7.3 电场强度通量 高斯定理

一、电场线 电场中假想的曲线

1、切线方向——场强的方向

2、疏密——表征场强的大小

电场线密度——

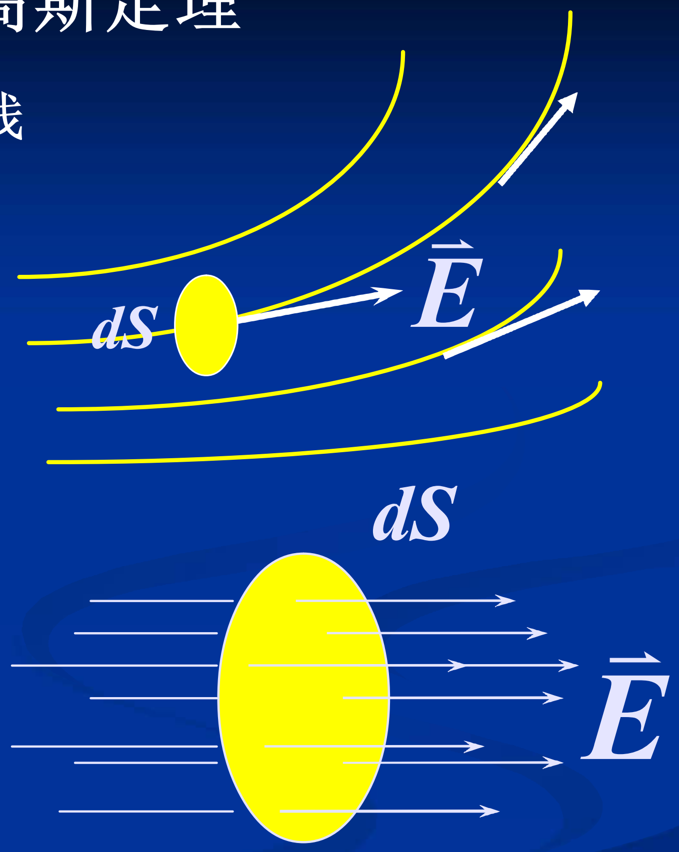
电场中任一点取面积元dS

⊥该点的场强

通过dS面的电场线条数dN

电场线密度

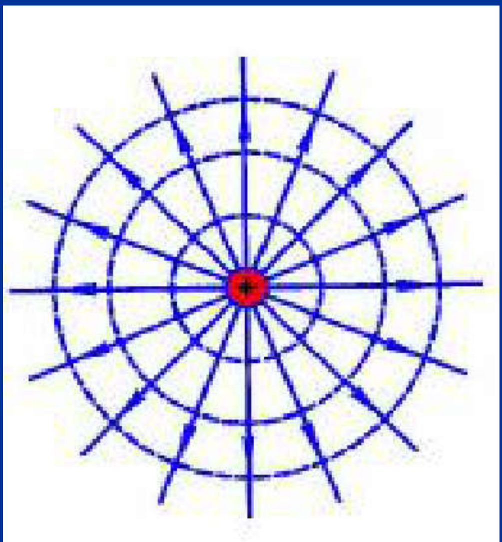
$$E = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S}$$

