doi: 10.7690/bgzdh.2013.11.011

基于排序的 AHP 权重确定方法

李云峰，王建政
（中国人民解放军 91049 部队，山东 青岛 266000）

摘要：为了解决 AHP 应用过程中各元素权重的确定问题，建立一种新的比较尺度，提出一种基于排序的元素权重确定方法。在探讨新比较尺度的基础上，给出了元素权重确定过程的具体步骤、排序过程及元素权重计算公式。结果表明：该方法能解决元素权重确定过程中判断矩阵不一致问题，降低决策过程的复杂度，节约决策时间。

关键词：AHP；判断矩阵；比较尺度；决策
中图分类号：TJ02　　**文献标志码**：A

Method for Deriving AHP Weight Based on Sorting

Li Yunfeng, Wang Jianzheng
(*No*. 91049 *Unit of PLA*, *Qingdao* 266000, *China*)

Abstract: In order to solving the problem of deriving element weights of AHP, this paper constructs a new contrast measurement and presents a new deriving method based on sorting. Based on studying the new contrast measurement, the paper gives the detail steps and sorting process of deriving the element weights, and puts forward the formula of computing element weights. The result shows that the method solves judging matrix inconsistence problem, and reduces the degree of complexity of decision making process, and saves the time of decision making.

Key words: AHP; judging matrix; contrast measurement; decision making

0 引言

层次分析法(analytic hierarchy process，AHP)是一种将定性与定量相结合的决策工具，自从 20 世纪 70 年代被提出以来，已在工程技术、经济管理和社会生活中得到广泛应用。在利用层次分析法解决实际问题时，关键是确定各元素的权重。在确定各元素权重过程中，首先构造判断矩阵，然后对判断矩阵进行一致性检验，如果判断矩阵满足一致性要求，就确定出各元素的权重。当判断矩阵不满足一致性要求时，如何对判断矩阵进行调整，使之满足一致性要求是存在的主要问题。目前，有些文献中提出了一些解决方法，比如经验估计法[1]、诱导矩阵法[2]、加速遗传算法[3]等。这些方法在一定程度上都能解决判断矩阵的不一致性问题，但都没有从根本上解决问题。特别是当元素较多时，对此矩阵的调整将非常困难。笔者首先提出了一种新的比较尺度，然后在此基础上，建立一种简单的权重确定方法。这种方法构造的判断矩阵具有完全一致性，从而避免了判断矩阵的调整问题。

1 比较尺度

当前，在 AHP 的研究过程中，存在近十种比较尺度，比如 0～2 比较尺度，-2～2 比较尺度，1～9 比较尺度，0/9～9/1 比较尺度，10/10～18/2 比较尺度等，其中 1～9 比较尺度是应用最为广泛的一种。这些比较尺度各有优劣，有专门文献对其进行比较阐述[4-5]。

1.1 判断矩阵的一致性检验

比较尺度是决定判断矩阵不一致性的一个根本因素。比如有 3 个元素 a_1、a_2、a_3，两两比较，a_2 比 a_1 稍微重要，a_3 比 a_1 重要，a_3 比 a_2 稍微重要。采用 1～9 比较尺度，构造判断矩阵如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 1/5\\ 3 & 1 & 1/3\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

判断矩阵一致性的充要条件是：$n\times n$ 阶判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征根 $\lambda_{\max}=n$。具体检验方法可用和法[6]求解判断矩阵的最大特征根，以此检验判断矩阵的一致性。利用和法求解判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征根的具体计算步骤如下：

1) 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一列向量归一化得 $\bar{W}_{ij}=a_{ij}\Big/\sum_{i=1}^{n}a_{ij}$；2) 对 $\bar{W}_{ij}$ 按行求和得 $\bar{W}_i=\sum_{j=1}^{n}\bar{W}_{ij}$；3) 将 $\bar{W}_i$ 归一化，得 $W_i=\bar{W}_i\Big/\sum_{i=1}^{n}\bar{W}_i$，这样得到向量 $\boldsymbol{W}=[W_1,W_2,\cdots,W_n]^{\mathrm{T}}$；4) 计算最大特征根

收稿日期：2013-07-11；修回日期：2013-08-22
作者简介：李云峰(1975—)，男，山东人，博士，工程师，从事装备可靠性和装备保障研究。

$\lambda_{\max}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{A}W)_i/W_i$，如果$\lambda_{\max}=n$，则 $\boldsymbol{A}$ 为一致性矩阵；否则，具有不一致性。

经计算，$\boldsymbol{A}$ 的最大特征根$\lambda_{\max}=3.25$，因此$\boldsymbol{A}$ 不满足一致性。

1.2　相对重要度

相对重要度是指 2 个元素对同一个目标的相对重要程度，它是确定 2 个元素权重大小的一种定性描述。通常划分为 5 级：同等重要、稍微重要、重要、明显重要、绝对重要。

