}, u_{i-1}, \cdots, u_{i-K+1}] \in \Re^{L \times K}, \mu$  表示步长,  $d_{i} = (d_{i}, d_{i-1}, \cdots, d_{i-K+1})^{T}, \delta$  表示正则因子. 定义 *i* 时 刻先验错误矢量:  $e_{i} = d_{i} - U_{i}^{T}w_{i-1}$ . 式(2)有两个方面值 得注意:一方面, R-APA 的收敛性能分析<sup>[18]</sup>表明 0 <  $\mu$ <1或1 <  $\mu$  < 2 均能使算法收敛;然而,第一种选择有 更低的稳态误差,且当  $\mu$  = 1 时,算法收敛速度最快.另 一方面,  $\delta I$  是为避免对不满秩方阵求逆而添加的一个 对角矩阵.事实上, R-APA 算法的跟踪性能与正则因子  $\delta$  的取值联系十分紧密<sup>[6]</sup>.具体的说,小正则因子等效 于大的步长,进而导致高速收敛与高稳态误差;大正则 因子等效于小的步长,进而导致缓慢收敛与低稳态误 差.基于以上两方面考虑,可采用固定步长  $\mu$  = 1 来保 证算法高速收敛,并用变正则因子方法来提高 R-APA 的跟踪性能.据此,滤波器系数更新式(2)改写为:

$$\boldsymbol{w}_{i} = \boldsymbol{w}_{i-1} + \boldsymbol{U}_{i} (\boldsymbol{U}_{i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_{i} + \delta_{i} \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{e}_{i}$$
(3)

# **2.2 基于无噪后验错误矢量信号能量的 VR-APA** 先验错误矢量 *e*: 可重新表示为:

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_{f,i} + \boldsymbol{v}_i \tag{4}$$

其中定义无噪先验错误矢量为:

$$\boldsymbol{e}_{f,i} = \boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w}_o - \boldsymbol{w}_{i-1})$$
(5)

式(4)中 $v_i$ 是测量噪声矢量,它的所有元素都服从零均值、相互独立的高斯分布,且方差均为 $\sigma^2$ .定义无噪后验错误矢量为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} = \boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w}_o - \boldsymbol{w}_i) \tag{6}$$

根据式(3)~(6)计算无噪后验错误矢量与无噪先验错 误矢量间的关系,得:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_i \boldsymbol{S}_i) \boldsymbol{\varepsilon}_{f,i} - \boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_i \boldsymbol{S}_i \boldsymbol{v}_i$$
(7)

其中

$$\boldsymbol{S}_{i} = (\boldsymbol{U}_{i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{i} + \delta_{i}\boldsymbol{I})^{-1}$$
(8)

近几年已有很多准则被用来推导变正则因子表达 式,例如最大化均方偏差(Mean-Square Deviation, MSD)的 减小准则<sup>[6]</sup>,最小化均方错误(Mean-Square Error, MSE)<sup>[14]</sup>准则,令无噪后验错误为零<sup>[15]</sup>准则等等.然而, 如引言所述,这些方法尚有不足.为提高算法的性能, 本文提出一种新的准则来推导变正则因子表达式,即 最小化无噪后验错误矢量信号能量准则.由于无噪后 验错误的运用,而非基于尽可能使先验错误为零的假 定<sup>[6,14]</sup>,提出算法充分考虑了统计噪声特性对算法性能 的影响.同时,由于信号能量的运用,而非直接令无噪 后验错误为零[15],这种带有均方意义的处理方法使算 法对不相关噪声信号的干扰有较强的鲁棒性.除此之 外,无噪后验错误矢量信号能量可视为剩余均方错误 (Excess Mean-Square Error, EMSE)的一种测量<sup>[1]</sup>.各种自 适应滤波算法的最终目标正是使自适应滤波器以更快 的收敛速度来获得更低的 EMSE,因此直觉上我们可以 通过在每次迭代中最小化无噪后验错误矢量信号能量 来提高算法性能.

