

doi: 10.7690/bgzdh.2015.01.016

## 改进的自适应卡尔曼滤波在 SINS 初始对准中的应用

何昆鹏, 王晓雪, 王 刚, 韩继韬, 王晨阳  
(哈尔滨工程大学自动化学院, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 为提高 Sage-Husa 自适应滤波的稳定性, 提出一种基于 UD 分解的改进自适应滤波算法。对在线估计的量测噪声协方差阵和状态估计误差方差阵采取 UD 分解的形式进行标示和更新, 结合捷联惯导静基座初始对准模型, 对改进自适应算法进行仿真测试。仿真结果表明: 在先验量测噪声和状态估计协方差矩阵存在误差的情况下, 新算法能够提高对准精度。

**关键词:** 捷联惯导; 初始对准; Sage-Husa 自适应滤波; UD 分解  
**中图分类号:** TJ765 **文献标志码:** A

## Application of Improved Adaptive Kalman Filter Algorithm in SINS Initial Alignment

He Kunpeng, Wang Xiaoxue, Wang Gang, Han Jitao, Wang Chenyang  
(College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** In order to improve the stability of Sage-Husa adaptive filtering, an improved adaptive filtering algorithm that based on UD decomposition was proposed. The measurement noise covariance matrix that online estimated and state estimation error covariance matrix is updating by taking the form of UD decomposition and apply to the strapdown inertial navigation system of stationary base initial alignment model. The results show that when priori covariance matrix and state estimation error covariance matrix have an error, the new filter algorithm can improve the accuracy of the initial alignment.

**Keywords:** SINS; initial alignment; Sage-Husa adaptive filter; UD factorized

### 0 引言

初始对准是捷联惯性导航的一项关键技术, 其精度直接影响到惯性导航的精度<sup>[1]</sup>。目前实现惯导系统自对准的一种有效的方法是卡尔曼滤波技术。但是众所周知, 在采用卡尔曼滤波技术时一般要求对过程噪声和量测噪声具有一定的先验知识, 或者假设其满足一定的分布条件, 如果噪声的统计特性不准确, 应用卡尔曼滤波时效果可能会不理想, 因而限制了此类估计算法的应用<sup>[2]</sup>。为此, 许多文献提出了自适应滤波算法, 其中具有代表性的方法是带时变噪声估计器的 Sage-Husa 自适应滤波算法。其基本思想是在递推滤波的同时, 实时对系统噪声和量测噪声的统计特性进行估计, 从而抑制滤波发散, 提高滤波的精度。文献[3-4]分别将基于 Sage-Husa 噪声统计估值器的自适应卡尔曼滤波算法应用于静基座自对准和动基座传递对准, 然而该方法由于不能保证量测噪声协方差阵的正定性和系统噪声协方差阵的半正定性, 容易产生滤波发散。笔者在传统 Sage-Husa 自适应滤波算法的基础上, 提出了一种改进的自适应算法, 即将 UD 分解与简化的 Sage-Husa 自适应滤波算法相结合, 并验证了

新算法的有效性和优越性。

### 1 SINS 初始对准模型

笔者建立在东北天坐标系下的初始对准误差模型<sup>[5-6]</sup>。

捷联系统初始对准状态方程为

$$\dot{X} = AX + W = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ O_{3 \times 5} & O_{5 \times 5} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} W_1 \\ O_{5 \times 1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中系统状态为

$$X = [\delta V_E, \delta V_N, \phi_E, \phi_E, \phi_E, \nabla_x, \nabla_y, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z]^T \quad (2)$$

式中: 下脚标  $x, y, z$  对应东北天坐标系 (ENU) 3 个方向;  $\delta V_E, \delta V_N$  分别为东向和北向速度误差;  $\phi_E, \phi_N$  为水平失准角;  $\phi_U$  为方位失准角;  $\nabla$  为加速度计零偏;  $\varepsilon$  为陀螺漂移。

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2w_{ie} \sin L & 0 & -g & 0 \\ -2w_{ie} \sin L & 0 & g & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{R} & 0 & w_{ie} \sin L & -w_{ie} \cos L \\ \frac{1}{R} & 0 & -w_{ie} \sin L & 0 & 0 \\ \frac{\tan L}{R} & 0 & w_{ie} \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

收稿日期: 2014-07-28; 修回日期: 2014-09-02

基金项目: 自然科学基金(51309059)

作者简介: 何昆鹏(1979—), 男, 博士, 副教授, 从事导航、制导与控制研究。

$$A_2 = \left[ \begin{array}{cc|ccc} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{array} \right] \quad (4)$$

其中  $C_n^b$  表示捷联矩阵。

系统噪声为

$$W_1 = [W_{\delta V_E} \quad W_{\delta V_N} \quad W_{\phi_E} \quad W_{\phi_N} \quad W_{\phi_U}]^T \quad (5)$$

