

## 第十四章

# 电磁感应

chapter 14

electromagnetic  
induction

# 教学基本要求

一 掌握并能熟练应用法拉第电磁感应定律和楞次定律来计算感应电动势，并判明其方向。

二 理解动生电动势和感生电动势的本质。了解有旋电场的概念。

三 了解自感和互感的现象，会计算几何形状简单的导体的自感和互感。

四 了解磁场具有能量和磁能密度的概念，会计算均匀磁场和对称磁场的能量。



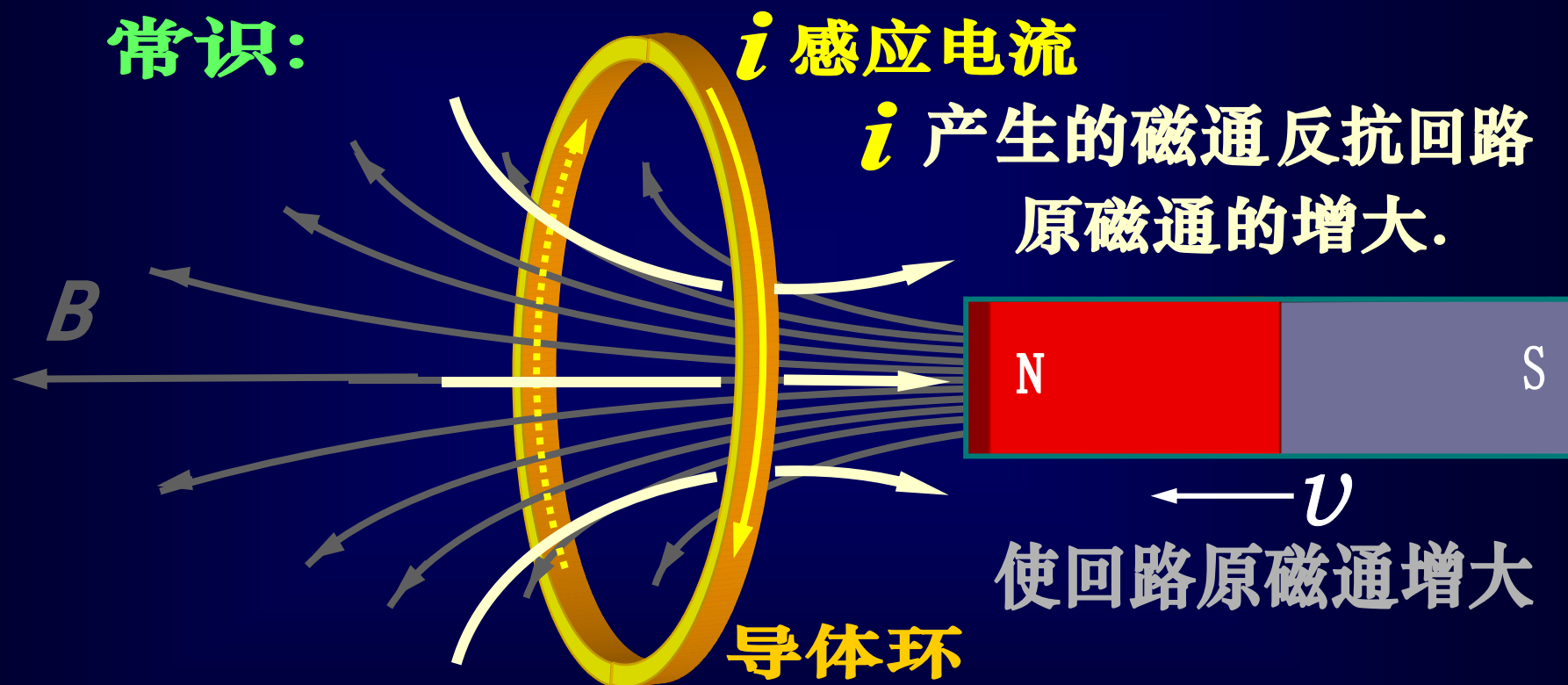
**法拉第**（Michael Faraday, 1791-1867），伟大的英国物理学家和化学家.他创造性地提出场的思想，磁场这一名称是法拉第最早引入的.他是电磁理论的创始人之一，于1831年发现电磁感应现象，后又相继发现电解定律，物质的抗磁性和顺磁性，以及光的偏振面在磁场中的旋转.

法拉第实验影视

# 14-1 电磁感应定律

● 楞次定律 —— 感应电流产生的磁通量总是反抗回路中原磁通量的变化.

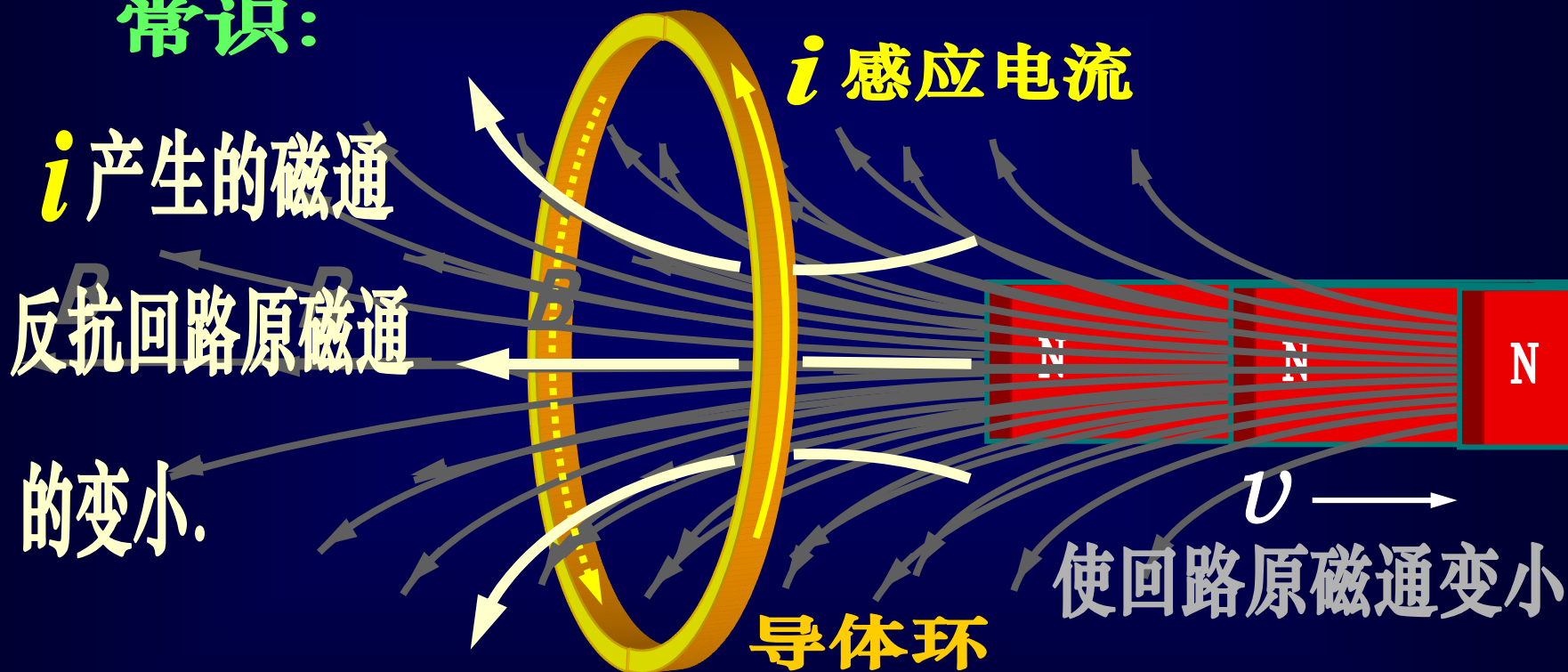
常识:



# 14-1 电磁感应定律

楞次定律 —— 感应电流产生的磁通量总是反抗回路中原磁通量的变化.