基于最小化无噪后验错误矢量信号能量准则的代

价函数可以表示为:

$$J(\delta_i) = \min_{\delta_i} \{ E[ \parallel \boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} \parallel^2] \}$$
(9)

根据式(7), 取 
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{p,i}$$
的 $L_2$ 之效平方的期望, 得:  

$$E[\|\boldsymbol{\varepsilon}_{p,i}\|^2] = E[\boldsymbol{e}_{f,i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_i\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_i)(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{S}_i)\boldsymbol{e}_{f,i}]$$

$$+ E[\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_i)^2\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{v}_i]$$
(10)

 $U_i^{\mathrm{T}}U_i$ 的特征值分解表示为:

$$\boldsymbol{U}_{i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{i} = \boldsymbol{Q}_{i}\boldsymbol{\Lambda}_{i}\boldsymbol{Q}_{i}^{\mathrm{T}}$$
(11)

其中  $\Lambda_i = \text{diag} \{\lambda_1(i), \lambda_2(i), \dots, \lambda_K(i)\}$ 表示一个对角 矩阵,对角元素分别为  $U_i^T U_i$ 的特征值,  $Q_i$ 的列向量为 特征值所对应的特征向量.将式(11)代入式(8),得:

$$\boldsymbol{S}_{i} = \boldsymbol{Q}_{i} (\boldsymbol{\Lambda}_{i} + \boldsymbol{\delta}_{i} \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{Q}_{i}^{\mathrm{T}}$$
(12)

将式(11)和式(12)代人式(10),得:  

$$E[ \| \boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} \|^{2}]$$

$$= E[ \boldsymbol{\varepsilon}_{f,i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{i} \operatorname{diag} \{ \cdots, (\delta_{i}/(\delta_{i} + \lambda_{k}(i)))^{2}, \cdots \} \boldsymbol{Q}_{i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon}_{f,i} ]$$

$$+ E[ \boldsymbol{v}_{i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{i} \operatorname{diag} \{ \cdots, (\lambda_{k}(i)/(\delta_{i} + \lambda_{k}(i)))^{2}, \cdots \} \boldsymbol{Q}_{i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_{i} ]$$
(13)

对式(13)右边关于 
$$\delta_i$$
 求导并令其为零,得恒等式:  
 $E[\mathbf{e}_{f,i}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_i \operatorname{diag} \cdots, \lambda_k(i) \delta_i / (\delta_i + \lambda_k(i))^3, \cdots \} \mathbf{Q}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_{f,i}]$   
 $= E[\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_i \operatorname{diag} \cdots, \lambda_k^2(i) / (\delta_i + \lambda_k(i))^3, \cdots \} \mathbf{Q}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_i]$ 
(14)

#### 2.3 实践逼近与稳定性考虑

式(14)的推导过程没有用任何的近似,然而要得到 一个关于  $\delta_i$  闭合形式的解需提前知道  $U_i^T U_i$  的特征值 与特征向量信息.这在实践中是不可能的,因此需要引 入一些近似假定.  $U_i^T U_i$  的特征值可近似为<sup>[6,14]</sup>

$$\lambda_k(i) \approx L\sigma_u^2(i), \quad 1 \le k \le K \tag{15}$$

其中  $L_{u_u}^2(i)$ 可视为所有特征值的平均值, $\sigma_u^2(i)$ 是在第 *i*次迭代时对输入信号瞬时方差的估计,可近似表示 为:

$$\sigma_u^2(i) \approx \operatorname{Tr} \{ \boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_i \} / L K$$
 (16)

其中 Tr{·}表示矩阵的迹.将式(15)(16)代人式(14),得 变正则因子表达式:

$$\delta_i = L\sigma_u^2(i) E[\parallel \mathbf{v}_i \parallel^2] / E[\parallel \mathbf{e}_{f,i} \parallel^2]$$
(17)

虽然本文用与现有文献<sup>[6,15]</sup>不同的准则推导变正则因子表达式,但正则因子的值在迭代时的变化过程与现有结果及期待结果有一致性.具体的说,在迭代的开始阶段,较大的无噪先验错误导致一个小的 $\delta_i$ ,从而保证了高速收敛.随着迭代持续,逐渐减小的错误能量导致逐渐增大的 $\delta_i$ ,进而算法跟踪的准确性提高.当算法接近收敛时,无噪先验错误矢量的泛数接近于零,即正则因子几乎为正无穷,导致算法有小的稳态误差.值得注意的是,正则因子在整个迭代过程中总是正值,且假定测量噪声的方差是已知或可估的,即 $E[||v_i||^2] = Lo_i^2$ 成立. $e_{i,i} = i = i = i = Lo_i^2$ 