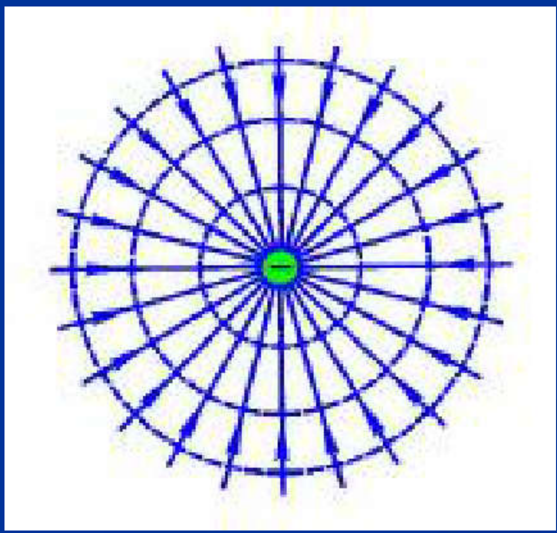


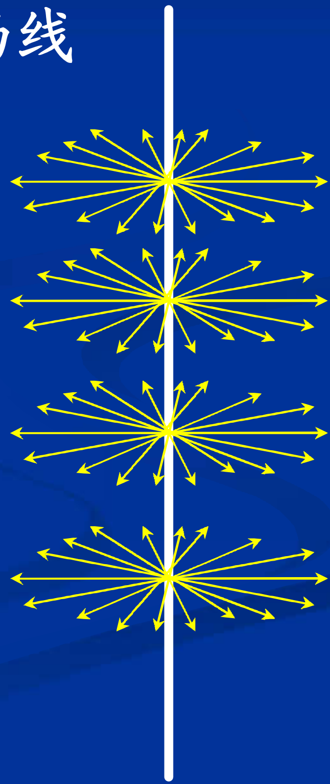
3、电场线性质：

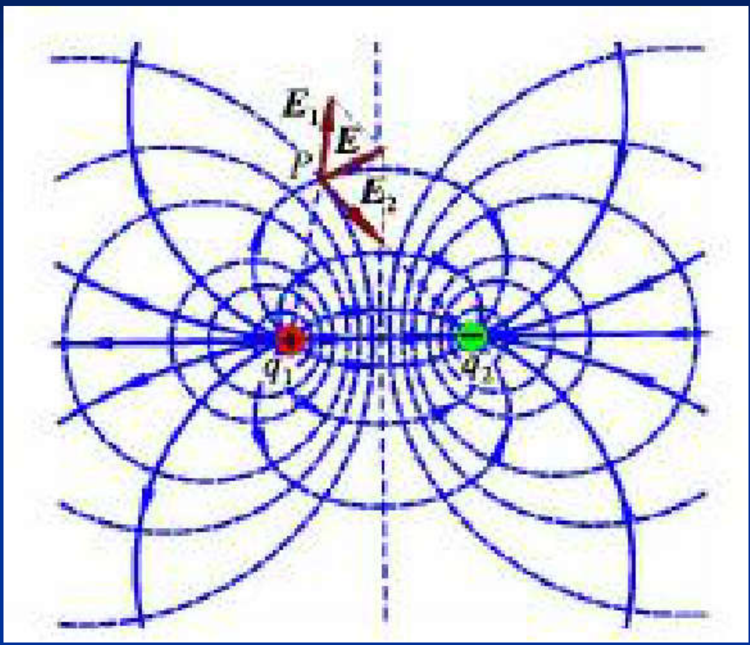
1) 起于正电荷止于负电荷，不形成闭合线，也不中断。

2)在没有电荷的空间里，任何两条电场线不会相交。

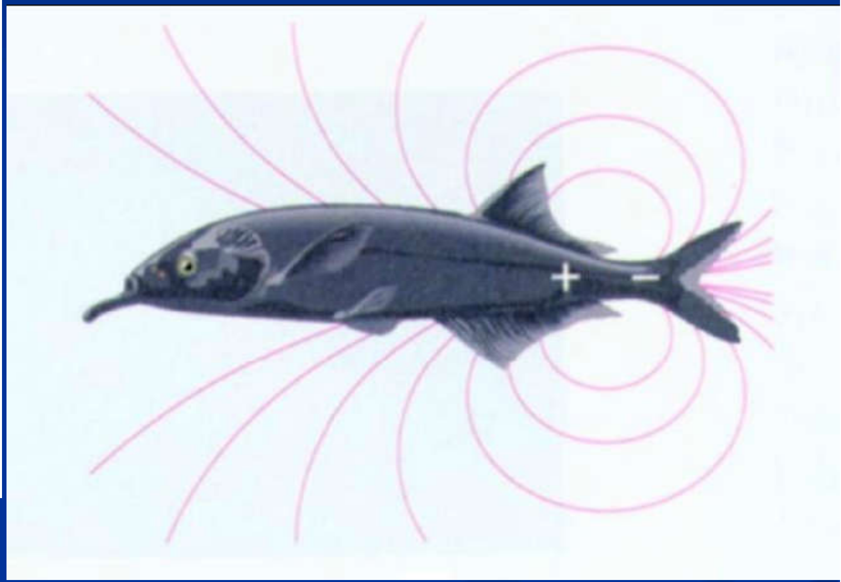








The elephant gnathonemus produces a dipole electric field and detects nearby objects by their effects on that field



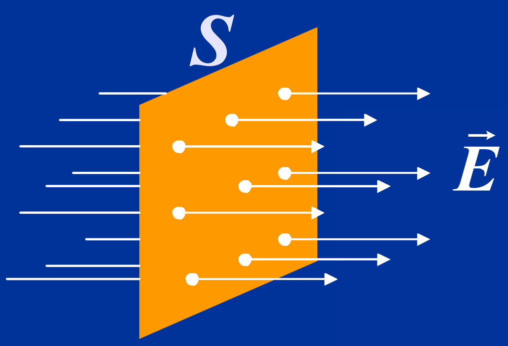
二、电场强度通量（电通量）

通过电场中某一面的电场线数称为通过该面的电通量。用Φ_e表示。

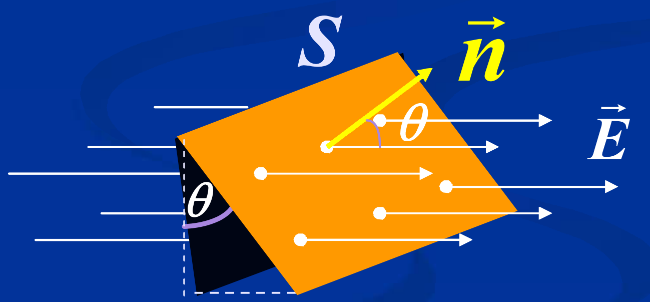
$$E=\frac{d\Phi_e}{dS_\perp}\Rightarrow d\Phi_e=E\cdot dS_\perp$$