常识:



# 14-1 电磁感应定律

● 法拉第电磁感应定律 —— 不论什么原因使通过回路的磁通量发生变化, 回路中均有感应电动势产生, 其大小与通过该回路的磁通量随时间的变化率  $d\Phi/dt$  成正比.

数学表达式:

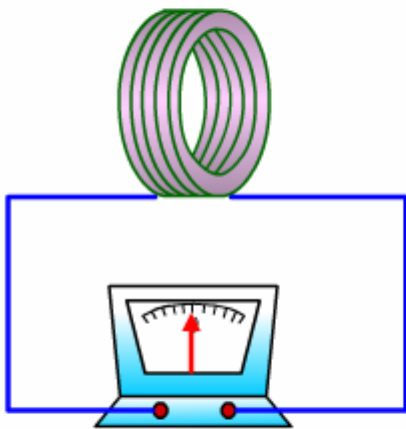
感应电动势  $\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$

负号是楞次定律的数学表达。(即感应电动势  $\mathcal{E}_i$  的正负总是与磁通量变化率  $d\Phi/dt$  的正负相反. 这是因为感应电流  $i$  与  $d\Phi$  的正负恒相反, 而  $\mathcal{E}_i$  又与  $i$  同向的缘故).



# 14-1 电磁感应定律

## 一 电磁感应现象



电磁感应现象影视



# 14-1 电磁感应定律

## 二 电磁感应定律

当穿过闭合回路所围面积的磁通量发生变化时，

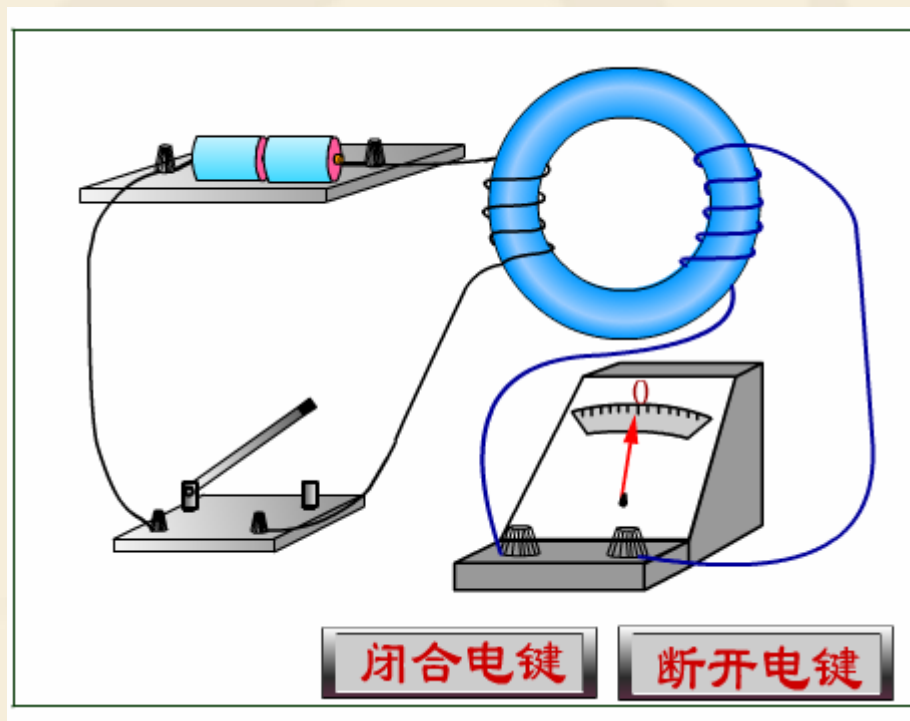
回路中会产生感应电动势，

且感应电动势正比于磁通量对时间变化率的负值。

$$\mathcal{E}_i = -k \frac{d\Phi}{dt}$$

国际单位制

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_i \rightarrow \text{伏特} \\ \Phi \rightarrow \text{韦伯} \end{array} \right. \quad k = 1$$





## 14-1 电磁感应定律

1) 闭合回路由  $N$  匝密绕线圈组成

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\psi}{dt} \quad \text{磁通匝数 (磁链)} \quad \psi = N\Phi$$

2) 若闭合回路的电阻为  $R$ ，感应电流为

$$I_i = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

$\Delta t = t_2 - t_1$  时间内，流过回路的电荷

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I dt = - \frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{1}{R} (\Phi_1 - \Phi_2)$$

# 14-1 电磁感应定律

## ◆ 感应电动势的方向

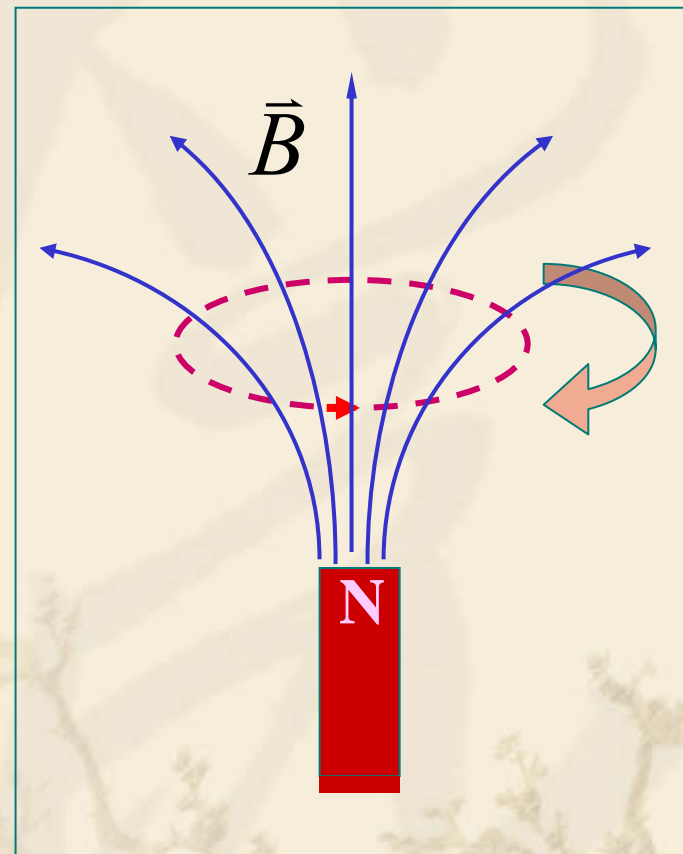
$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t)$$

$\Phi > 0$  (  $\vec{B}$  与回路成右螺旋 )