以捷联系统速度误差作为观测量，观测方程为

$$Z = HX + V \quad (6)$$

$Z = [\delta V_E \quad \delta V_N]^T$ ,  $H = [I_{2 \times 2} \quad O_{2 \times 8}]$ ,  $V$  为量测噪声，并假设为白噪声。

根据得到的初始对准连续系统的状态方程和量测方程，可得离散化后的状态方程和量测方程

$$\begin{cases} X_k = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + W_k \\ Z_k = H_k X_k + V_k \end{cases} \quad (7)$$

式中： $\Phi_{k,k-1}$  为  $t_{k-1}$  时刻至  $t_k$  时刻的一步转移矩阵；

$H_k$  为量测阵； $W_k$  为系统噪声序列； $V_k$  为量测噪声序列； $E[W_k W_j^T] = Q_k \delta_{kj}$ ,  $E[V_k V_j^T] = R_k \delta_{kj}$ ,  $\delta_{kj}$  是 Kronecker  $\delta$  函数。

## 2 传统的 Sage-Husa 自适应滤波算法

在实际应用中，由于外界环境的变化和传感器本身性能的局限，无法准确地知道系统噪声和量测噪声的统计特性，继续使用常规的卡尔曼滤波进行精对准，将无法获得准确的对准结果。而 Sage-Husa 自适应卡尔曼滤波主要针对当系统噪声方协差阵  $Q_k$  和观测噪声协方差阵  $R_k$  未知或近似已知时，利用观测数据带来的信息，由滤波器本身不断地估计和修正噪声统计特性或滤波器增益阵，以减小状态估计误差，提高滤波器的精度<sup>[7]</sup>。

状态预测

$$X_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + \hat{q}_{k-1} \quad (8)$$

预测误差

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \hat{Q}_{k-1} \quad (9)$$

滤波增益

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + \hat{R}_k)^{-1} \quad (10)$$

新息计算

$$e_k = Z_k - H_k X_{k|k-1} - \hat{r}_k \quad (11)$$

状态估计

$$X_k = X_{k|k-1} + K_k e_k \quad (12)$$

估计误差

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (13)$$

其中： $\hat{q}_k$ 、 $\hat{Q}_k$  分别为系统噪声序列的均值和协方差阵； $\hat{r}_k$ 、 $\hat{R}_k$  分别为量测噪声序列的均值和协方差阵。

$\hat{q}_k$ 、 $\hat{Q}_k$ 、 $\hat{r}_k$ 、 $\hat{R}_k$  的递推估计公式：

$$\hat{q}_k = (1 - d_{k-1}) \hat{q}_{k-1} + d_{k-1} (X_k - \Phi_{k,k-1} X_{k-1}) \quad (14)$$

$$\hat{Q}_k = (1 - d_{k-1}) \hat{Q}_{k-1} + d_{k-1} (K_k e_k e_k^T K_k^T + P_k - \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T) \quad (15)$$

$$\hat{r}_k = (1 - d_{k-1}) \hat{r}_{k-1} + d_{k-1} (e_k - H_k X_{k|k-1}) \quad (16)$$

$$\hat{R}_k = (1 - d_{k-1}) \hat{R}_{k-1} + d_{k-1} (e_k e_k^T - H_k P_{k|k-1} H_k^T) \quad (17)$$

式中： $e_k$  为滤波器的量测残差(新息)； $d_k = \frac{1-b}{1-b^{k+1}}$ ,

$0 < b < 1$ ,  $b$  为遗忘因子，一般取值范围为  $0.95 \sim 0.99$ 。采用遗忘因子可以限制滤波器的记忆长度，增强新近观测数据对现时估计的作用，使得新近数据在估计中发挥作用，而使陈旧数据逐渐遗忘。

## 3 改进的 Sage-Husa 自适应滤波算法

式 (8)~式 (17) 构成了 Sage-Husa 自适应滤波算法。不过该算法在实际应用中仍存在问题<sup>[8]</sup>：一是系统噪声和量测噪声难以同时精确给出；二是对于阶次较高的系统，由于计算机字长限制所导致的数值不稳定问题。

针对 Sage-Husa 自适应滤波算法系统噪声和量测噪声难以同时精确给出的问题，只对量测噪声的统计特性进行自适应调整，即去掉式 (14)~(16)，并将式 (8)、(9)、(11) 修改为

$$X_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} \quad (18)$$

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q \quad (19)$$

$$e_k = Z_k - H_k X_{k|k-1} \quad (20)$$

这样简化的主要原因是系统噪声主要来源加速度计零偏  $\nabla$  和陀螺漂移  $\varepsilon$ ，即惯性测量元件误差。但是由于惯性器件误差一般初始对准之前都经过实验建模和补偿，因此在实际对准过程中，对系统的状态模型的影响可以忽略；考虑到对准时，工作环境的不同，量测噪声也有所不同，工作环境的恶劣程度将直接影响量测噪声的性能，不确定很大，因此需要对其进行实时估计，而  $r$  的值一般很小，可以设为零。