① 均匀电场
S与电场强度方向垂直

② 均匀电场，S 法线方向与电场强度方向成θ角



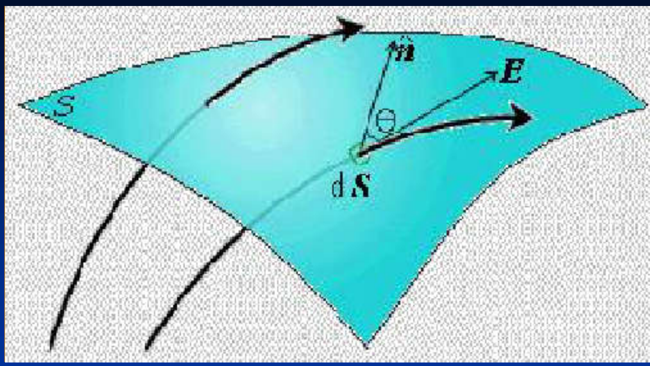
$$\Phi_e=ES$$



$$\Phi_e=ES\cos\theta=\vec{E}\cdot\vec{S}$$

③电场不均匀，*S*为任意曲面

$$d\Phi_e = EdS_\perp = EdS\cos\theta$$
$$= \vec{E}\cdot d\vec{S}$$
$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S E\cos\theta dS$$
$$= \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

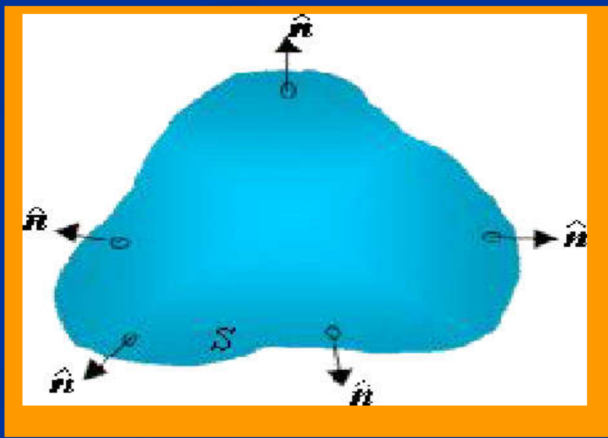


$$E = \frac{d\Phi_e}{dS_\perp}$$

④ *S*为任意闭合曲面

$$\Phi_e = \oint_S E\cos\theta dS = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

<u>规定</u>：法线的正方向为指向闭合曲面的外侧。

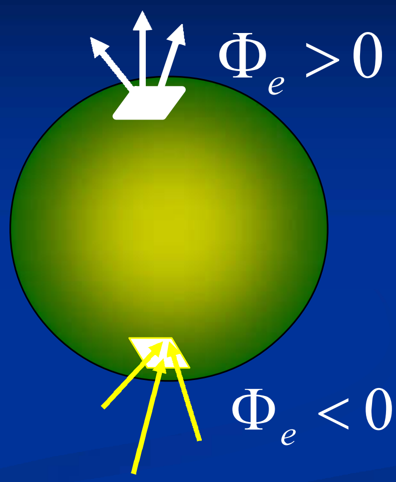


对闭合面法线方向规定：

自内向外为法线的正方向。

电场线从曲面内向外穿出：$\Phi_e > 0$

从曲面外向内穿进： $\Phi_e < 0$



Φ_e的单位： $\mathbf{N \cdot m^2 / C}$

注：

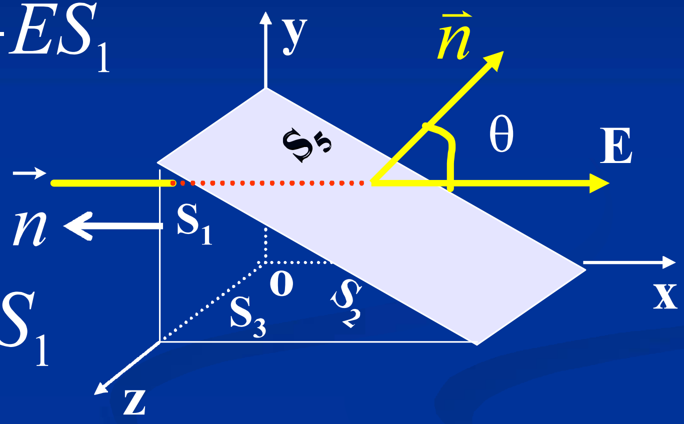
1° $\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

表示净穿出闭合面的电场线条数。

2° 引入电场线，只是为了形象理解电场，
实际上电场连续分布于空间。

例. 有一三棱柱放在电场强度为E=200 N·C^{-1}的均匀电场中。求通过此三棱柱的电场强度通量。

解：$\Phi_1 = ES_1 \cos\pi = -ES_1$

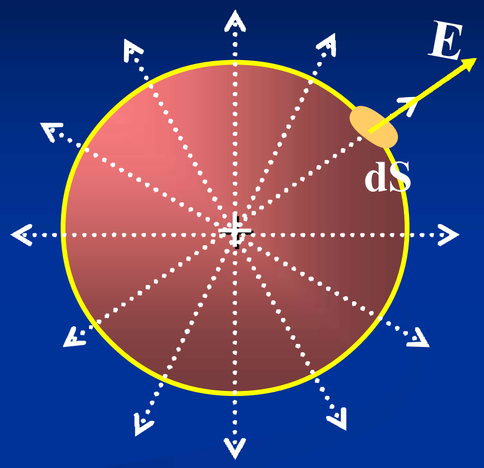


$$\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 0$$

$$\Phi_5 = ES_5 \cos\theta = ES_1$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 = 0$$

