

doi: 10.7690/bgzdh.2013.08.018

基于奇异值的小波变换微弱信号消噪法

周洪成^{1,2}

(1. 南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016; 2. 金陵科技学院信息技术学院, 南京 211169)

摘要: 针对信噪比低、噪声非均匀分布的弱信号消噪效果不佳的问题, 提出一种基于有效奇异值分解和小波阈值消噪相结合的方法。通过构造相空间矩阵并对其进行奇异值分解(singular value decomposition, SVD), 得到一系列正交子空间; 根据信号和噪声对奇异值贡献不同, 通过奇异值最小二乘误差判定法进行有效奇异值选择, 并利用子空间重构信号。仿真实验表明: 本方法提取出的信号完整性更好, 信噪比更高。

关键词: 微弱信号; 奇异值分解; 最小二乘误差; 重构信号; 小波阈值消噪

中图分类号: TP274 **文献标志码:** A

De-Noising Method for Weak Signal of Wavelet Transformation Based on Singular Value

Zhou Hongcheng^{1,2}

(1. College of Automation Engineer, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. School of Information & Technology, Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, China)

Abstract: In view of the deficiencies with low signal noise ratio (SNR) and non-uniform noise distribution, an algorithm based on singular value decomposition (SVD) plus wavelet threshold de-noising is presented. The phase space matrix is constructed by SVD, getting a series of orthogonal subspaces. According to the different contribution of signal and noise for the singular value, a determine method about the least squares error is proposed for estimating the number of effective singular value. The subspaces reconstruct signal by the wavelet threshold method. The results show that the extracted signals have better integrity and higher SNR.

Key words: weak signal; singular value decomposition; least squares error; reconstruction signal; wavelet threshold de-noising

0 引言

随着科学技术的发展以及研究的不断深入, 需从强噪声中检测出有用的微弱信号。这种“微弱信号”不仅意味着信号的幅值很小, 更重要的是被强噪声淹没的, 用常规和传统方法不能检测到的微弱信号; 因此, 微弱信号检测技术^[1]不同于一般的检测技术, 如何有效地抑制噪声, 恢复和提取强噪声中的有用信号, 特别是对低信噪比、噪声分布非均匀情况下的提取, 是后续研究工作的关键。

在弱信号检测领域应用的较普遍一种方法是被誉为“数学显微镜”的小波变换, 特别是 D.L.Donoho 在 1995 年提出的一种非常简洁有效的小波阈值去噪方法^[2], 引起了许多学者的广泛关注^[3-6]。此方法可得到最佳估计值, 而任何其他线性估计都达不到同样的估计结果。但该方法仅对信噪比高、噪声均匀分布的信号具有良好的消噪效果, 而对于信噪比低、噪声非均匀分布的信号则效果不佳。

奇异值分解是从矩阵的角度出发, 将包含信号信息的矩阵分解到一系列奇异值和奇异值矢量所对

应的时频子空间中, 具有良好的稳定性和不变性, 将奇异值分解法与小波阈值消噪法有机结合进行消噪处理^[7]。刘雄飞等人^[8]提出了基于奇异值小波分解的全分量消噪技术, 虽然有效地消除了大噪声区域的噪声, 但从本质上还是小波阈值消噪法; 李靖等人^[9]提出的基于奇异值小波分解的主分量消噪法, 虽然解决了噪声非均匀分布情况下消噪难的问题, 但是提取的信号存在较严重的失真问题。

笔者利用奇异值分解的特点, 通过奇异值最小二乘误差判定法来选取有效奇异值及其子空间进行小波阈值消噪, 该方法不仅能最大限度的提取出有用信号, 且信噪比更高, 失真更小。

1 SVD 的基本理论

奇异值分解(singular value decomposition, SVD)是一种非线性滤波, 广泛应用于信号的消噪^[10-13]和检测工作中。在奇异值理论中, 任何一个 $m \times n$ ($m > n$) 阶的矩阵 A , 不管其行、列是否相关, 矩阵 A 的奇异值分解都可表示为

$$A = U \Lambda V^T \quad (1)$$

收稿日期: 2013-02-25; 修回日期: 2013-03-07

基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金(11KJD510002)