对于阶次较高的系统，Sage-Husa 自适应滤波

算法中  $\mathbf{R}_k$  的在线估计有时会由于计算发散失去半正定性和正定性，从而导致滤波发散现象，此时 Sage-Husa 自适应滤波算法的稳定性和收敛性不能完全保证。针对此问题，研究改进算法，提出了一种基于 UD 分解的 Sage-Husa 自适应滤波算法。UD 分解是一种可以有效提高滤波数值稳定性的分解滤波方法，相比平方根分解卡尔曼滤波，UD 分解卡尔曼滤波的计算量小一些，可以满足滤波的计算精度和实时性<sup>[9]</sup>。

设  $k$  时刻估计的量测噪声阵  $\hat{\mathbf{R}}_k$ ，其 UD 分解形式为  $\hat{\mathbf{R}}_k = \mathbf{U}_k^R \mathbf{D}_k^R (\mathbf{U}_k^R)^\top$ ，其中  $\mathbf{D}_k^R$  为对角阵， $\mathbf{U}_k^R$  为对角线元素全为 1 的上三角矩阵。显然， $\hat{\mathbf{R}}_k$  和  $\mathbf{D}_k^R$  的正定性相同。UD 分解的 Sage-Husa 自适应卡尔曼滤波算法不直接对  $\hat{\mathbf{R}}_k$  进行更新，而对  $\mathbf{U}_k^R$ 、 $\mathbf{D}_k^R$  进行更新，由此保证了  $\hat{\mathbf{R}}_k$  的正定性，抑制了由于计算误差而引起滤波发散的可能性。在下列推导过程中，设状态估计维数为  $n$ ，量测量维数为  $m$ 。

对式 (17)  $\hat{\mathbf{R}}_k$ 、 $\hat{\mathbf{R}}_{k-1}$  用其 UD 分解形式替代，有

$$\mathbf{U}_k^R \mathbf{D}_k^R (\mathbf{U}_k^R)^\top = (1-d_k) \mathbf{U}_{k-1}^R \mathbf{D}_{k-1}^R (\mathbf{U}_{k-1}^R)^\top + d_k (e_k e_k^\top - \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top) \quad (21)$$

由上式可知，在对  $\mathbf{U}_k^R$ 、 $\mathbf{D}_k^R$  进行更新的过程中，还涉及到  $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 。由于在卡尔曼滤波中，要求  $\mathbf{P}_k$ 、 $\mathbf{P}_{k|k-1}$  保持正定性。考虑到在 SINS 初始对准中，状态量中各元素的物理单位数量级相差比较大，比如速度误差  $\delta V_E$  的数量级一般为  $10^{-1}$ ，而加速度零偏数量级为  $10^{-3}$ ，陀螺漂移的数量级为  $10^{-8}$ ，从而导致状态估计误差协方差矩阵的条件数较差，使得  $\mathbf{P}_k$ 、 $\mathbf{P}_{k|k-1}$  极易出现负定的情况。因此，笔者将采取对  $\hat{\mathbf{R}}_k$  和  $\mathbf{P}_{k|k-1}$  同时进行 UD 分解，消除滤波发散的可能性，使得该滤波算法具有较强的自适应能力。

同理，设  $\mathbf{P}_k$ 、 $\mathbf{P}_{k|k-1}$  的 UD 分解形式为  $\mathbf{P}_k = \mathbf{U}_k^P \mathbf{D}_k^P (\mathbf{U}_k^P)^\top$ ， $\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{U}_{k|k-1}^P \mathbf{D}_{k|k-1}^P (\mathbf{U}_{k|k-1}^P)^\top$ 。此时，式 (21) 变换为

$$\mathbf{U}_k^R \mathbf{D}_k^R (\mathbf{U}_k^R)^\top = (1-d_k) \mathbf{U}_{k-1}^R \mathbf{D}_{k-1}^R (\mathbf{U}_{k-1}^R)^\top + d_k \left[ e_k e_k^\top - \mathbf{H}_k \mathbf{U}_{k|k-1}^P \mathbf{D}_{k|k-1}^P (\mathbf{U}_{k|k-1}^P)^\top \mathbf{H}_k^\top \right] \quad (22)$$

定义矩阵  $\mathbf{S} = [\mathbf{U}_{k-1}^R \quad e_k \quad \mathbf{H}_k \mathbf{U}_{k|k-1}^P]$ ， $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (1-d_k) \mathbf{D}_{k-1}^R & & \\ & d_k & \\ & & -d_k \mathbf{D}_{k|k-1}^P \end{bmatrix}$ ，则式 (21) 可以表示为

$$\mathbf{U}_k^R \mathbf{D}_k^R (\mathbf{U}_k^R)^\top = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^\top \quad (23)$$