三、高斯定理



1.高斯定理引入

(1)点电荷在球形高斯面的圆心处

球面处场强：$E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o R^2}$

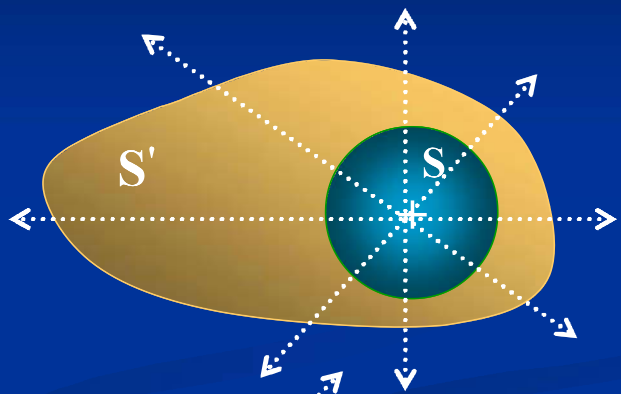
穿过**dS**面元的电通量：

$$d\Phi_e=\vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cos 0^\circ dS=\frac{q\cdot dS}{4\pi\varepsilon_o R^2}$$

$$\Phi_e=\oint_S\frac{qdS}{4\pi\varepsilon_o R^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\cdot 4\pi R^2=\frac{q}{\varepsilon_o}$$

$$\Phi_e = \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

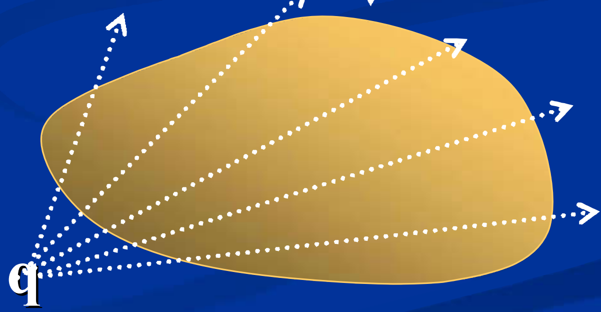
(2) 点电荷在任意形状的高斯面内



通过球面S的电场线也必
通过任意曲面S'

$$\Phi_e = \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

(3) 电荷q在闭合曲面以外



穿进曲面的电场线条数

=穿出曲面的电场线条数。

$$\Phi_e = \oint_{S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

2、 高斯定理：

通过任意闭合曲面S的电通量 ＝ S面包围的电荷的代数和

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_{S内} q_i$$

若S内的电荷是连续分布：

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV$$

面积元dS处的电场

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_{S内} q_i$$

说明

1° 定理中 $\overline{E}$ 是所取的封闭面S（高斯面）上的场强，它是由全部电荷（S内、外）共同产生的合场强。

2° Φ_e只决定于S面包围的电荷，S面外的电荷对Φ_e无贡献。

3° 高斯定律的物理意义：

给出了静电场的重要性质 ——静电场是有源场

正负电荷就是场源 $\begin{cases} \sum q_i > 0 \quad \Phi_e > 0 & \text{电场线穿出} \\ \sum q_i < 0 \quad \Phi_e < 0 & \text{电场线穿入} \end{cases}$

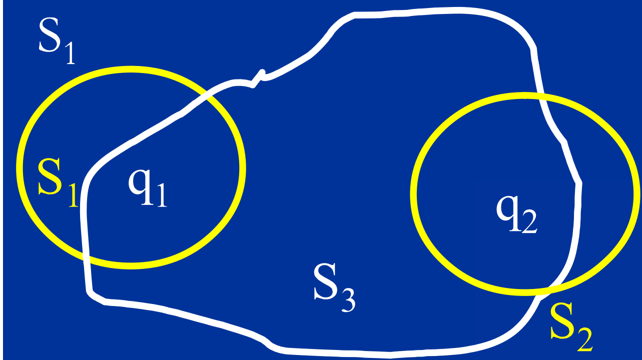
讨论：

1、若高斯面上场强处处为零，则该面内必无电荷；

2、若高斯面上场强处处不为零，则该面内必有电荷；

3、若高斯面内无电荷，则高斯面上场强处处为零；

4、若高斯面内有电荷，则高斯面上场强处处不为零；



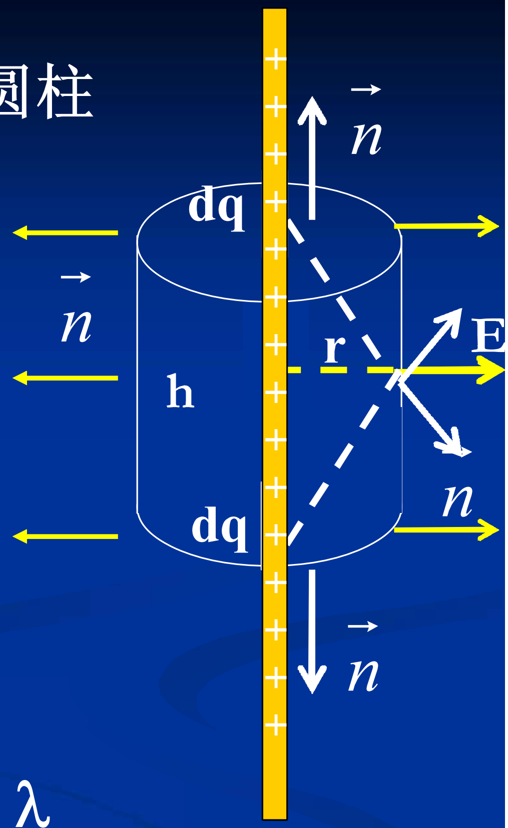
$$\oint\!\!\oint_{S_1} \mathrm{E}\cdot\mathrm{dS} = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\oint\!\!\oint_{S_2} \mathrm{E}\cdot\mathrm{dS} = \frac{q_2}{\varepsilon_0}$$

$$\oint\!\!\oint_{S_3} \mathrm{E}\cdot\mathrm{dS} = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}$$