-  $\|v_i\|^2$ )可从式(4)直接导出,然而  $\|e_i\|^2$ 的统计特性无法在实践中获得.常用的方法是以时间平均代替统计平均,但当算法接近收敛时这种方法会导致很大的偏差.这是由于当用常数值  $L\sigma_i^2$ 代替  $\|v_i\|^2$ 时,随机出现的噪声值常会导出负的或较小的  $\delta_i$ ,而式(17)表明正则因子应始终为正值且应随迭代的进行一直增加.更重要的是,当算法接近收敛时这种时间平均估计方法很难保证一个足够大的正则因子来确保低稳态误差与算法的稳定性.为解决以上问题,本文提出一种更加光滑且更加容易控制的评估方法:

$$\operatorname{var}_{i} = \lambda \operatorname{var}_{i-1} + (1-\lambda) \left( \parallel \boldsymbol{e}_{i} \parallel^{2} - L\sigma_{v}^{2} \right)$$
(18)  
$$\hat{\sigma}_{f,i}^{2} = \lambda \widehat{\sigma}_{f,i-1}^{2} + (1-\lambda) \exp\left(-\gamma L \sigma_{v}^{2} / \parallel \boldsymbol{e}_{i} \parallel^{2}\right) \operatorname{var}_{i}$$
(19)

其中 λ 表示光滑因子, exp(·)表示以 e 为基的指数函 数,  $\gamma$  表示值大于1的衰减因子. var<sub>i</sub> 和 $\hat{\sigma}_{f,i}^2$ 分别表示对  $E[ \| \mathbf{e}_{f,i} \|^2]$ 的时间平均评估和带有指数缩放因子的评 估.注意,若理论上不可能的情况 ||  $e_i ||^2 - Lc_n^2 < 0$  出现 时,  $\mathcal{U}$  var<sub>*i*</sub> = var<sub>*i*-1</sub>. 光滑因子  $\lambda$  根据  $\lambda$  = 1 – 1/ $\eta$ L 计算, 其中  $\eta$  是一个自然数. 表达式 exp( -  $\gamma L \sigma_v^2 / || \mathbf{e}_i ||^2)$ 称 为指数缩放因子.在迭代的开始阶段,  $\| e_i \|^2$  值较大, 缩放因子趋近于 1,进而保证了大的  $\hat{\sigma}_{t,i}^2$ 和小的  $\delta_i$ ,即算 法在开始阶段高速收敛.当算法接近收敛时,无噪先验 错误矢量的泛数平方  $\| e_{f,i} \|^2$  有较小的值,也就是  $\| \boldsymbol{e}_i \|^2 \approx \| \boldsymbol{v}_i \|^2 \approx L \sigma_v^2 \, \mathrm{d} \boldsymbol{\omega}$ .这时,影响缩放因子大小 的主要因素为衰减因子 γ.具体的说,大的衰减因子导 致非常小的  $\hat{\sigma}_{t,i}^2$ ,从而导出非常大的  $\delta_i$  以保证低稳态 误差.但需要注意的是,过大的衰减因子会导出极大的 δ,尽管这在理论上是可行的,但在实践中会导致溢出 问题,且会影响算法开始阶段的收敛速度.通过广泛的 实验发现,衰减因子γ的值取2到4之间能在不同的系 统环境下取得较好效果,基于上述方法,即使随机出现 的噪声值导出与理论结果不符的  $\| \boldsymbol{e}_i \|^2 - L \sigma_x^2$ , 缩放因 子的衰减功能也会限制其影响,尤其是在算法接近收 敛时.更重要的是,这种评估方法能保证算法在收敛阶 段有非常大的 $\delta_i$ ,从而使算法有低的稳态误差.然而为 了实现方便,2可以代替 e 作为指数函数的基.