作者简介: 周洪成(1978—), 男, 江苏人, 博士, 讲师, 从事系统辨识、图像识别跟踪研究。

式中: U 和 V 分别是 $m \times m$ 阶和 $n \times n$ 阶的正交矩阵, $A = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$ 是对角矩阵, 其对角元素为 A 的奇异值, 并按降序排列, 其中 $k(k \leq n)$ 是矩阵 A 的秩。由于 A 是一对角阵, 因此 SVD 可以将一个秩为 K 的 $m \times n$ 阶矩阵 A 表示为 K 个秩为 1 的 $m \times n$ 阶子矩阵的和。其中, 每个子矩阵由 2 个特征矢量 (分别来自于 U 和 V) 与权值相乘得到, 可表示为:

$$A = UV^T = \sum_{i=1}^k \delta_i u_i v_i^T = \sum_{i=1}^k \delta_i A_i \quad (2)$$

式中: u_i 和 v_i 分别为矩阵 U 和矩阵 V 的第 i 个列向量, 且 u_i 和 v_i 两两正交, 它们分别构成了信号频率信息和时间信息; δ_i 是矩阵 A 的第 i 个奇异值; A_i 是包含 u_i 和 v_i 的子矩阵, 即时-频子空间。保留矩阵 A 奇异值分解后较大的奇异值项, 而其它奇异值置零, 即可选取子空间进行逆运算重构, 从而提取出特定成分的信号。

在进行信号处理时, 若要应用 SVD 分解方法, 必须首先利用信号构造出一个 n 维的相空间 A 。 A 可以有多种形式, 如 Toeplitz 矩阵等, 矩阵构造方式不同, 则 SVD 的信号处理效果也不一样。设有离散数字信号 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$, 取 2 个正整数 m 和 n , 对此信号按每次 n 个点连续截取 m 段, 构造一个 m 行 n 列的矩阵 A (重构的相空间) 如下:

$$A = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_{n+1} & X_{n+2} & \dots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{(m-1)n+1} & X_{(m-1)n+2} & \dots & X_{mn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

从矩阵 A 的构造过程可知, 只要将 $\delta_i A_i$ 的各行首尾相接, 就可构成一个一维的分量信号 S_i , S_i ($i=1, 2, \dots, k$) 则形成了对原始信号 X 的一个重分解:

$$X = S_1 + S_2 + \dots + S_k \quad (4)$$

由于原信号经过奇异值分解后可表示为多个一维分量信号的叠加, 所以采用这种方式构造出矩阵 A , 在经过 SVD 分解后各分量之间相互正交, 因而可有效地将噪声信号相对均匀地分解到子空间中。

2 小波阈值消噪

小波阈值消噪方法的基本思想是: 属于 $L^2(R)$ 空间的信号的能量主要集中在小波域内有限的几个系数内, 而噪声的能量却分布于整个小波域内。经小波分解后信号的系数要大于噪声的系数, 当小波系数小于该阈值时, 认为这时的小波系数主要是由

噪声引起的, 予以舍弃; 当小波系数大于该阈值时, 认为这时的小波系数主要是由信号引起的, 则把这一部分的小波系数直接保留下来或按某一固定向量向 0 收缩, 然后由新的小波系数进行小波重构, 得到去噪后的信号^[14]。

小波阈值消噪方法分硬阈值法和软阈值法。硬阈值法是将绝对值大于阈值的小波系数予以保留, 而软阈值法是将绝对值大于阈值的小波系数不是完全保留, 作收缩处理。2 种方法的消噪函数分别为:

硬阈值函数:

$$W' = \begin{cases} W & |W| \geq T \\ 0 & |W| < T \end{cases}$$

软阈值函数:

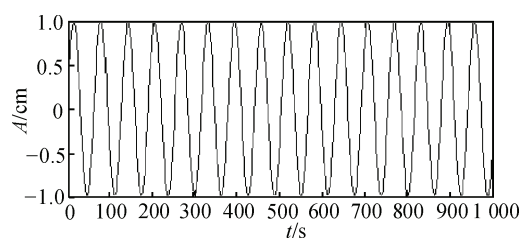
$$W' = \begin{cases} \text{sign}(W)(|W| - T) & |W| \geq T \\ 0 & |W| < T \end{cases}$$