根据 Gram-Schmidt 正交化对  $\mathbf{S}$  按行进行正交化，

$$\begin{cases} \alpha_m = s_m \\ \alpha_i = s_i - \sum_{j=i+1}^m \frac{s_i \mathbf{D} \alpha_j^\top}{\alpha_j \mathbf{D} \alpha_j^\top} \quad i=(m-1), \dots, 1 \end{cases} \quad (24)$$

其中  $[s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_m]^\top = \mathbf{S}$ ，即  $s_i$  为  $\mathbf{S}$  的行向量。

最后可得  $\mathbf{U}_k^R$ 、 $\mathbf{D}_k^R$  的更新：

$$\begin{cases} \mathbf{U}_k^R = [\mathbf{u}_{ij}]_{m \times m} \text{, 其中 } u_{ij} = \frac{s_i \mathbf{D} \alpha_j^\top}{\alpha_j \mathbf{D} \alpha_j^\top} \\ \mathbf{D}_k^R = \alpha \mathbf{D} \alpha^\top \text{, 其中 } \alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n]^\top \end{cases} \quad (25)$$

至此已完成对  $\hat{\mathbf{R}}_k$  UD 分解形式  $\mathbf{U}_k^R$ 、 $\mathbf{D}_k^R$  的更新过程。

由于在对  $\hat{\mathbf{R}}_k$  UD 分解形式  $\mathbf{U}_k^R$ 、 $\mathbf{D}_k^R$  的更新过程中还要用到  $\mathbf{P}_{k|k-1}$  的 UD 分解  $\mathbf{U}_{k|k-1}^P$ 、 $\mathbf{D}_{k|k-1}^P$ ，因此接下来将分析  $\mathbf{U}_{k|k-1}^P$ 、 $\mathbf{D}_{k|k-1}^P$  的更新过程。

$\mathbf{P}_k$ 、 $\mathbf{P}_{k|k-1}$  的迭代方程为

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^\top + \mathbf{Q}_{k-1} \\ \mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} \end{cases} \quad (26)$$

对式 (26) 中的  $\mathbf{P}_{k-1}$ 、 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 、 $\mathbf{P}_k$  分别用其 UD 形式替代，有

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{k|k-1}^P \mathbf{D}_{k|k-1}^P (\mathbf{U}_{k|k-1}^P)^\top = \Phi_{k,k-1} \mathbf{U}_{k-1}^P \mathbf{D}_{k-1}^P (\mathbf{U}_{k-1}^P)^\top \Phi_{k,k-1}^\top + \mathbf{Q}_{k-1} \\ \mathbf{U}_k^P \mathbf{D}_k^P (\mathbf{U}_k^P)^\top = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{U}_{k|k-1}^P \mathbf{D}_{k|k-1}^P (\mathbf{U}_{k|k-1}^P)^\top \end{cases} \quad (27)$$

同理式 (22)~式 (25)，对  $\mathbf{P}_{k-1}$  进行状态更新，有

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{k|k-1}^P = [\mathbf{u}_{ij}]_{n \times n} \text{, 其中 } u_{ij} = \frac{\mathbf{m}_i \mathbf{N} \beta_j^\top}{\beta_j \mathbf{N} \beta_j^\top} \\ \mathbf{D}_{k|k-1}^P = \beta \mathbf{N} \beta^\top \text{, 其中 } \beta = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n]^\top \end{cases} \quad (28)$$

其中， $\mathbf{M} = [\Phi_{k,k-1} \mathbf{U}_{k-1}^P \quad \mathbf{I}]$ ， $\mathbf{m}_i$  为  $\mathbf{M}$  的行向量，

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{k-1}^P & \\ & \mathbf{Q}_{k-1} \end{bmatrix}, \beta_i = \mathbf{m}_i - \sum_{j=i+1}^n \frac{\mathbf{m}_i \mathbf{N} \beta_j^\top}{\beta_j \mathbf{N} \beta_j^\top} \quad i=(n-1), \dots, 1,$$

$\beta_n = \mathbf{m}_n$ 。

下面对  $\mathbf{P}_{k|k-1}$  进行量测更新。

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top + \hat{\mathbf{R}}_k)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (29)$$

为方便起见，先假定量测量为标量<sup>[10]</sup>，有

$$\begin{cases} P_k = P_{k|k-1} - \frac{1}{a} P_{k|k-1} H_k^T H_k P_{k|k-1} \\ a = H_k P_{k|k-1} H_k^T + \hat{R}_k \end{cases} \quad (30)$$