1.3　1～1.5^{β} 比较尺度

在确定 2 个元素对于同一个目标的相对重要度时，为了便于计算和分析，把上述 5 级相对重要度进行定量化，用 1～1.5^{β} 比较尺度进行刻画。1～1.5^{β} 比较尺度的含义就是相邻一级的重要度体现在 2 个元素的权重上就是 1.5 倍。设 2 个元素为 a_i、a_j，其权重分别为 w_i、w_j，当 a_j 与 a_i 同等重要时，其权重之比为 1.5^0，即 $w_j/w_i=1.5^0$；当 a_j 比 a_i 稍微重要时，其权重之比为 1.5^1，即 $w_j/w_i=1.5^1$；当 a_j 比 a_i 重要时，其权重之比为 1.5^2，即 $w_j/w_i=1.5^2$；当 a_j 比 a_i 明显重要时，其权重之比为 1.5^3，即 $w_j/w_i=1.5^3$；当 a_j 比 a_i 绝对重要时，其权重之比为 1.5^4，即 $w_j/w_i=1.5^4$。另外，β 取 0.5、1.5、2.5、3.5 分别表示相邻相对重要度的一个中间状态。

2　权重的确定

在进行权重确定过程中，分为 3 个步骤：

1) 对所有元素进行排序，相对于目标的重要度由低到高；

2) 以第一个元素为主要参考对象，紧前元素为辅助参考对象，依次确定出当前元素的相对重要度；

3) 计算出各元素的权重。

2.1　元素排序

对所有元素进行编号，并依次排列，然后对它们进行排序。排序算法如下：

step 1：取最左边的元素作为基准(并作出标识)，其余元素依次与它进行比较，重要度弱于它的，移到其左边，重要度强于或等于它的，不移动。比较完毕后，整理元素序列，然后转到 step 2。

step 2：检查元素序列，如果每个基准元素两侧的非基准元素都不多于 1 个，或者每 2 个基准元素之间的非基准元素不多于 1 个，则排序结束；否则，就分别把基准元素两侧多余 1 个的非基准元素，或者是 2 个基准元素之间多于 1 个的那些非基准元素，分别作为一个新的序列进行排序，即转到 step 1。

举例说明排序过程，设元素为：

a_1　a_2　a_3　a_4　a_5　a_6　a_7　a_8　a_9

其排序过程如图 1。

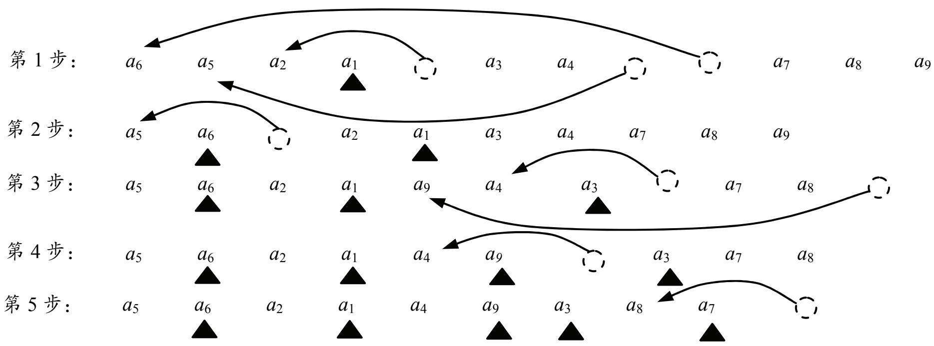

图 1　排序过程

排序后的元素序列为：a_5　a_6　a_2　a_1　a_4　a_9　a_3　a_8　a_7。

注：在上述比较过程中，不注重元素之间的精确相对重要度。

2.2　确定各元素相对重要度

表 1 为相对重要度确定表，n 对应的数字 1, 2, 3, 4, …(还可以继续增加表 1 的行数)为同等重要度元素的个数；β 对应的 0, 0.5, …, 3.5, 4 为各元素的重要度指数。

表 1　相对重要度确定

n	β								
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
1	a_5	—	a_6	a_1	a_4	—	a_3	a_8	a_7
2	—	—	a_2	—	a_9	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—

把重要度最低的元素，即位于元素序列最左边的元素，放入重要度指数为 0，n＝1 对应的表格中，序列中的其他元素依次与之进行比较，同时与其紧前元素也进行比较，根据比较结果，放入相应的表格中。当某个表格已经被放入一个元素，应放入此

格中元素同列的上一行表格中。同一列元素具有同等重要度。

举例说明，元素序列为 2.1 中排序完毕的元素序列。首先把 a_5 放入 $\beta=0$，$n=1$ 对应的表格中；a_6 与 a_5 相比稍微重要，则 a_6 放入 $\beta=1$，$n=1$ 对应的表格中；a_2 与 a_5 相比稍微重要，与 a_6 相比同等重要，则 a_2 放入 $\beta=1$，$n=2$ 对应的表格中；a_1 与 a_5 相比强于稍微重要，与 a_2 相比次于稍微重要，则 a_1 放入 $\beta=1.5$，$n=1$ 对应的表格中；其余元素依次进行类似的比较。所有元素比较完毕如表 1 所示。