例7.9.用高斯定理求均匀带电的无限长圆柱棒的电场分布，已知线电荷密度λ 。

解：取以棒为轴，r为半径，高为h的高斯柱面。



$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad \vec{n} \perp \vec{E} \quad 0$$

$$= \int_{侧面} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \cancel{\int_{上底} \vec{E} \cdot d\vec{S}} + \cancel{\int_{下底} \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

$$= \int_{侧面} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \int_{侧面} dS = E \cdot 2\pi r \cdot h$$

$$\Phi_e = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_V \rho \cdot dV = \frac{1}{\varepsilon_o} \lambda h \qquad \therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$$

问：r→ 0，$E \not\to \infty$?

例、均匀带电圆柱面的电场。沿轴线方向单位长度带电量为λ。

解：场具有轴对称　　高斯面：圆柱面

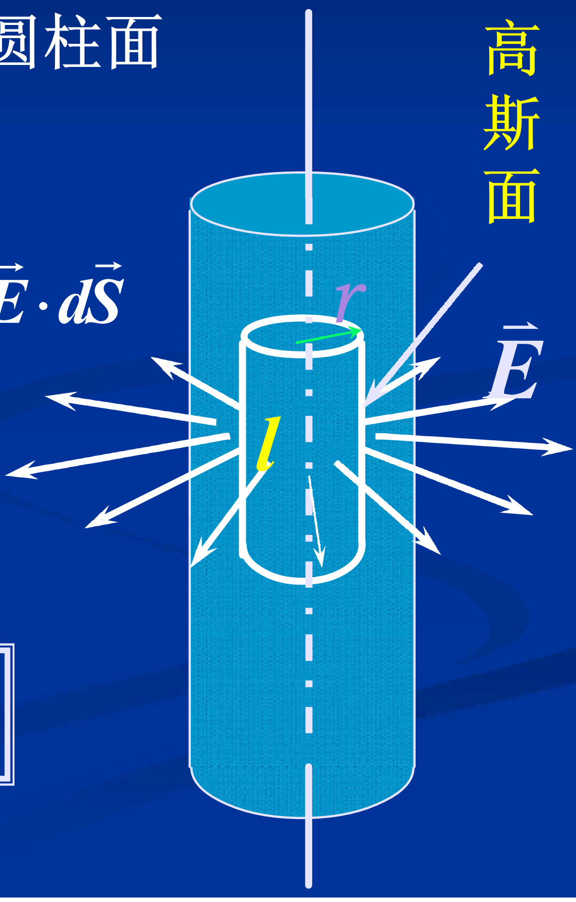
(1) $r < R$

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{上底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{下底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= 0 + 0 + E2\pi rl = E2\pi rl$$

$$\sum q_i = 0$$

$$\boxed{E = 0 (r < R)}$$



(2) $r > R$

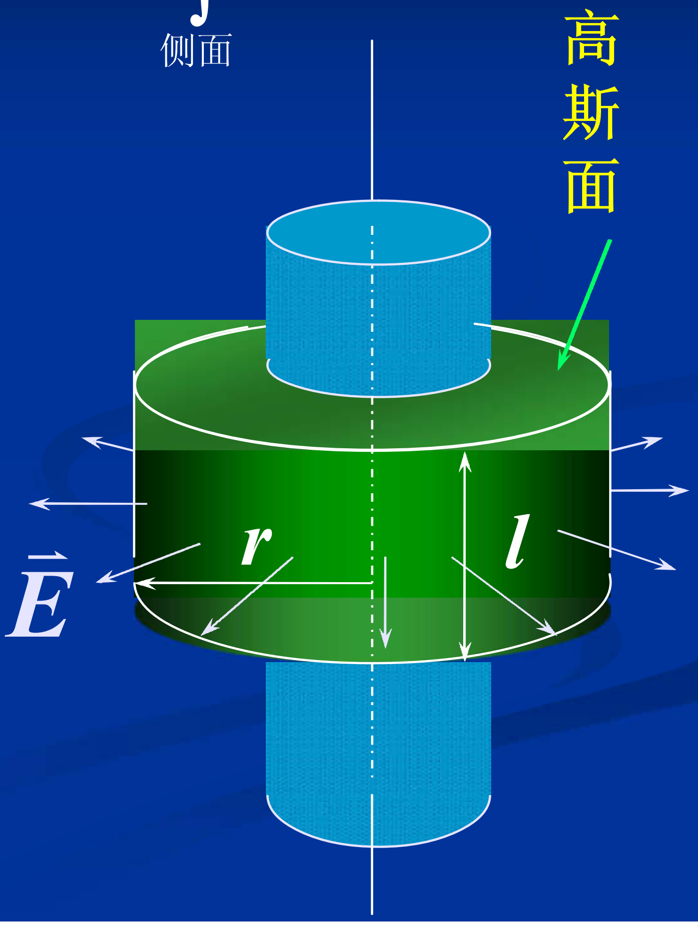
$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{上底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{下底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= E 2\pi r l$$