进一步, 有

$$\begin{aligned} U_k^P D_k^P (U_k^P)^T &= U_{k|k-1}^P D_{k|k-1}^P (U_{k|k-1}^P)^T - \\ &\frac{1}{a} U_{k|k-1}^P D_{k|k-1}^P (U_{k|k-1}^P)^T H_k^T H_k U_{k|k-1}^P D_{k|k-1}^P (U_{k|k-1}^P)^T = \\ &U_{k|k-1}^P \left( D_{k|k-1}^P - \frac{1}{a} D_{k|k-1}^P (U_{k|k-1}^P)^T H_k^T H_k U_{k|k-1}^P D_{k|k-1}^P \right) (U_{k|k-1}^P)^T \end{aligned} \quad (31)$$

令  $L = D_{k|k-1}^P - \frac{1}{a} D_{k|k-1}^P (U_{k|k-1}^P)^T H_k^T H_k U_{k|k-1}^P D_{k|k-1}^P$ , 此时再对  $L$  进行 UD 分解,

$$L = U^L D^L (U^L)^T \quad (32)$$

将式 (32) 代入式 (31) 中, 得到  $U_k^P$ 、 $D_k^P$  的更新过程:

$$\begin{cases} D_k^P = D^L \\ U_k^P = U_{k|k-1}^P U^L \end{cases} \quad (33)$$

由于量测量是  $m$  维的, 按照上述推导过程, 只需将式 (30)~式 (33) 推广至多维情形即可。

$$a_i = H_{k,i} P_{i-1,k|k-1} H_{k,i}^T + \hat{R}_{k,i} \quad (34)$$

其中  $H_{k,i}$  表示  $H_k$  的第  $i$  行,  $\hat{R}_{k,i}$  表示  $\hat{R}_k$  主对角线上第  $i$  个元素,  $i=1, \dots, m$ ,  $P_{0,k|k-1} = P_{k|k-1}$ 。

$$\begin{aligned} L &= D_{i-1,k|k-1}^P - \frac{1}{a_i} D_{i-1,k|k-1}^P (U_{i-1,k|k-1}^P)^T H_{i,k}^T H_{i,k} \cdot \\ &U_{i-1,k|k-1}^P D_{i-1,k|k-1}^P = U^L D^L (U^L)^T \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{cases} D_{i,k}^P = D^L \\ U_{i,k}^P = U_{i-1,k|k-1}^P U^L \end{cases} \quad (36)$$