2.3 计算各元素权重

定理　由 $1\sim1.5^{\beta}$ 比较尺度所确定的判断矩阵满足一致性。

证明：设 n 个元素为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，对应的权重分别为 $w_1,w_2,\cdots,w_n$，重要度指数分别为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，则判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n}\\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1.5^{\beta_1}}{1.5^{\beta_1}} & \frac{1.5^{\beta_1}}{1.5^{\beta_2}} & \cdots & \frac{1.5^{\beta_1}}{1.5^{\beta_n}}\\ \frac{1.5^{\beta_2}}{1.5^{\beta_1}} & \frac{1.5^{\beta_2}}{1.5^{\beta_2}} & \cdots & \frac{1.5^{\beta_2}}{1.5^{\beta_n}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1.5^{\beta_n}}{1.5^{\beta_1}} & \frac{1.5^{\beta_n}}{1.5^{\beta_2}} & \cdots & \frac{1.5^{\beta_n}}{1.5^{\beta_n}}\end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{A}$ 的每一列向量归一化为：

$$\bar{W}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}1.5^{\beta_i}}\begin{bmatrix}1.5^{\beta_1} & 1.5^{\beta_1} & \cdots & 1.5^{\beta_1}\\ 1.5^{\beta_2} & 1.5^{\beta_2} & \cdots & 1.5^{\beta_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1.5^{\beta_n} & 1.5^{\beta_n} & \cdots & 1.5^{\beta_n}\end{bmatrix}$$

对 $\bar{W}$ 按行求和得

$$\tilde{W}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}1.5^{\beta_i}}\left[1.5^{\beta_1},1.5^{\beta_2},\cdots,1.5^{\beta_n}\right]^{\mathrm{T}}$$

将 $\tilde{W}$ 归一化得

$$\boldsymbol{W}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}1.5^{\beta_i}}\left[1.5^{\beta_1},1.5^{\beta_2},\cdots,1.5^{\beta_n}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}1.5^{\beta_i}}\left[1.5^{\beta_1},1.5^{\beta_2},\cdots,1.5^{\beta_n}\right]^{\mathrm{T}}$$

则

$$\lambda_{\max}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{W})_i/W_i=n$$

由此可知 $\boldsymbol{A}$ 满足一致性。

证毕。

由于判断矩阵满足完全一致性，则各元素权重计算公式为

$$w_i=\frac{1.5^{\beta_i}}{\sum_{j=0}^{n}1.5^{\beta_j}}\tag{1}$$

式中：w_i 为第 i 个元素的权重；β_i 为第 i 个元素对应的重要度指数。

举例说明，仍以 2.1 节中的元素序列为例，在 2.2 节中已经确定出相对重要度，利用式 (1) 可以计算出各元素的权重。如

$$w_1=\frac{1.5^{1.5}}{1.5^0+2\times1.5^1+1.5^{1.5}+2\times1.5^2+1.5^3+1.5^{3.5}+1.5^4}=\frac{1.8371}{22.9081}=0.0802$$

经过类似计算，可以计算出其余元素的权重为：w_2=0.065 5, w_3=0.147 3, w_4=0.098 2, w_5=0.043 7, w_6=0.065 5, w_7=0.221 0, w_8=0.180 4, w_9=0.098 2。

由此可看出，笔者提出的比较尺度与其他比较尺度相比，主要的优点就是判断矩阵具有一致性，操作过程简单、明了。

3 结论

笔者通过新的对比尺度构造出的判断矩阵为一致性矩阵，解决了元素确定过程中判断矩阵不一致性的问题，也避免了判断矩阵如何进行一致性调整这个复杂的问题，降低了决策过程的复杂度，节约了决策时间。在各元素权重的确定过程中，首先进行粗略排序，从根本上保证了各元素之间的顺序一致性。而利用表格对各元素之间的相对重要度进行确定，具有方便、直观的特点，并使得各元素权重计算公式较为简单。

参考文献：

[1] 刘兴堂，吴晓燕. 现代系统建模与仿真技术[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2001: 87-109.

[2] 李梅霞. AHP 中判断矩阵一致性改进的一种方法[J]. 系统工程理论与实践, 2000(2): 123-126.

[3] 金菊良，魏一鸣，潘金锋. 修正 AHP 中判断矩阵一致性的加速遗传算法[J]. 系统工程理论与实践, 2004(1): 64-70.

[4] 何堃. 层次分析法的标度研究[J]. 系统工程理论与实践, 1997(6): 58-61.

[5] 林岳峥，祝利，程晓雷. 基于群组层次分析法的情报保障系统效能评估[J]. 兵工自动化, 2012, 31(8): 57-61.

[6] 文仲辉. 战术导弹系统分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000: 364-365.