$$\frac{d\Phi}{dt} > 0 \quad \mathcal{E}_i < 0$$

$\mathcal{E}_i$  与回路取向相反



# 14-1 电磁感应定律

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

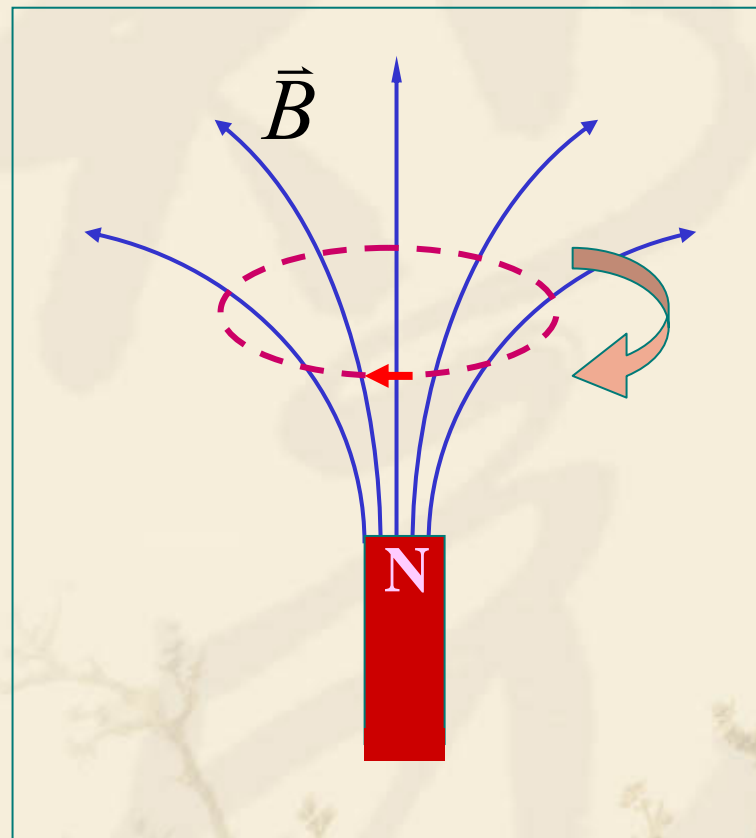
$$\Phi < 0$$

$$\frac{d\Phi}{dt} < 0 \quad \mathcal{E}_i > 0$$

$\mathcal{E}_i$  与回路取向相同

当线圈有  $N$  匝时

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

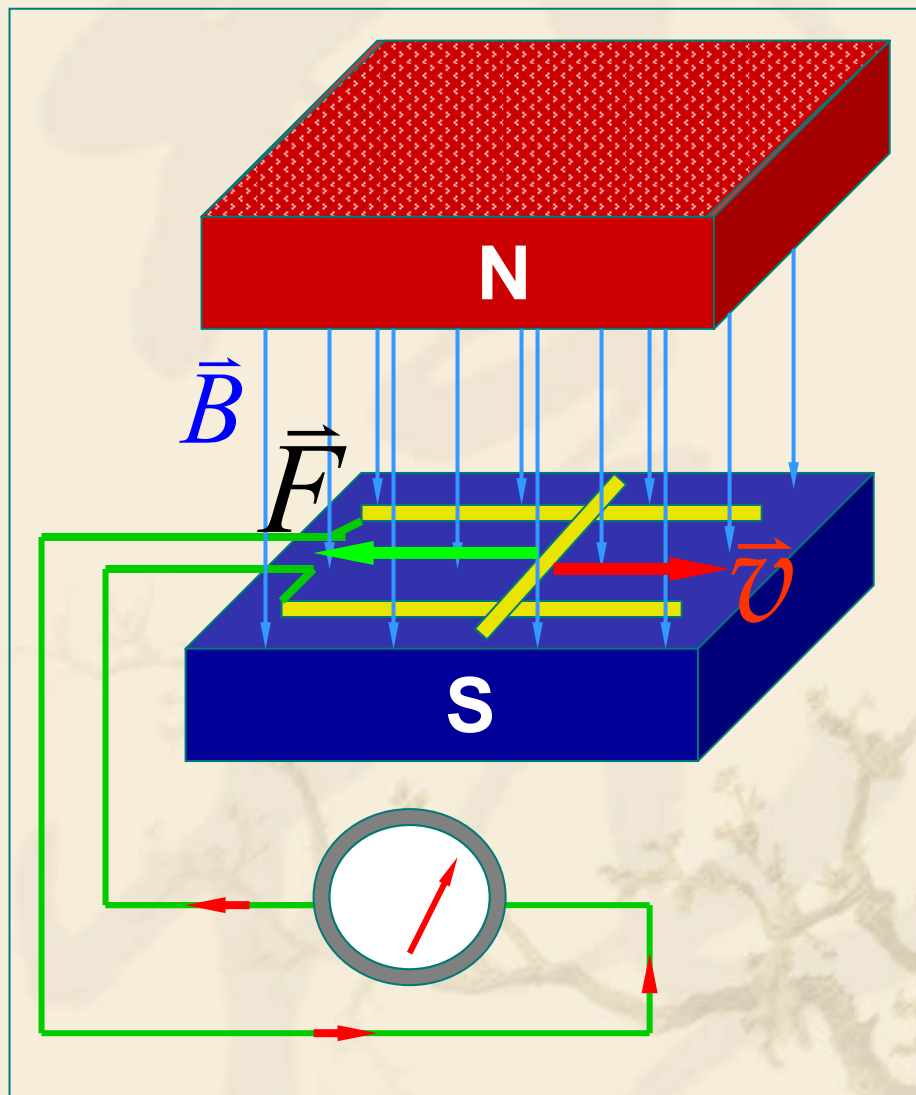


# 14-1 电磁感应定律

$$\mathbf{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

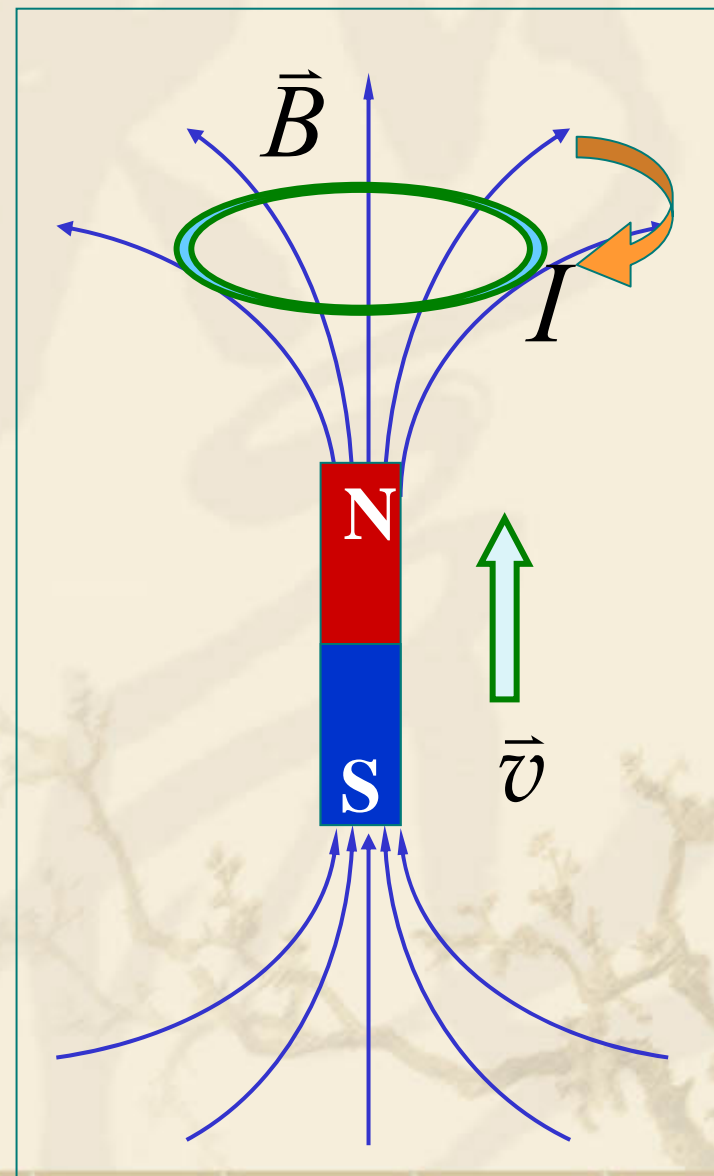
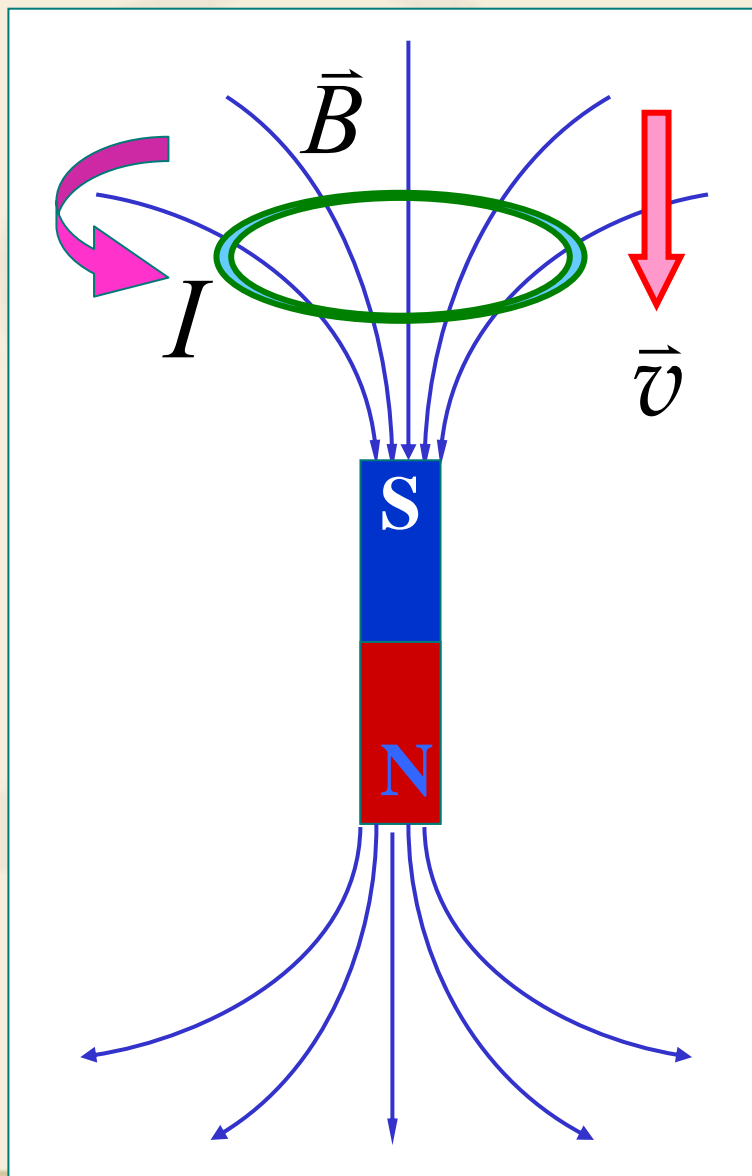
## 三 楞次定律