从  $i=1, \dots, m$ , 循环更新式 (34)~式 (36), 最后可得  $D_{m,k}^P$ 、 $U_{m,k}^P$ ,

$$P_k = U_{m,k}^P D_{m,k}^P (U_{m,k}^P)^T \quad (37)$$

至此, 完成对  $P_k$  的量测更新。

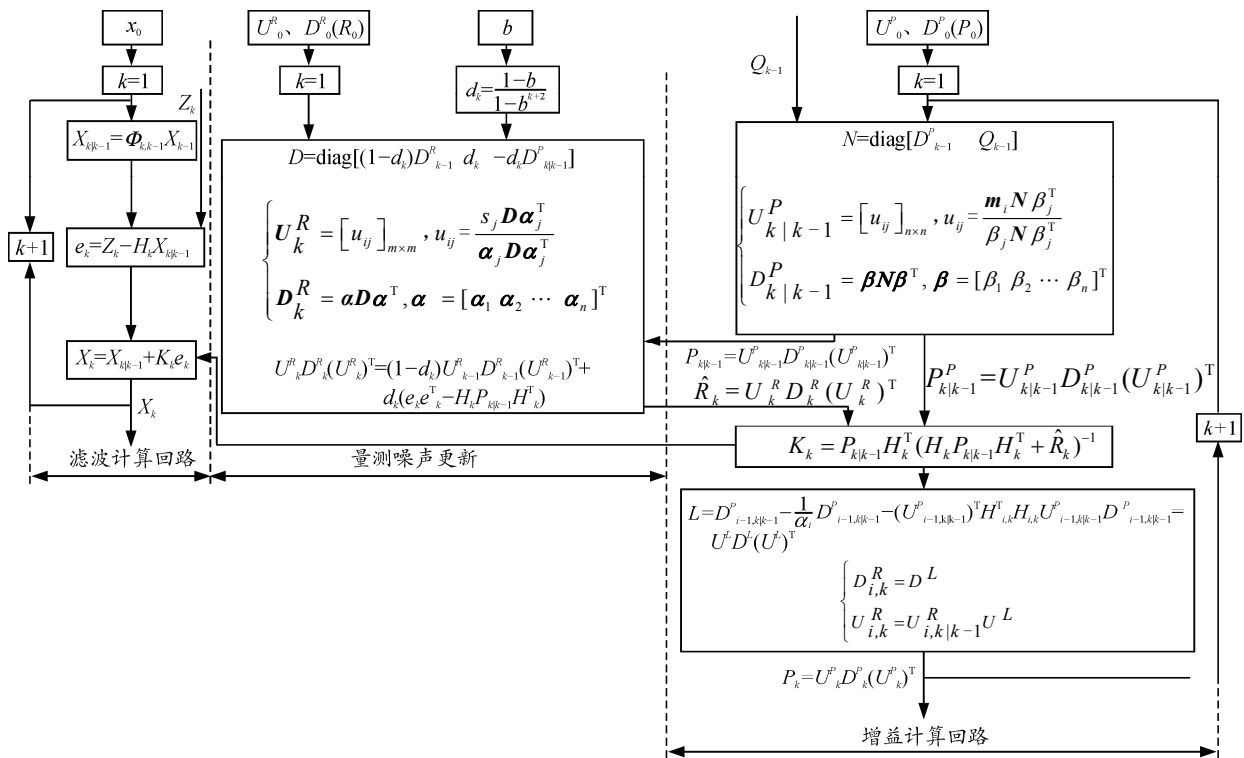


图 1 改进的 Sage-Husa 自适应滤波算法

改进的 Sage-Husa 自适应滤波算法如图 1, 其整体步骤如下:

- 1) 状态一步预测值  $X_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} X_{k-1}$ ;
- 2) 计算残差  $e_k = Z_k - H_k \hat{X}_{k|k-1}$ ;

- 3) 量测噪声阵的权值更新  $d_k = \frac{1-b}{1-b^{k+1}}$ ;

- 4) 一步预测误差协方差阵  $P_{k|k-1}$  UD 分解形式  $U_{k|k-1}^P$ 、 $D_{k|k-1}^P$  的更新;

$$\begin{cases} U_{k|k-1}^P = [u_{ij}]_{n \times n}, \text{ 其中 } u_{ij} = \frac{m_i N \beta_j^T}{\beta_j N \beta_j^T} \\ D_{k|k-1}^P = \beta N \beta^T, \text{ 其中 } \beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n]^T \end{cases}$$

5) 量测噪声阵  $\hat{R}_k$  UD 分解形式  $U_k^R$ 、 $D_k^R$  的更新:

$$\begin{cases} U_k^R = [u_{ij}]_{m \times m}, \text{ 其中 } u_{ij} = \frac{s_i D \alpha_j^T}{\alpha_j D \alpha_j^T} \\ D_k^R = \alpha D \alpha^T, \text{ 其中 } \alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T \end{cases}$$

$$\hat{R}_k = U_k^R D_k^R (U_k^R)^T$$

6) 计算滤波增益矩阵:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + \hat{R}_k)^{-1}$$

7) 状态更新  $X_k = X_{k|k-1} + K_k e_k$ ;

8) 状态估计误差协方差阵  $P_k$  UD 分解形式  $U_k^P$ 、 $D_k^P$  的更新.

$$\begin{cases} D_{i,k}^P = D^L \\ U_{i,k}^P = U_{i-1,k|k-1}^P U^L \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

$$P_k = U_{m,k}^P D_{m,k}^P (U_{m,k}^P)^T$$

步骤 1)~8)构成了基于 UD 分解的 Sage-Husa 自适应滤波算法。从以上步骤式可以看出, 由于  $D_k^R$ 、 $D_{k|k-1}^P$ 、 $D_{m,k}^P$  的正定性, 量测噪声阵  $\hat{R}_k$ 、一步预测误差协方差阵  $P_{k|k-1}$ 、状态估计误差协方差阵  $P_k$  在每一步滤波计算中均满足  $\hat{R}_k > 0$ ,  $P_{k|k-1} > 0$ ,  $P_k > 0$ , 避免了 Sage-Husa 自适应滤波算法因计算舍入误差造成  $\hat{R}_k$ 、 $P_{k|k-1}$ 、 $P_k$  的轻度负定或负定, 保证了 Sage-Husa 自适应滤波算法循环递推的有效性。

### 3 仿真分析

仿真初始条件如下: 状态变量  $X$  的初始值  $X(0)$  均取 0;  $P(0)$ 、 $Q$ 、 $R$  均取中等精度陀螺仪和加速度计的对应值; 陀螺仪常值漂移为  $0.02$  ( $^\circ$ )/h, 随机漂移为  $0.01$  ( $^\circ$ )/h; 加速度计的初始偏差均取为  $1 \times 10^{-4} g$ , 随机偏置为  $0.5 \times 10^{-4} g$ ; 量测噪声的真值  $0.06$  m/s; 在初始状态时不能得到精确的量测噪声统计特性和状态估计协方差矩阵的值, 故滤波中的量测噪声值设置  $0.6$  m/s,  $P_0$  选为其真值的 10 倍。