硬阈值函数是不连续函数, 会产生一些间断点。软阈值函数是连续函数, 能较好地克服上面缺点; 因此, 选择软阈值法。

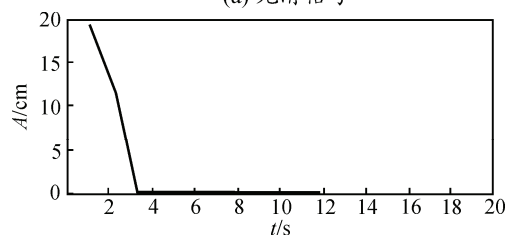
3 奇异值最小二乘误差判定方法

确定有效的奇异值个数虽然简单, 但还没有成熟的选择方法, 更多地依赖经验进行选取。奇异熵增量的方法来确定有效奇异值个数, 虽然有了一定的提高, 但这种奇异熵增量曲线和奇异值本身曲线的形状并没有多大的区别。笔者根据有效信号和随机噪声对奇异值的影响不同, 提出了基于奇异值最小二乘误差的判定方法进行有效奇异值选取。

3.1 方法描述



(a) 光滑信号



(b) 奇异值分布

图 1 光滑信号及其奇异值分布

不同信号的秩可能不同, 但是光滑信号对应的重构相空间中的矩阵 A 是奇异的, 即其秩

$k < \min(m, n)$ 。对于完全由噪声构成的轨迹矩阵 A ，必定是列满秩矩阵。从图 1~图 3 可以看出，完全由噪声成分构成的时间序列，轨迹矩阵是列满秩矩阵，且所有的奇异值几乎相等，构成一条近似平坦的直线；对于光滑信号，随着 K 的增大，奇异值迅速衰减且在某点降为零。

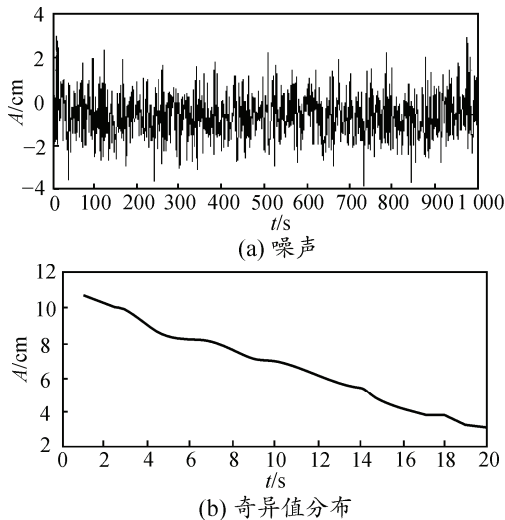


图 2 噪声及其奇异值分布

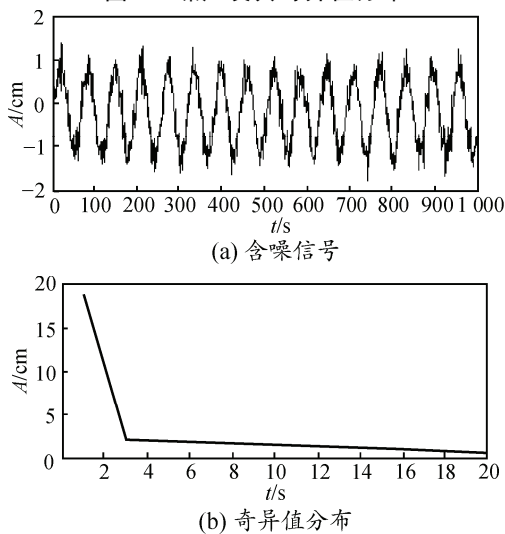


图 3 含噪信号及其奇异值分布

理想信号会受到噪声的干扰，因此混合信号的 SVD 分解可写做： $A_m = A + W$ ，其中 A 为信号光滑部分在重构空间中的矩阵， W 为噪声成分的矩阵。通过对比，光滑信号和噪声干扰对 $A_m = A + W$ 分解后，奇异值的贡献有所不同，光滑信号主要贡献前 r 个特征值，而噪声信号对各阶的贡献几乎相等；因此，可选择奇异值中的前几个奇异值，其他奇异值置零。

3.2 不同个数的奇异值对消噪效果的影响

下面以一信号为例来说明：

$$x(t) = \sin(0.1 \times t) + n(t)$$

其中 $x(t)$ 为含噪正弦信号，采样点数为 1 000， $n(t)$ 为随机噪声，信噪比为 5。通过对含噪信号采用构造相空间矩阵 A 并对其进行 SVD 分解，得到奇异值分布图，如图 4 所示。