闭合的导线回路中所出现的感应电流，总是使它自己所激发的磁场反抗任何引发电磁感应的原因（反抗相对运动、磁场变化或线圈变形等）。



# 14-1 电磁感应定律

用楞次定律判断感应电流方向



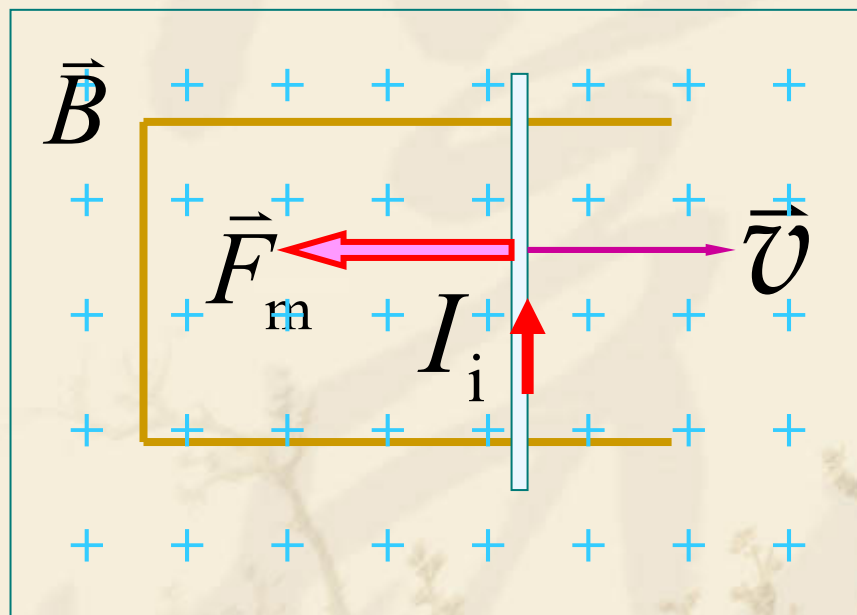


# 14-1 电磁感应定律

**楞次定律** 闭合的导线回路中所出现的感应电流，总是使它自己所激发的磁场反抗任何引发电磁感应的原因。

楞次定律是能量守恒定律的一种表现

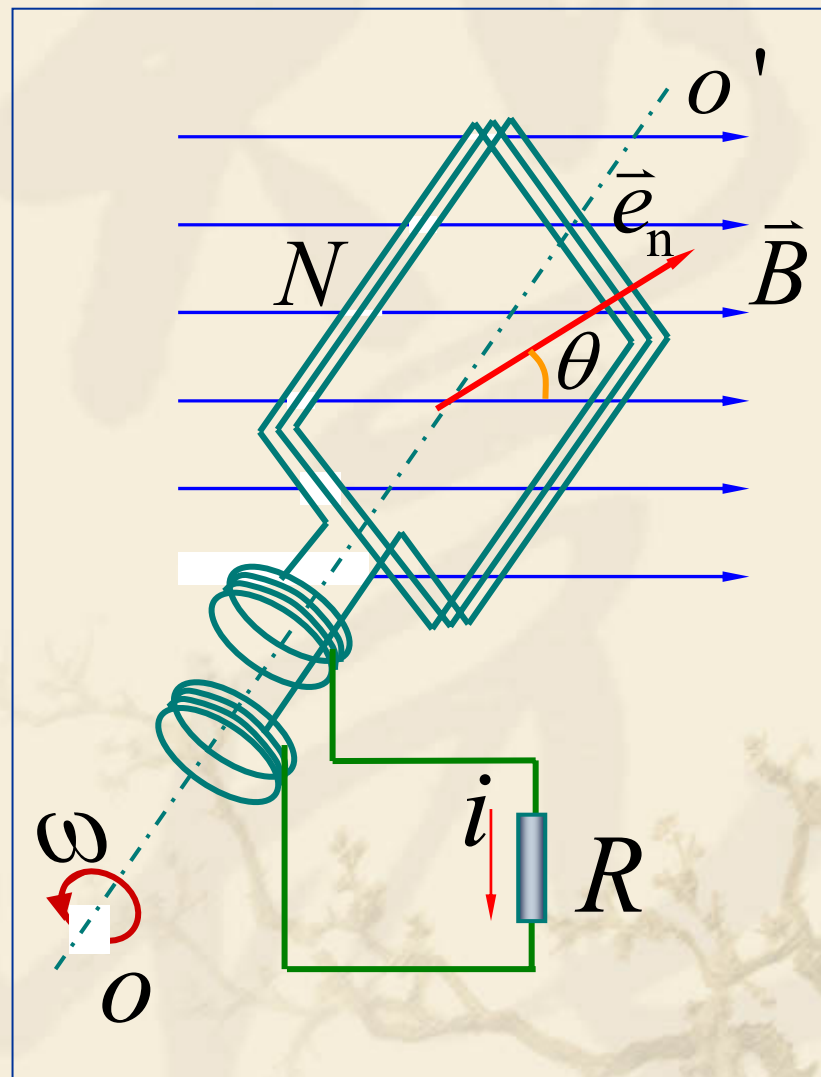
机械能  $\longrightarrow$  焦耳热



维持滑杆运动必须外加一力，此过程为外力克服安培力做功转化为焦耳热。

# 14-1 电磁感应定律

**例** 在匀强磁场中，置有面积为  $S$  的可绕轴转动的  $N$  匝线圈。若线圈以角速度  $\omega$  作匀速转动。求线圈中的感应电动势。



## 14-1 电磁感应定律

已知  $S, N, \omega$  求  $\mathbf{E}$

解 设  $t = 0$  时,

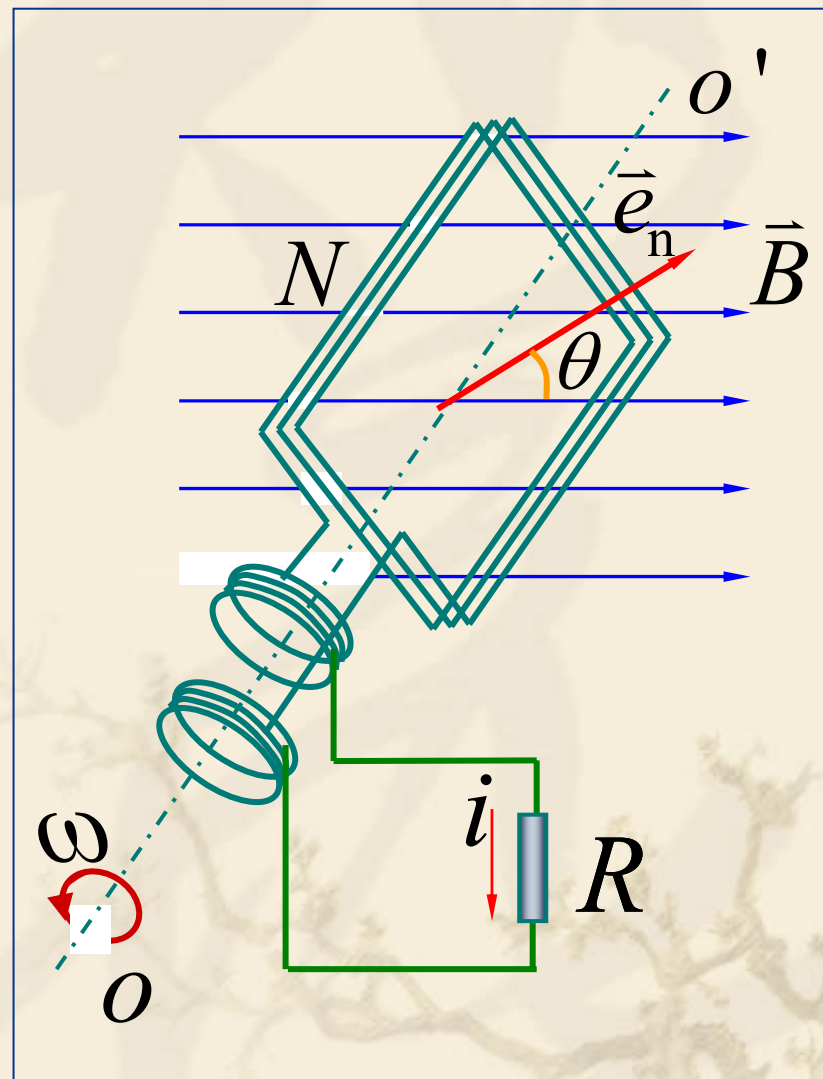
$\vec{e}_n$  与  $\vec{B}$  同向, 则  $\theta = \omega t$

$$\psi = N\phi = NBS \cos \omega t$$

$$\mathbf{E} = -\frac{d\psi}{dt} = NBS\omega \sin \omega t$$

$$\text{令 } \mathbf{E}_m = NBS\omega$$

$$\text{则 } \mathbf{E} = \mathbf{E}_m \sin \omega t$$



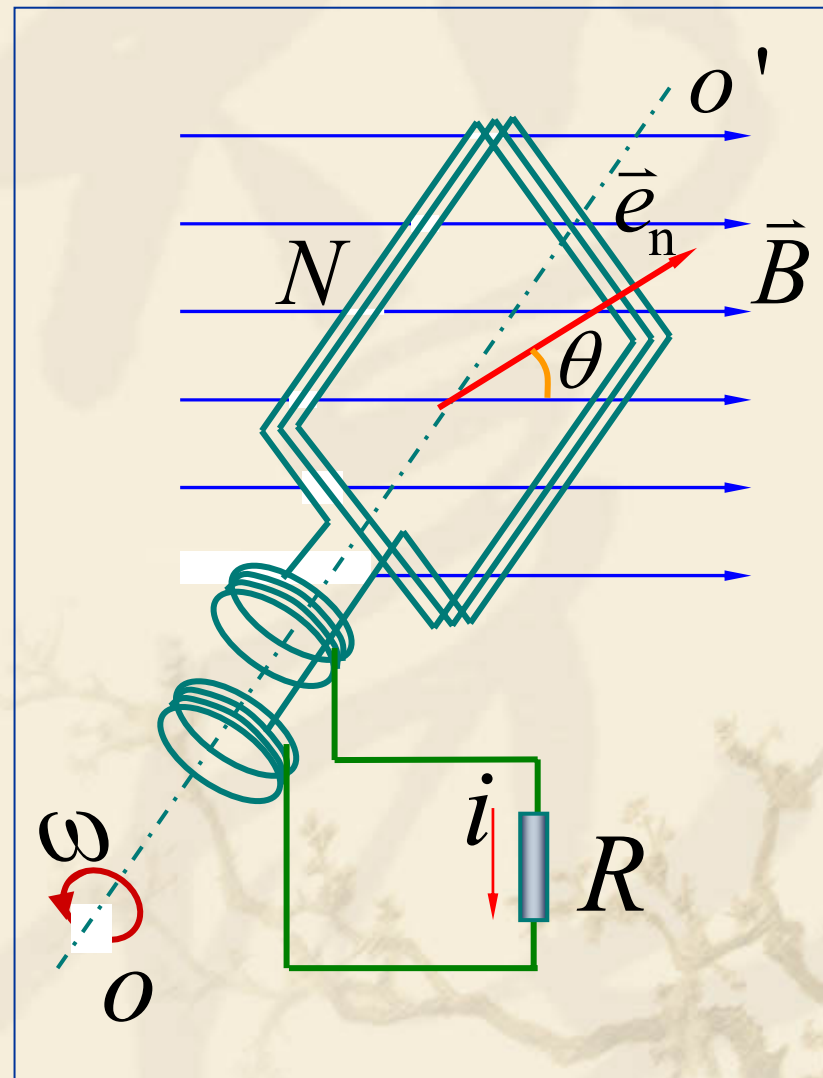