接下来,在未假定步长 μ=1 的情况下分析算法的 稳定性.当且仅当无噪后验错误矢量信号能量小于无 噪先验错误矢量信号能量时算法稳定,即:

$$E[ \| \boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} \|^{2}] - E[ \| \boldsymbol{e}_{f,i} \|^{2}] < 0$$

$$R B = E[ \| \boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} \|^{2}] = E[ \| \boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} \|^{2} = E[ \| \boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} \|^{2}] = E[ \| \boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} \|^{2} = E[ \| \boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} \|^{2}] = E[ \| \boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} \|^{2} = E[ \| \boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} \|^{2} = E[ \| \boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} \|^{2}] = E[ \| \boldsymbol{\varepsilon}_{p,i} \|^{2} = E[$$

$$E[\mathbf{e}_{p,i}^{\mathsf{T}} | \mathbf{e}_{p,i}^{\mathsf{T}} | \mathbf{e}_{f,i}^{\mathsf{T}} | \mathbf{e}_{f,i}^{\mathsf{T}} | \mathbf{e}_{f,i}^{\mathsf{T}} | \mathbf{e}_{f,i}^{\mathsf{T}} | \mathbf{e}_{i}^{\mathsf{T}}]$$

$$E[\mathbf{e}_{i}^{\mathsf{T}} \mathbf{Q}_{i} \operatorname{diag} \{\cdots, (1 - \mu \lambda_{k}(i))/\delta_{i} + \lambda_{k}(i))^{2} - 1, \cdots \} \mathbf{Q}_{i}^{\mathsf{T}} \mathbf{e}_{i}]$$

$$(21)$$

比较式(20)与(21)可得,算法稳定的充要条件是式(21)的 右边为负定的,即对角矩阵的所有对角元素满足:

 $(1 - \mu \lambda_k(i) / \delta_i + \lambda_k(i))^2 < 1, 1 < k < K$  (22) 根据式(22)得,当步长  $\mu = 1$ 时正则因子  $\delta_i$  始终是一个正 值,因此提出的算法始终是稳定的.

# 3 仿真结果

为检验所提算法性能,对提出算法与传统自适应算法 在系统辨识的仿真实验中进行仿真,比较它们的收敛速度 与稳态误差.随机产生长度为 L = 16 或 L = 128,且有单位 泛数的有限长冲激响应  $w_o$ .由零均值高斯随机信号通过 一阶 AR(0.9)系统  $G_1(z) = 1/1 - 0.9z^{-1}$ 或二阶 ARMA(2,2) 系统<sup>[14,15]</sup>:  $G_2(z) = (1 + 0.5z^{-1} + 0.81z^{-2})/(1 - 0.59z^{-1} + 0.4z^{-2})$ 产生输入信号.图 1、图 2 与图 5 用由  $G_1(z)$ 产生的 输入信号,图 2 与图 4 用由  $G_2(z)$ 产生的输入信号.所有实 验取仿射投影阶数  $K = 8^{[15]}$ ,步长  $\mu = 1$ ,衰减因子  $\gamma = 3$ .测 量噪声设为零均值方差为  $\sigma_v^2 = 10^{-3}$ 的高斯噪声(SNR 约为 30 dB),其中 SNR 表示为:

SNR =  $10 \log_{10}(E[y^2(i)]/E[v^2(i)])$ ,

 $\boldsymbol{y}(i) = \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{w}_o$ 

比较提出算法与标准 APA, R-APA, VR-APA<sup>[6,15]</sup>和 VSS-APA<sup>[7]</sup>的跟踪性能.均方偏差(MSD)用于度量自适应 滤波器与目标系统的逼近程度,表示为 MSD = 10  $\log_{10}$ ( $\|\tilde{w}_i\|_{2}^{2}$ ).



提出的 VR-APA 与 R-APA、VR-APA<sup>[6]</sup>、VR-APA<sup>[15]</sup>的性 能比较如图 1 所示.本图以 AR(0.9)随机过程作为输入信 号.为使 R-APA 与提出算法有可比性,使用两个不同正则 因子的 R-APA,分别如曲线(*a*)和(*b*)所示.小正则因子的 R-APA 与提出算法具有相同的收敛速度,但稳态误差大. 大正则因子的 R-APA 与提出算法有相同的稳态误差,但 收敛速度慢.本文其他图中 R-APA 的参数设置与图 1 类 似.VR-APA 中设计参数 θ 的选择与冲激响应长度和投影 阶数有关<sup>[6]</sup>.提出算法的光滑因子  $\lambda$  与 VR-APA<sup>[6]</sup>、VR-APA<sup>[15]</sup>的光滑因子  $\alpha$  均是根据表达式 1 – 1/ $\eta$ L 计算.所有 仿真选取  $\eta$  = 1,即当 L = 16 或 L = 128 时光滑因子分别设 置为 0.94 或 0.998.由图 1 可得,新算法与 R-APA 相比有更 好的跟踪性能,与 VR-APA<sup>[6]</sup>、VR-APA<sup>[15]</sup>相比在相同的收 敛速度下稳态误差更低.除此之外,图 1 中冲激响应在第 2500 次迭代时由  $w_o$ 设置为 –  $w_o$ .由图可见,当系统冲激 响应发成突变时,提出算法、VR-APA<sup>[6]</sup>与 VR-APA<sup>[15]</sup>都未 损失收敛速度和稳态误差性能.这一特性在其他仿真结果 中不再展示.