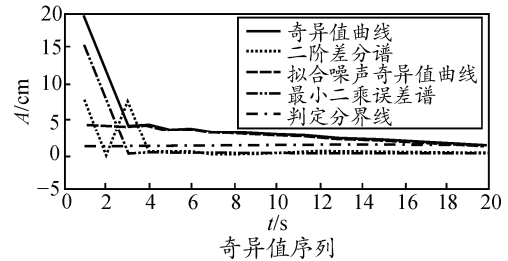


图 4 含噪信号以及奇异值曲线

前面 2 个奇异值很大，然后奇异值序列在第 3 个奇异值处迅速下降并发生转折，此后奇异值的变化则比较平稳。在最小二乘误差谱中，前面 2 个奇异值相对于拟合的噪声奇异值曲线误差大，且在判定直线上方，而从第 3 个奇异值开始相对误差都在判定直线下方，此时有效奇异值的个数应取为 2。

4 基于 SVD 的小波阈值消噪法

由于小波阈值消噪法对信噪比低、噪声非均匀分布的弱信号消噪效果不佳，而奇异值分解法可以有效实现噪声由非均匀分布到均匀分布的过程。笔者将奇异值分解法与小波阈值消噪法结合，再利用最小二乘误差法选取有效奇异值，进行非均匀噪声信号的消噪，流程图如图 5 所示。

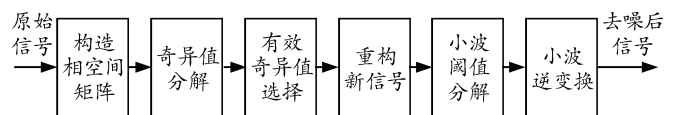


图 5 有效奇异值小波阈值消噪流程

具体实现步骤如下：

- 1) 将噪声非均匀分布的混合信号 $x(t)$ 采用连续截断信号方式构造相空间矩阵 A ，构造方法见式 (3)。
- 2) 对矩阵 A 进行 SVD 分解，得到降序排列的奇异值序列以及相互正交的时频子空间，见式 (2)。
- 3) 利用笔者提出的最小二乘误差判定方法选择有效奇异值，用有效奇异值所对应的分量信号表示原信号，就可以实现信号的初步消噪。
- 4) 对第 3 步得到的信号进行小波阈值分解，具体为：先将信号进行小波变换，得到各尺度小波系数，再利用软阈值法 $W' = \text{sign}(W)(|W| - T) (W > T)$ 修正各尺度小波系数。其中 T 为小波阈值，这里选取 minimax 阈值法，minimax 阈值选择规则不容易丢失真实信号成分，可以将弱小信号从高频信号中提

取出来。minimax 阈值公式如下：

$$T = \begin{cases} \sigma(0.3936 + 0.1829 \times \lg_2 n) & n > 32 \\ 0 & n < 32 \end{cases} \quad (5)$$

其中， n 为各层小波分解系数的个数总和（根据经验值选定 $n=32$ 为分界点）， σ 是噪声方差。

5) 最后，通过逆变换重构信号，得到最终结果。

已知信号 $x(t) = \sin(0.03 \times t) + \sin(0.1 \times t) + n(t)$ ，其中， $x(t)$ 为含噪正弦信号，采样点数为 1 000， $n(t)$ 为分布非均匀的随机噪声。如图 6 所示，其中前 500 个采样点的噪声明显大于后 500 个点的噪声。经过矩阵构造以及 SVD 分解，得到奇异值曲线。从图 7 可以看到，奇异值曲线在第 3 个点处发生较大转折，故得到 $r=2$ ，即 $X' = S_1 + S_2$ 。