# 14-1 电磁感应定律

$$E = E_m \sin \omega t$$

$$i = \frac{E_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

$$I_m = \frac{E_m}{R}$$

可见,在匀强磁场中匀速转动的线圈内的感应电流是时间的正弦函数.这种电流称**交流电**.





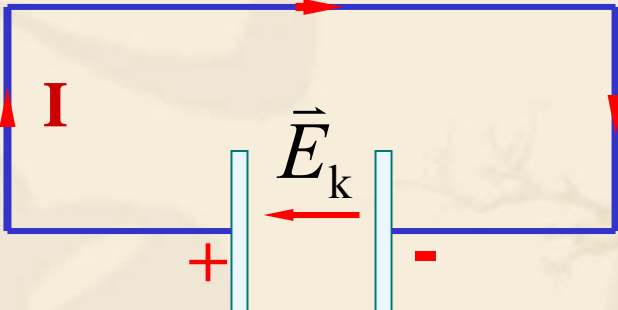
# 14-2 动生电动势

引起磁通量变化的原因

1) 稳恒磁场中的导体运动，或者回路面积变化、取向变化等  $\longrightarrow$  动生电动势

2) 导体不动，磁场变化  $\longrightarrow$  感生电动势

◆ 电动势



The diagram shows a rectangular circuit loop. On the left vertical wire, a red arrow labeled  $I$  points upwards. On the bottom horizontal wire, there is a battery symbol with a '+' sign on the left and a '-' sign on the right. A red arrow labeled  $\vec{E}_k$  points from the '-' terminal to the '+' terminal. The right vertical wire has a red arrow pointing downwards. The top horizontal wire has a red arrow pointing to the right.

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

$\vec{E}_k$  : 非静电的电场强度.