自适应算法常常用于非平稳性和极强相关性的恶劣环境下,如语音回声消除、网络回声消除<sup>[10,11]</sup>等.图 2 实验用 ARMA(2,2)随机过程作为输入信号,并添加一条 R-APA 学习曲线用来比较 R-APA 与 VR-APA<sup>[6]</sup>、VR-APA<sup>[15]</sup>的跟踪性能,其余参数设置保持不变.与图 1 类似,曲线(*a*)与(*c*)中 R-APA 的参数设置分别为保持它们与新算法有相同的收敛速度与稳态误差.曲线(*b*)中 R-APA 的参数设置为保持它与 VR-APA<sup>[15]</sup>有相同的稳态误差.由图 2 得,VR-APA<sup>[15]</sup>比 R-APA、VR-APA<sup>[6]</sup>有更快的收敛速度和更低的稳态误差.比较图 1 与图 2 得,当输入信号为 ARMA(2,2)过



图4 滤波器长度L=128,输入为ARMA(2,2)时的MSD学习曲线 (K=8,设计参数<sup>[4]</sup>0=0.05)



图5 MSD学习曲线 (K=8,滤波器长度L=16,输入为AR(0.9))

程时,各算法性能均有不同程度下降.但图1的结论仍然成立,即新算法的收敛速度和稳态误差性能均优于 R-APA、VR-APA<sup>[6]</sup>、VR-APA<sup>[15]</sup>等传统自适应算法.

实践中常会遇到长滤波器情况,图 3 与图 4 实验用 128 作为滤波器长度,故光滑因子应设置为 0.998. 文献[6] 中设计参数设置为 0.05,其余参数分别与图 1 和图 2 相 同.R-APA 的参数仍是为使其与现有算法有可比性而设. 由图 4 得,尽管 VR-APA<sup>[6]</sup>比 VR-APA<sup>[15]</sup>有稍微更快的收敛 速度,但 VR-APA<sup>[15]</sup>有更低的稳态误差.综合图 1 与图 3、图 2 与图 4 可得,新算法无论在短滤波器还是长滤波器的条 件下,均能获得更快的收敛速度与更低的稳态误差.

提出算法与传统 APA、VR-APA<sup>[6]</sup>、VSS-APA<sup>[7]</sup>的性能 比较如图 5 所示.图中不同步长 APA 的参数设置与 R-APA 的参数设置方法类似,即保证它们与提出算法有相同的收 敛速度或相同的稳态误差.提出算法与 VR-APA<sup>[6]</sup>的参数 设置与图 1 相同.VSS-APA 的常数因子 *C* 的设置与投影阶 数和信噪比有关<sup>[7]</sup>.图中曲线(*d*)与(*e*)中 VSS-APA 的参数 设置分别为保持它们与提出算法有相同的收敛速度与稳 态误差.由图 5 得,VSS-APA 算法的跟踪性能明显优于 APA.比较曲线(*c*)与(*d*)得,VSS-APA 与 VR-APA 有相似的 跟踪性能.由曲线(*f*)得,提出的 VR-APA 不仅收敛速度快 且稳态误差低.

# 4 结论

本文提出一种新的变正则因子仿射投影算法.通过最 小化无噪后验错误矢量信号能量推导出一个新的变正则 因子表达式.无噪错误矢量信号能量是根据测量噪声的统 计方差与一个指数缩放因子评估方法来评估的.由于理论 上更优的代价函数以及更加光滑可控的评估方法,变正则 因子仿射投影算法的跟踪性能得以提高.仿真结果表明提 出算法的收敛速度与稳态性能均优于标准 APA, R-APA, VR-APA<sup>[6,15]</sup>和 VSS-APA<sup>[7]</sup>.提出算法可进一步用于其他自 适应滤波器应用环境中,如生物工程、移动网络<sup>[5]</sup>、干扰对 消<sup>[19]</sup>等.