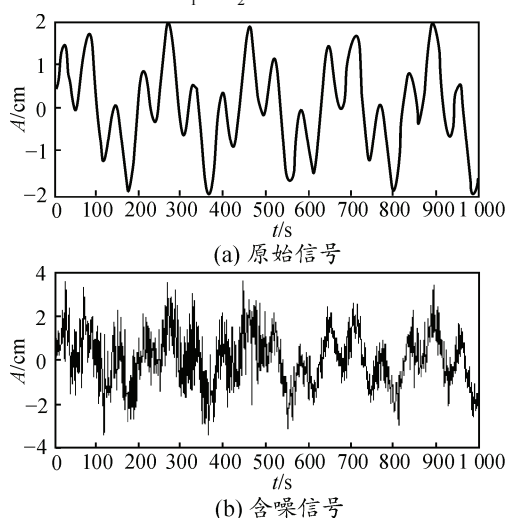


图 6 原始信号以及含噪信号波形

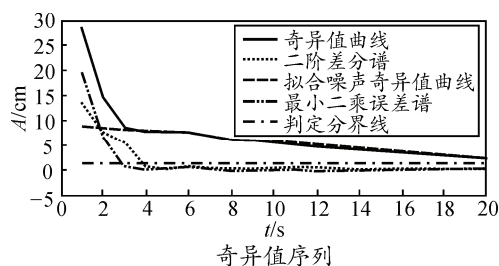


图 7 奇异值谱

这里采用 db6 小波进行 4 层分解，得到消噪后的分量 S_i' ，经过线性叠加即得到消噪后的信号：

$X'' = S_1' + S_2'$ ，如图 8 所示。

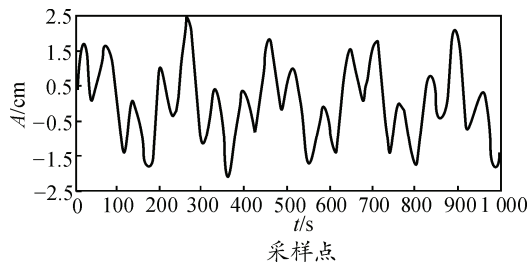


图 8 消噪后信号

5 结论

针对小波阈值消噪法存在的不足，笔者将奇异值分解与小波变换法相结合，解决了强噪声背景下弱信号的检测问题。同时，笔者利用信号和噪声对奇异值影响不同特点，提出奇异值最小二乘误差判定方法，确定包含信号成分的有效奇异值的个数，利用该方法得出的奇异值不仅准确可靠，且实现了自动选择。构造轨迹矩阵 A ，使原信号经过奇异值分解后可表示为多个一维分量信号的叠加，且分量之间相互正交，可有效地将噪声信号相对均匀地分解到子空间中。下一步工作将对更低信噪比的情况下去噪，以及如何有效构建轨迹矩阵进行研究。

参考文献：

- [1] 赵吉祥, 陈超婵, 王欢, 等. 微弱电信号检测方法回顾[J]. 中国计量学院学报, 2009, 20(3): 201-210.
- [2] Donoho D L. Denoising by soft-thresholding[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1995, 8(3): 613-627.
- [3] Agante P M, MarquesdeSa J P. ECG noise filtering using wavelet with soft-thresholding method[J]. Computers in Cardiology, 1999: 535-538.
- [4] 张传斌, 邓正隆. 激光陀螺信号的小波滤波方法研究[J]. 电子学报, 2004, 32(1): 125-127.
- [5] 周知进, 文泽军, 卜英勇. 小波降噪在超声回波信号处理中的应用[J]. 仪器仪表学报, 2009, 30(2): 237-241.
- [6] 张通, 张骏, 张怡. 基于改进小波阈值的激光陀螺漂移信号降噪[J]. 仪器仪表学报, 2011, 32(2): 258-263.
- [7] 赵学智, 叶邦彦. SVD 和小波变换的信号处理效果相似性及其机理分析[J]. 电子学报, 2008, 8(36): 1582-1589.
- [8] 刘雄飞, 郭爽, 李长庚, 等. 非均匀噪声分布心电信号的奇异值小波消噪法[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2009, 40(5): 137-138.
- [9] 李靖, 毕卫红, 刘微. 基于小波 SVD 的光纤光栅振动系统消噪算法[J]. 光通信研究, 2010(6): 14-16.
- [10] 吕志民, 张吴军, 徐金梧, 等. 基于奇异谱的降噪方法及其在故障诊断技术中的应用[J]. 机械工程学报, 1999, 35(3): 85-88.
- [11] Maj J B, RoyackersL, MoonenM, et al. SVD-based optimal filtering for noise reduction in dual microphone hearing aids: a real time implementation and perceptual evaluation[J]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 2005, 52(9): 1563-1573.
- [12] 范红波, 张英堂, 李国璋, 等. 基于奇异值分解的电感式磨粒传感器信号降噪方法研究[J]. 传感技术学报, 2010, 23(8): 1129-1133.
- [13] Shin K, Feraday S A, Harris C J, et al. Optimal autoregressive modelling of a measured noisy deterministic signal using singular-value decomposition[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2003, 17(2): 423-432.
- [14] 张敬明, 万俊, 梁瑞涛, 等. 基于提升算法的 3 阶 Daubechies 离散小波变换的 FPGA 实现[J]. 兵工自动化, 2012, 31(8): 78-81.