◆ 闭合电路的总电动势

$$\mathcal{E} = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$



## 14-2 动生电动势

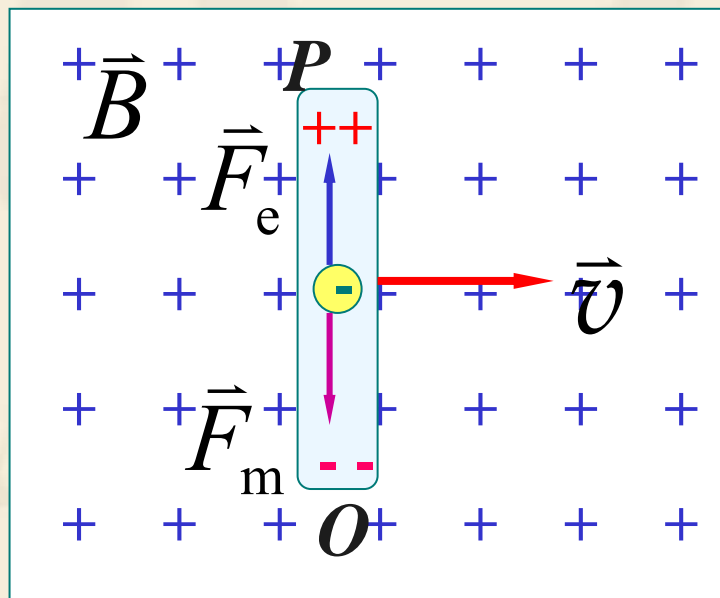
### 一 动生电动势

动生电动势的**非**静电力场来源  $\longrightarrow$  洛伦兹力

$$\vec{F}_m = (-e)\vec{v} \times \vec{B}$$

平衡时  $\vec{F}_m = -\vec{F}_e = -e\vec{E}_k$

$$\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_m}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$$



$$\mathcal{E}_i = \int_{OP} \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_{OP} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

设杆长为  $l$   $\mathcal{E}_i = \int_0^l v B dl = vBl$

**例1** 一长为  $L$  的铜棒在磁感强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场中,以角速度  $\omega$  在与磁场方向垂直的平面上绕棒的一端转动, **求** 铜棒两端的感应电动势.

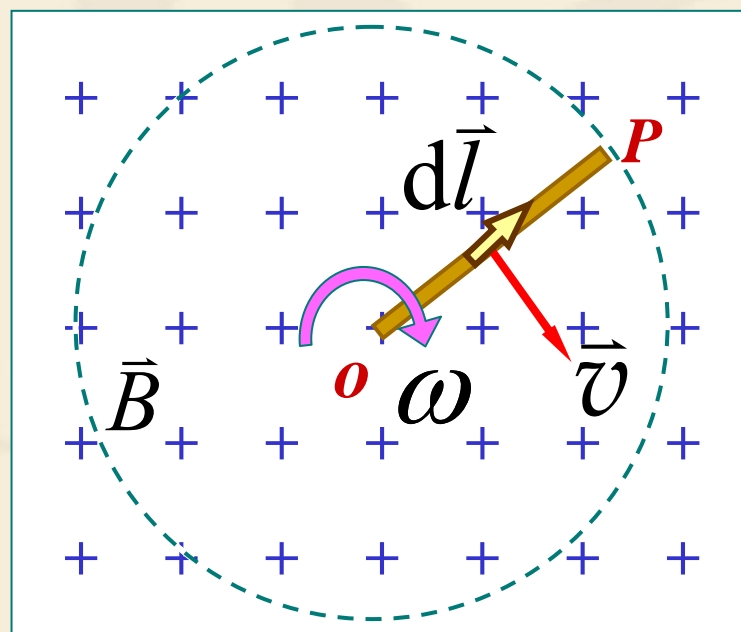
**解**  $d\mathcal{E}_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

$$= vBdl$$

$$\mathcal{E}_i = \int_0^L vBdl$$

$$= \int_0^L \omega lB dl$$

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} B \omega L^2$$



$\mathcal{E}_i$  方向  $O \longrightarrow P$

(点  $P$  的电势高于点  $O$  的电势)

**例2** 一导线矩形框的平面与磁感强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场相垂直. 在此矩形框上, 有一质量为  $m$  长为  $l$  的可移动的细导体棒  $MN$ ; 矩形框还接有一个电阻  $R$ , 其值较之导线的电阻值要大得很多. 若开始时, 细导体棒以速度  $\vec{v}_0$  沿如图所示的矩形框运动, 试求棒的速率随时间变化的函数关系.

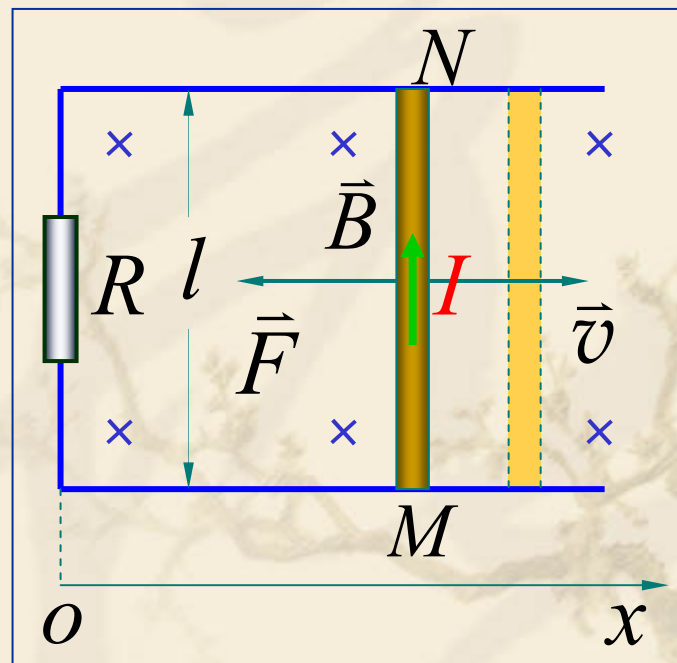
**解** 如图建立坐标

棒中  $\mathbf{E}_i = Bl\mathbf{v}$  且由  $M \rightarrow N$

棒所受安培力

$$F = IBl = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

方向沿  $ox$  轴反向



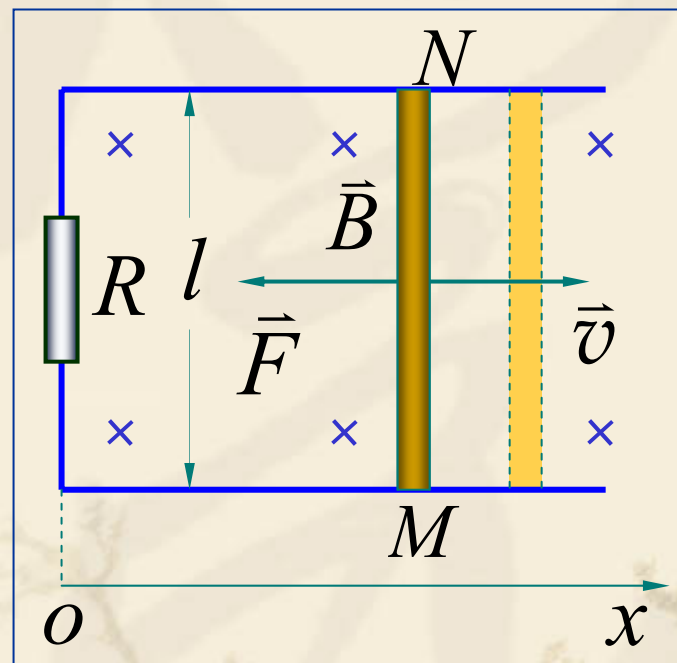
$$F = IBl = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

棒的运动方程为

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

则 
$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = - \int_0^t \frac{B^2 l^2}{mR} dt$$