$$P(0) = \text{diag}[(0.1 \text{ m/s})^2 \ (0.1 \text{ m/s})^2 \ (1^\circ)^2 \ (1^\circ)^2 \ (1^\circ)^2 \ (100 \mu\text{g})^2 \ (100 \mu\text{g})^2 \ (100 \mu\text{g})^2 \ (0.02 \text{ }^\circ/\text{h})^2 \ (0.02 \text{ }^\circ/\text{h})^2 \ (0.02 \text{ }^\circ/\text{h})^2] \times 10$$

$$Q = \text{diag}[(50 \mu\text{g})^2 \ (50 \mu\text{g})^2 \ (0.01 \text{ }^\circ/\text{h})^2 \ (0.01 \text{ }^\circ/\text{h})^2 \ (0.01 \text{ }^\circ/\text{h})^2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

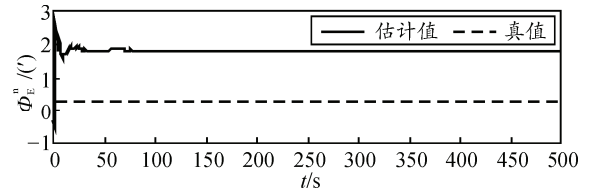
$$R = \text{diag}[(0.6 \text{ m/s})^2 \ (0.6 \text{ m/s})^2]$$

为验证这种算法的有效, 分别用标准卡尔曼滤波和改进的 Sage-Husa 自适应滤波算法在上述初始条件下进行仿真, 仿真结果如图 2~图 4 所示。其中, 失准角估计理论极限精度<sup>[10]</sup>为:

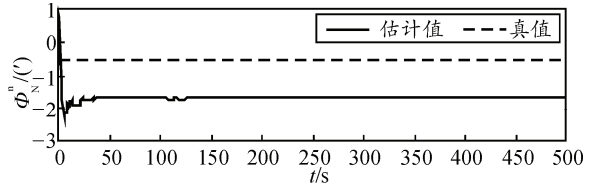
$$\sigma_{\phi_e}(\infty) = \frac{1}{g} \sqrt{E\{\nabla_y^2\}} \approx 0.35'$$

$$\sigma_{\phi_N}(\infty) = -\frac{1}{g} \sqrt{E\{\nabla_x^2\}} \approx -0.35'$$

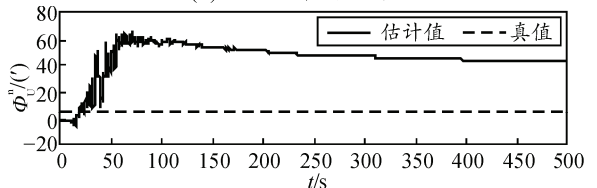
$$\sigma_{\phi_0}(\infty) = \frac{1}{w_{ie} \cos L} \sqrt{E\{\varepsilon_x^2\}} \approx 6.46'$$