$$\sum q_i = 2\pi R l \sigma$$

$$E = \frac{R\sigma}{r\varepsilon_0} \qquad 令 \lambda = 2\pi R\sigma$$

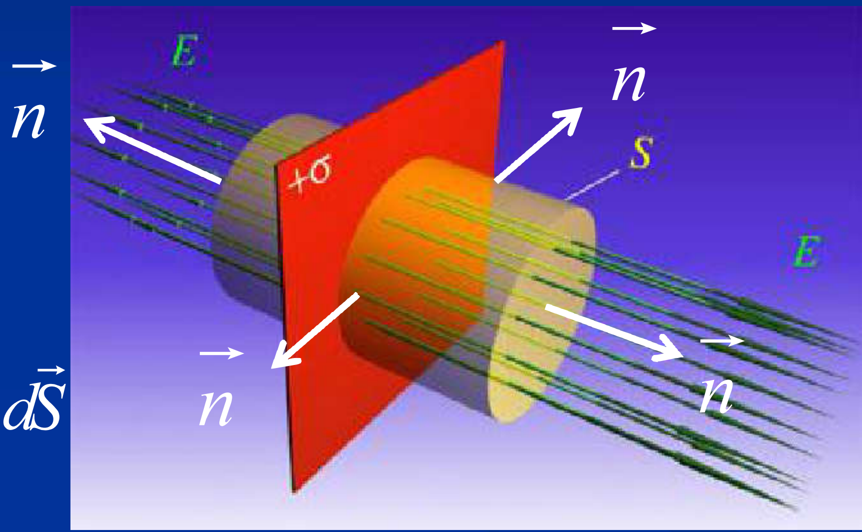
$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (r > R)}$$



例7.10:电荷面密度为σ 的无限大均匀带电平面场强分布。

解： 选取高斯面——与平面正交对称的柱面

$$\begin{cases} \text{底面} \quad \vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{S} \\ \text{侧面} \quad \vec{E} \perp d\vec{S} \end{cases}$$



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

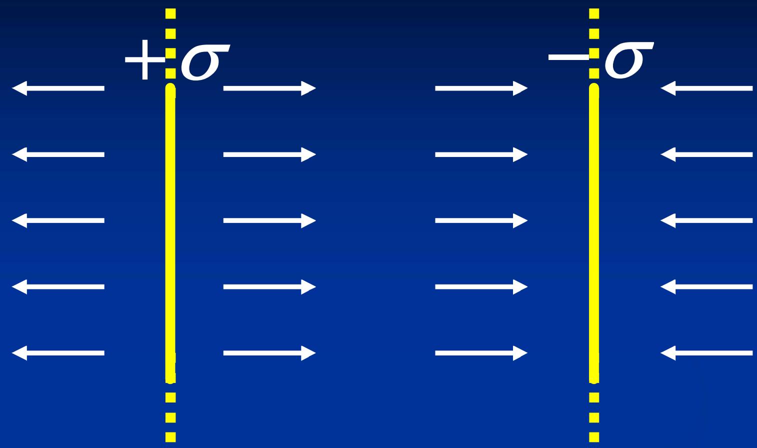
$$= \int_{\text{侧面}} \cancel{\vec{E} \cdot d\vec{S}} + \int_{\text{左底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{右底}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= 2ES$$

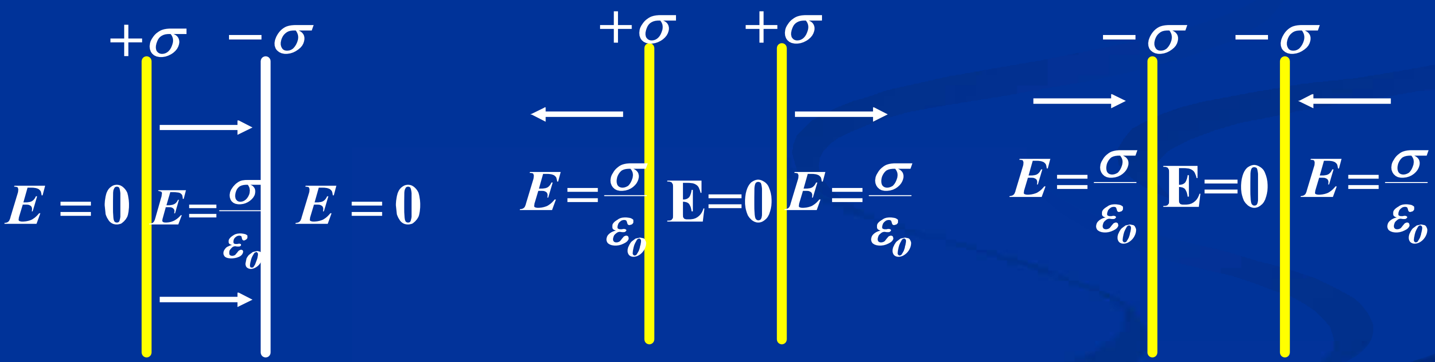
$$= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o} \longrightarrow$ 均匀场 $\vec{E}$