方向沿 $ox$ 轴反向



计算得棒的速率随时间变化的函数关系为

$$v = v_0 e^{-(B^2 l^2 / mR) t}$$

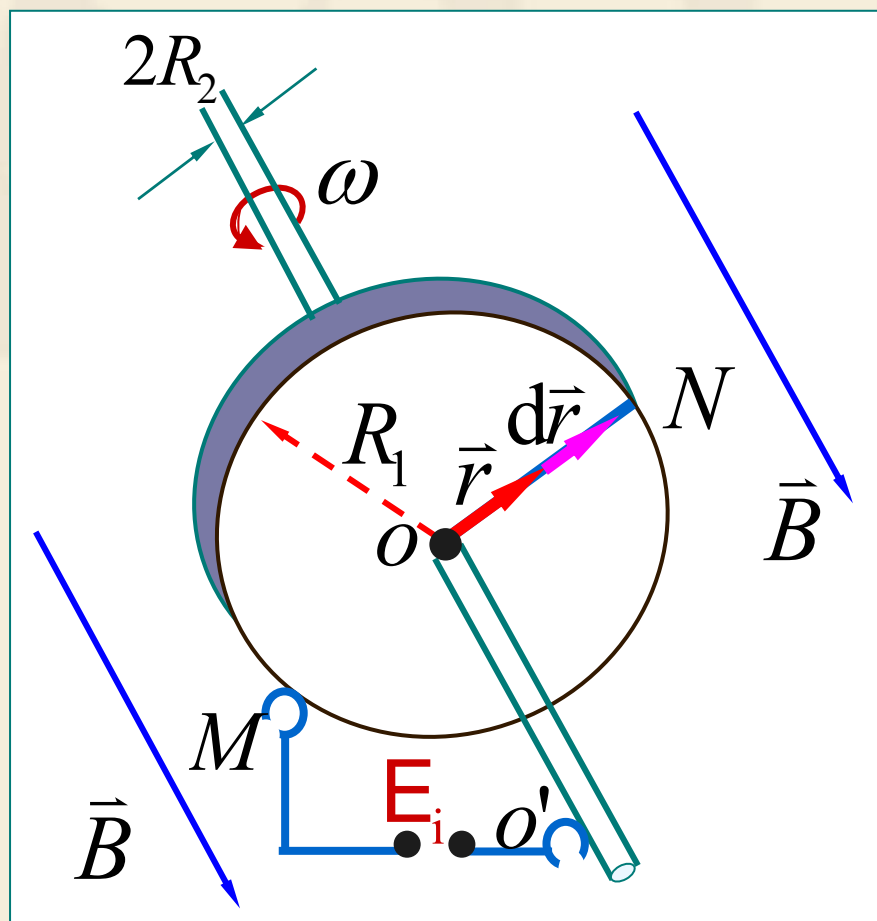


**例 3** 圆盘发电机 一半径为  $R_1 = 1.2\text{m}$ 、厚度  $d = 1.0 \times 10^{-3}\text{m}$  的铜圆盘,以角速率  $\omega = 5 \times 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,绕通过盘心 垂直的金属轴  $oo'$  转动, 轴的半径为  $R_2$ , 且  $R_2 = 2.0 \times 10^{-3}\text{m}$  圆盘放在磁感强度  $T 01 = \text{W}$  的均匀磁场中,  $\vec{B}$  的方向亦与盘面垂直. 有两个集电刷分别与圆盘的边缘和转轴相连. 试计算它们之间的电势差, 并指出何处的电势较高.



## 14-2 动生电动势

已知  $R_1 = 1.2\text{m}$ ,  $d = 1.0 \times 10^{-3}\text{m}$ ,  $\omega = 5 \times 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$



$R_2 = 2.0 \times 10^{-3}\text{m}$ ,  $\text{Total} = \text{A}$

求  $E_i = ?$

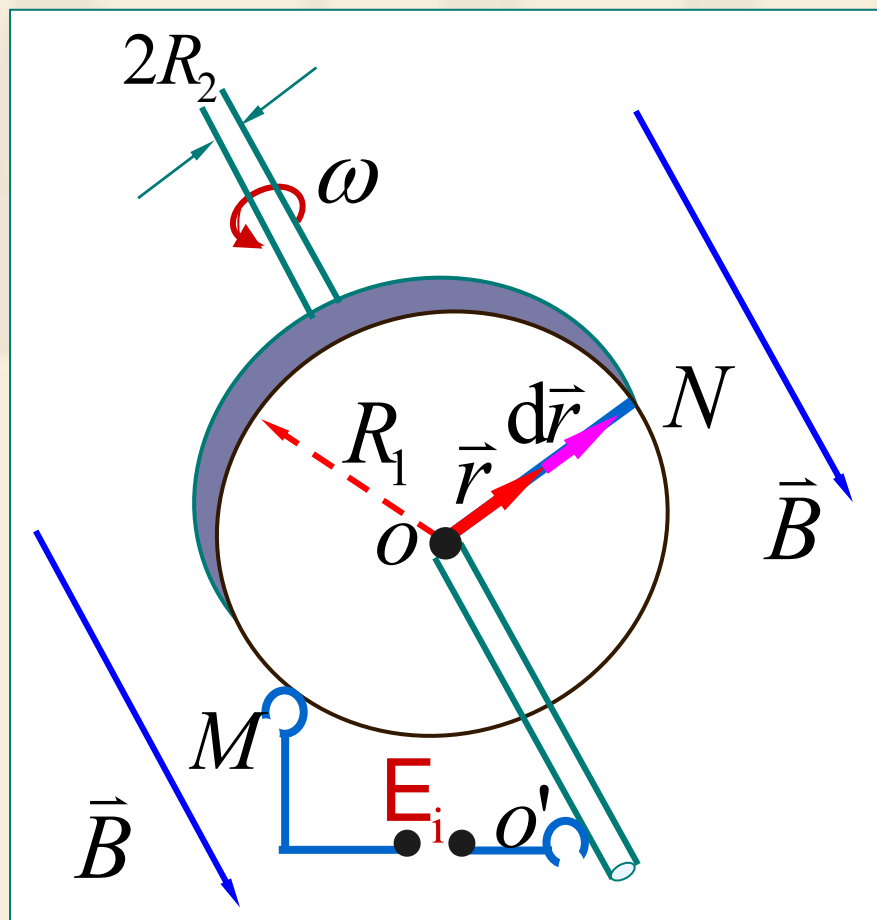
(方法一)

**解** 因为  $d \ll R_1$ ,  
所以不计圆盘厚度.

如图取线元  $d\vec{r}$

$$\begin{aligned} \text{则 } dE_i &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \\ &= vBdr = r\omega B dr \end{aligned}$$

解  $d\mathcal{E}_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = vBdr = r\omega Bdr$



$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= \int_{R_1}^{R_2} r\omega Bdr \\ &= \frac{1}{2}\omega B(R_1^2 - R_2^2) \\ &= 226 \text{ V}\end{aligned}$$

圆盘边缘的电势高于中心转轴的电势。

## 14-2 动生电动势

已知  $R_1 = 1.2\text{m}$ ,  $d = 1.0 \times 10^{-3}\text{m}$ ,  $\omega = 5 \times 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