(a) 东向失准角估计误差

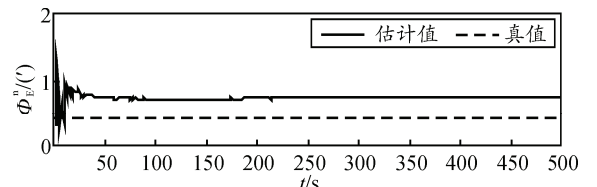


(b) 北向失准角估计误差

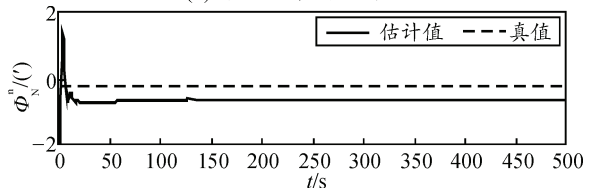


(c) 天向失准角估计误差

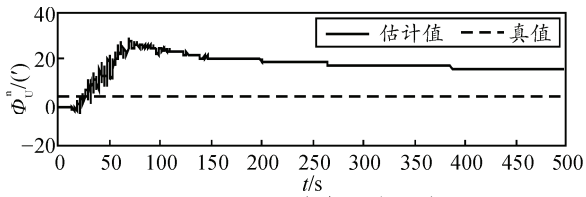
图 2 卡尔曼滤波失准角估计误差



(a) 东向失准角估计误差



(b) 北向失准角估计误差



(c) 天向失准角估计误差

图 3 改进的自适应卡尔曼滤波失准角估计误差

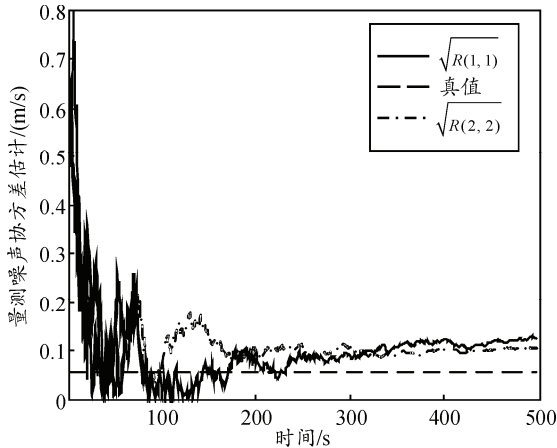


图 4 量测噪声协方差估计结果

图 2 的滤波方法为卡尔曼滤波，图 3 为改进的 Sage-Husa 自适应滤波算法(传统的 Sage-Husa 自适应滤波算法进行同等条件下初始对准是发散的，不具有可比性，故未列出)。从图 2、图 3 可见，在先验观测噪声协方差矩阵和状态估计协方差矩阵存在较大偏差时，改进的自适应算法能显著提高方位失准角的估计。静基座初始对准的卡尔曼滤波模型并非完全可观，失准角的估计值由于受陀螺常值漂移和加速度计常值漂移的影响，均存在估计偏差。由表 1 可知，改进自适应滤波算法优于常规的卡尔曼滤波，具有更高的精度，主要原因如下：

1) 文中提出的改进 Sage-Husa 只对量测噪声协方差阵进行估计，并且对其进行 UD 分解，克服了量测噪声协方差阵因计算机字长限制所导致的数值不稳定问题。图 4 给出了量测噪声协方差估值的结果，虽然先验的观测噪声协方差存在较大偏差，但采用文中提出的改进 Sage-Husa 自适应算法能较好估计观测噪声协方差，能够收敛于真值 0.06 m/s，具有较高的估计精度。

2) 状态估计协方差阵  $P$  中各元素的物理单位数量级相差比较大，随着  $P$  阵的范数越来越小，在求逆和乘法运算的时候，对舍入误差更加敏感，舍入误差已经不再是一个可以忽略的数值。而改进的 Sage-Husa 自适应算法对  $P$  阵进行的 UD 分解可以很好地保证数值稳定性，提高初始对准的精度。

表 1 失准角估计值 (°)

方法	东向失准角	北向失准角	方位失准角
理论极限精度	0.35	-0.35	6.46
卡尔曼滤波	1.70	-1.60	50.00
改进自适应	0.60	-0.70	19.00

### 4 结束语

针对传统的 Sage-Husa 自适应卡尔曼滤波算法在实际应用中容易发散的问题，笔者对该算法进行了一些改进，获得了一种数值稳定性好的自适应算法并将其应用于初始对准中。改进的 Sage-Husa 自适应滤波算法将简化的 Sage-Husa 自适应滤波算法同 UD 分解相结合，增强了滤波算法的数值稳定性。研究表明：在量测噪声协方差阵取值和状态估计协方差矩阵与真实条件不一致时，利用文中改进的自适应滤波算法能够实现量测噪声统计特性的有效估计和调整，从而改善了初始对准精度。除了初始对准以外，该改进的滤波算法也可用于其他需采用卡尔曼滤波技术而量测噪声统计特性难以给定的应用场合，具有较广泛的参考价值。

### 参考文献：

- [1] 苏宛新, 黄春梅, 刘培伟, 等. 自适应 Kalman 滤波在 SINS 初始对准中的应用[J]. 中国惯性技术学报, 2010, 18(1): 45-47.
- [2] 郑佳华, 王宏力, 段小庆, 等. 自适应卡尔曼滤波在 SINS 静基座初始对准中的应用[J]. 光电与控制, 2008, 15(6): 88-90.
- [3] 赵卓, 刘明雍, 赵涛. 自适应算法在捷联惯导初始对准中的应用[J]. 火力与指挥控制, 2011, 36(2): 78-80.
- [4] 李玉峰, 李磊, 张宗麟. 自适应卡尔曼滤波应用于空空导弹传递对准研究[J]. 弹箭与制导学报, 2003, 23(1): 128-130.
- [5] Jiang Y F, Lin Y P. Error estimation of INS ground alignment through observability analysis[J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic System, 1992, 28(1): 92-97.
- [6] Bar-Itzhack I Y, Berman N. Control theoretic approach to inertial navigation systems[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1988, 11(3): 237-245.
- [7] 牛振中, 李岁劳, 王青青, 等. 改进的 Sage-Husa 滤波在精确空投组合导航系统中的应用[J]. 科学技术与工程, 2012, 12(25): 6395-6399.
- [8] 郝福全, 陈丽容, 丁传红, 等. UD 分解自适应滤波在 SINS 初始对准中的应用[J]. 计算机工程与设计, 2014, 35(1): 0158-0162.
- [9] 赵琳. 非线性系统滤波理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011: 38-39.
- [10] 严恭敏, 秦永元. 捷联惯导系统静基座初始对准精度分析及仿真[J]. 计算机仿真, 2006, 23(10): 36-40.