讨论：



例7.11 求均匀带电球面的电场分布。
设半径为R，电量为+q。

解：电场方向——沿半径向外；
电场大小——球对称
取以r为半径的同心高斯球面S

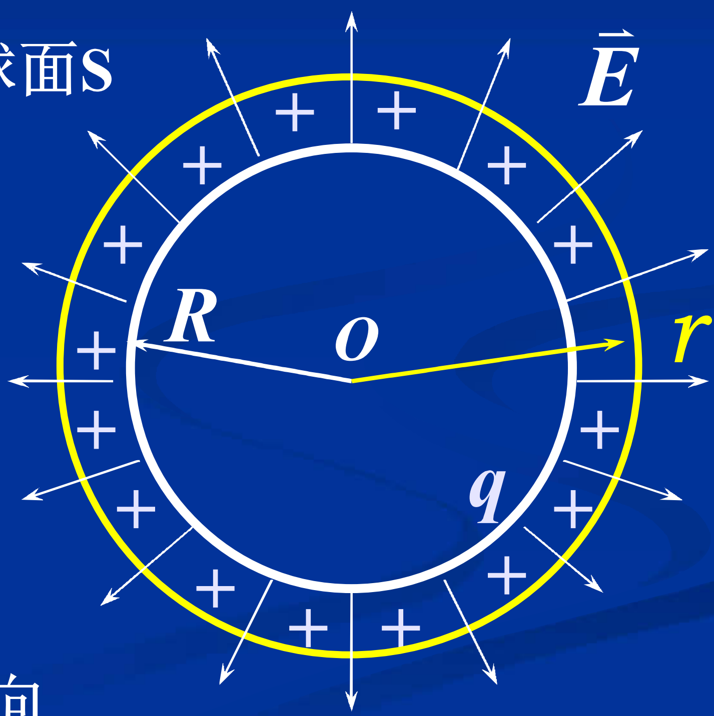
$\mathbf{r \ge R}$

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E dS$$

$$= \mathbf{E \cdot 4\pi r^2}$$

$$\Phi_e = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_{S内} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ 沿 半径方向



$r > R \qquad E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$

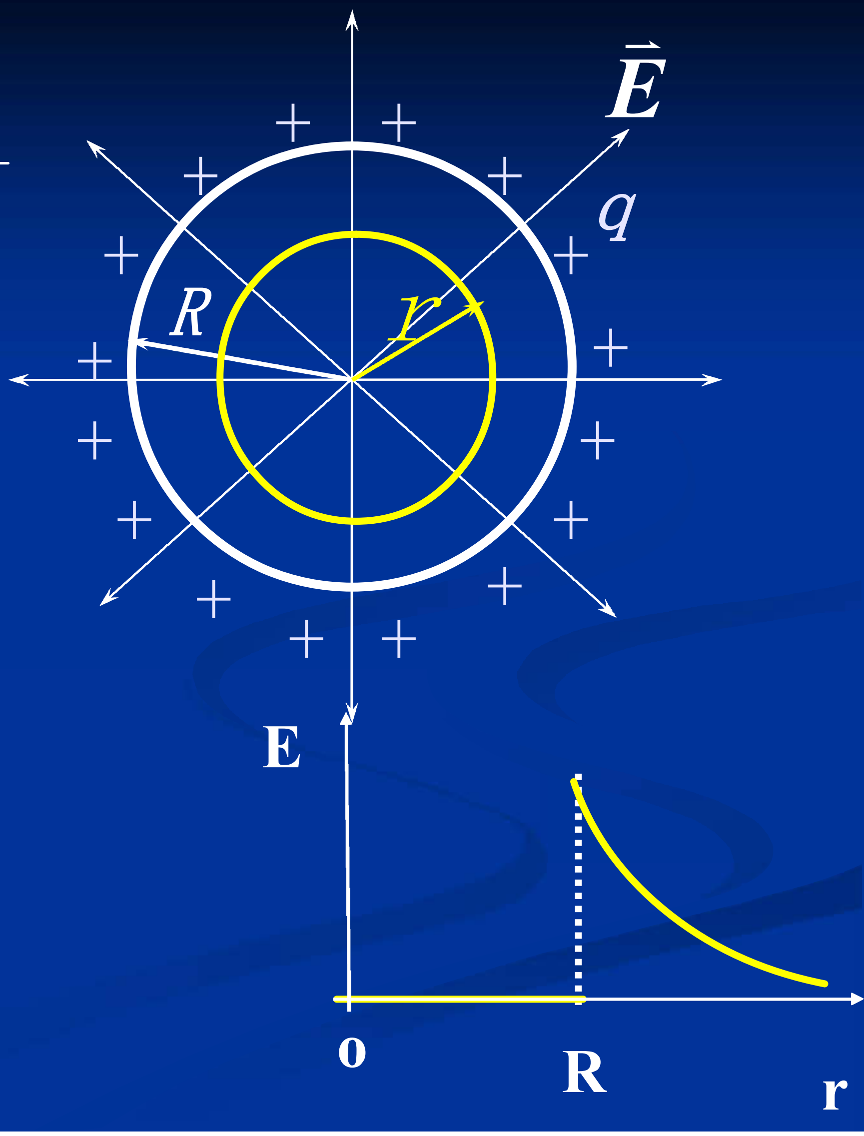
若 $r < R$

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= \int E dS = E \cdot 4\pi r^2$$