#### 参考文献

- [1] S Haykin, Adaptive Filter Theory (4th Ed)[M].NJ, Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002.1 – 340.
- [2] 文吴翔,陈隆道,蔡忠法.改进仿射投影算法及其在电子回声 消除中的应用[J].电子学报,2012,40(6):1229-1234.
  Wen Hao-xiang, Chen Long-dao, Cai Zhong-fa. An improved affine projection algorithm and its application in network echo cancellation[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(6):1229-1234. (in Chinese)
- [3] 刘立刚, FUKUMOTO Masahiro, 张世永. 一种变步长 proportionate NLMS 自适应滤波算法及其在网络回声消除中的应用
  [J].电子学报, 2010, 38(4):973 978.
  Liu Li-gang, FUKUMOTO Masahiro, Zhang Shi-yong. A variable step-size proportionate NLMS adaptive filtering algorithm and its application in network echo cancellation[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(4):973 978. (in Chinese)
- [4] K Ozeki, et al. An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties[J]. Electronics and Communications in Japan, 1984,67(5):126-132.
- [5] A HSayed. Fundamentals of Adaptive Filtering [M]. New York: Wiley, 2003. 1012 – 1090.
- [6] H Rey, et al. Variable explicit regularization in affine projection algorithm: Robustness issues and optimal choice [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(5):2096 – 2109.
- [7] H-C Shin, et al. Variable step-size NLMS and affine projection algorithms [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2004, 11(2): 132 – 135.
- [8] C Lee, et al. Scheduled-step-size affine projection algorithm [J]. IEEE Transaction on Circuits and Systems I, Regular Papers, 2012, 59(9):2034 – 2043.
- [9] C Lee, et al. Optimal step-size affine projection algorithm[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2012, 19(7):431 – 434.
- [10] M Z-A Bhotto, et al. A family of shrinkage adaptive-filtering algorithms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61

(7):1689-1697.

- [11] S C Chan, et al. A new variable regularized QR decomposition based recursive leastM-estimate algorithm performance analysis and acoustic applications [J]. IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 2013, 21(5):907 – 922.
- [12] C Paleologu, et al. Regularization of the affine projection algorithm[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II, Express Briefs, 2011, 58(6):366 – 370.
- [13] J Benesty, et al. On regularization in adaptive filtering[J]. IEEE Transaction onAudio, Speech, Language Processing, 2011, 19(6): 1734 – 1742.
- [14] Y-S Choi, et al. Adaptive regularization matrix for affine projection algorithm[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II, Express Briefs, 2007, 54(12):1087 – 1091.
- [15] W Yin, et al. A variable regularization method for affine projection algorithm[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II, Express Briefs, 2010, 57(6):476 – 480.
- [16] Shi Li-ming, et al. Combination of affine projection sign algorithms for robust adaptive filtering in non-Gaussian impulsive interference[J]. Electronics Letters, 2014, 50(6):466 – 467.
- [17] Y F Zhi, et al. A new affine projection algorithm and its statistical behavior[J]. Chinese Journal of Electronics, 2013, 22(3): 537 – 542.
- [18] S G Sankaran, et al. Convergence behavior of affine projection algorithms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48 (4):1086-1096.

[19] 张兰勇,刘胜,李冰.一种改进的自适应干扰对消技术研究 及在电磁辐射测量中的应用[J].电子学报,2011,20(6):1394 - 1398.

Zhang Lan-yong, Liu Sheng, Li Bing. The study of an improved adaptive interferencecancellation technology and its application in the electromagnetic radiation measurement [J]. Acta Electronica Sinica,2011,20(6):1394 – 1398. (in Chinese)

#### 作者简介



**师黎明** 男,1989 年 8 月出生,河南漯河人. 2012 年毕业于河南工业大学电子信息工程系,2012 进入重庆邮电大学通信与信息工程系,现为硕士在 读生,从事自适应滤波方面的有关研究. E-mail:limingshi12@foxmail.com



林 云 男,1968年12月出生,四川南充人. 重庆邮电大学通信与信息工程系副教授、硕士生导师,主要研究方向为 MIMO 技术及稀疏信号处理. E-mail:lycqupt@sina.com