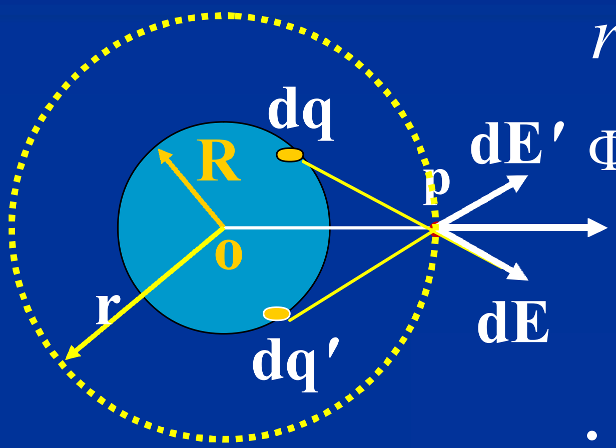
$$\Phi_e = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum_{S内} q_i = \mathbf{0}$$

$$\therefore \mathbf{E = 0}$$



例7.12. 求均匀带电球体的电场分布。设半径为R，电量为+q。

解：取以r为半径的同心高斯球面S



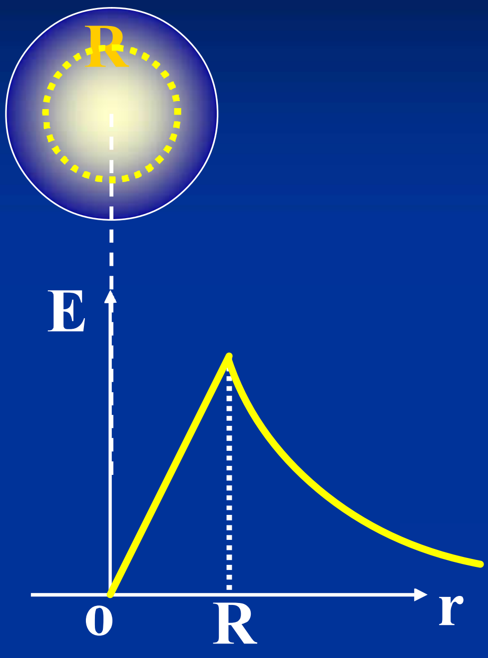
$$r > R$$

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E dS = E \cdot 4\pi r^2$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_o} \int_V dq = \frac{1}{\varepsilon_o} q$$

$$\therefore \mathbf{E} = \frac{\mathbf{q}}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \vec{e}_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2} \vec{e}_r$$



$$r < R$$

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2$$

$$\Phi_e = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_V dq$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$$

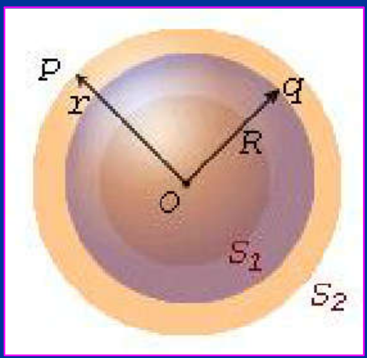
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R^3} \vec{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}$$

利用高斯定律求解静电场的方法

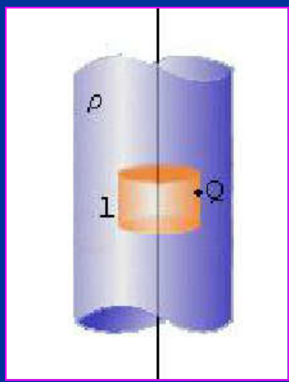
高斯定理适用于所有静电场。

当场强分布具有一定的对称性时，可应用高斯定理求解电场。

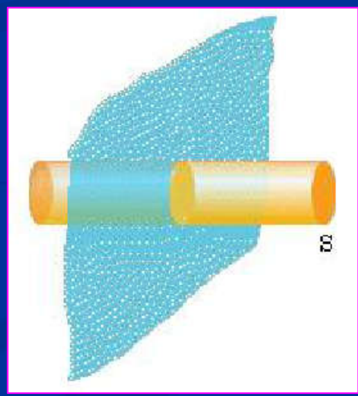
1. 对称性分析，即由电荷分布的对称性，分析场强分布的对称性，判断能否用高斯定理来求电场强度的分布（常见的对称性有球对称性、轴对称性、面对称性等）；



球对称分布



轴对称分布



无限大平面电荷

2.根据场强分布的特点，选取高斯面，要求：

①待求场强的场点应在此高斯面上，

②穿过该高斯面的电通量容易计算。

一般地，高斯面各面元的法线矢量$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{E}$平行或垂直，$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{E}$平行时，$\boldsymbol{E}$的大小要求处处相等，使得$\boldsymbol{E}$能提到积分号外面；

3.计算电通量和高斯面内所包围的电荷的代数和，最后由高斯定理求出场强。