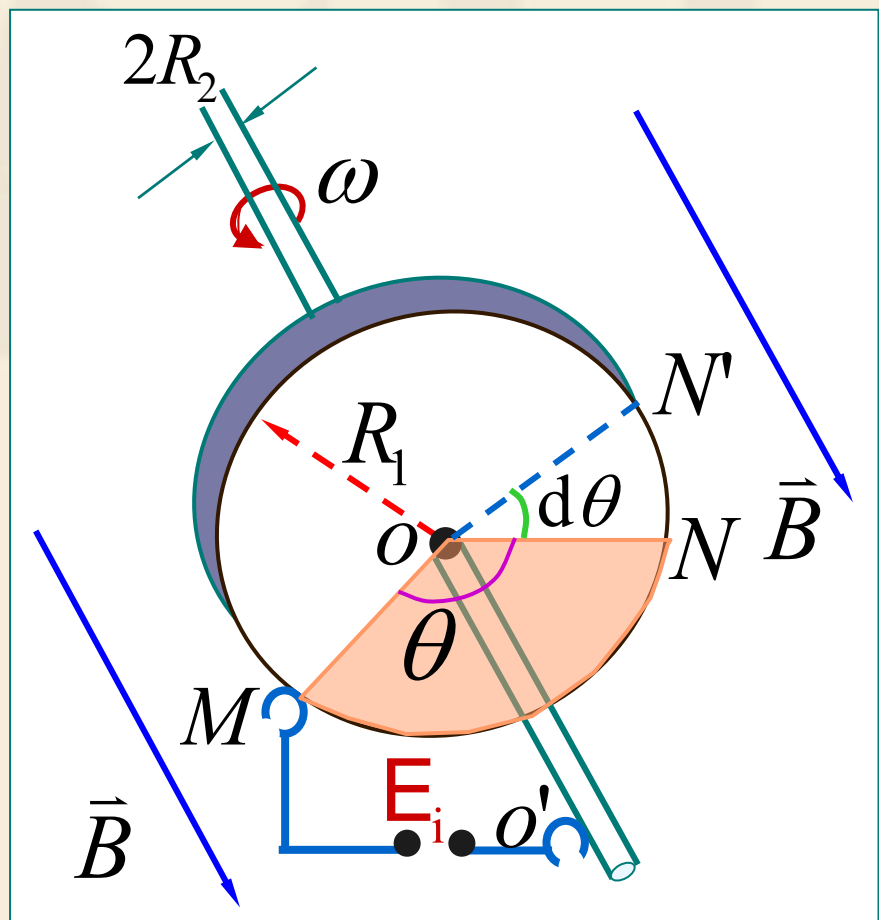
$R_2 = 2.0 \times 10^{-3}\text{m}$ ,  $\text{Total} = \text{A}$

求  $\mathbf{E}_i = ?$

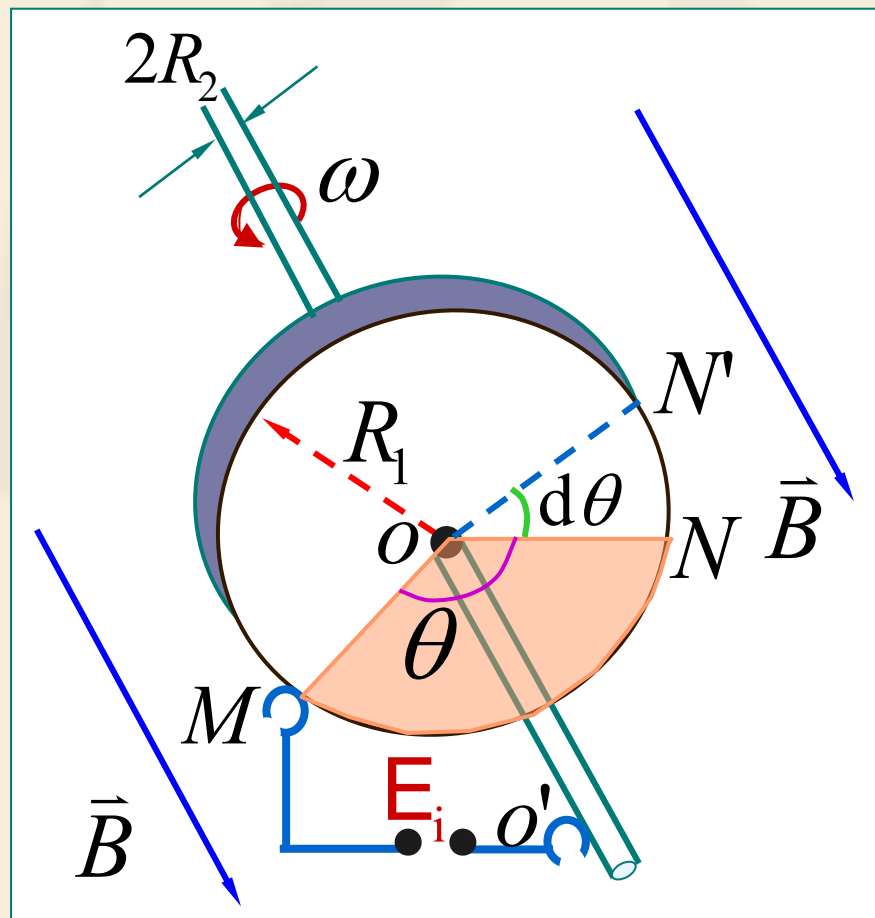
(方法二)

解 取一虚拟的闭和回路  $MNOM$  并去取其绕向与  $\vec{B}$  相同. 则

$$\begin{aligned}\Phi &= B \frac{\theta}{2\pi} \pi (R_1^2 - R_2^2) \\ &= \frac{1}{2} B (R_1^2 - R_2^2) \theta\end{aligned}$$



## 14-2 动生电动势



方向与回路  $MNOM$  绕向相反, 即盘缘的电势高于中心.

$$\Phi = \frac{1}{2} B(R_1^2 - R_2^2)\theta$$

设  $t=0$  时点  $M$  与点  $N$  重合即  $\theta = 0$   
则  $t$  时刻  $\theta = \omega t$

$$\Phi = \frac{1}{2} B(R_1^2 - R_2^2)\omega t$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

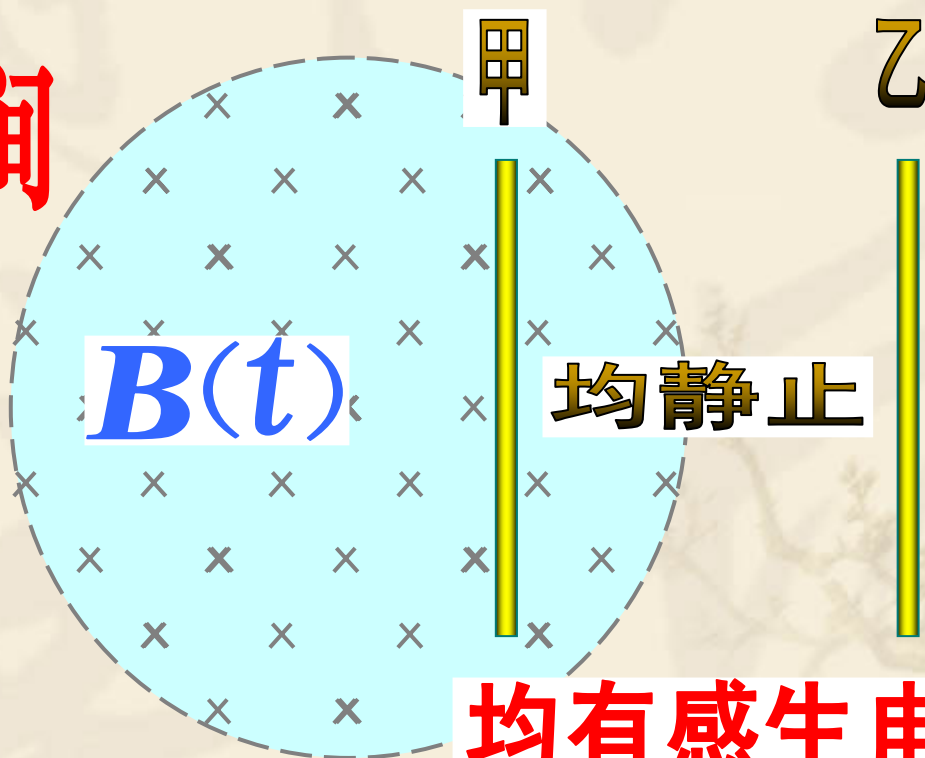
$$= - \frac{1}{2} B(R_1^2 - R_2^2)\omega$$

## 14-3 感生电动势 有旋电场

处于静止状态的导体或导体回路,由于磁场变化而产生的感应电动势称为感生电动势.

磁场随时间  
变化,即


$$\frac{dB}{dt} \neq 0$$



均有感生电动势



# 1 感生电动势

产生感生电动势的非静电场  感生电场

麦克斯韦尔假设 变化的磁场在其周围空间激发一种电场,这个电场叫感生电场  $\vec{E}_k$  .

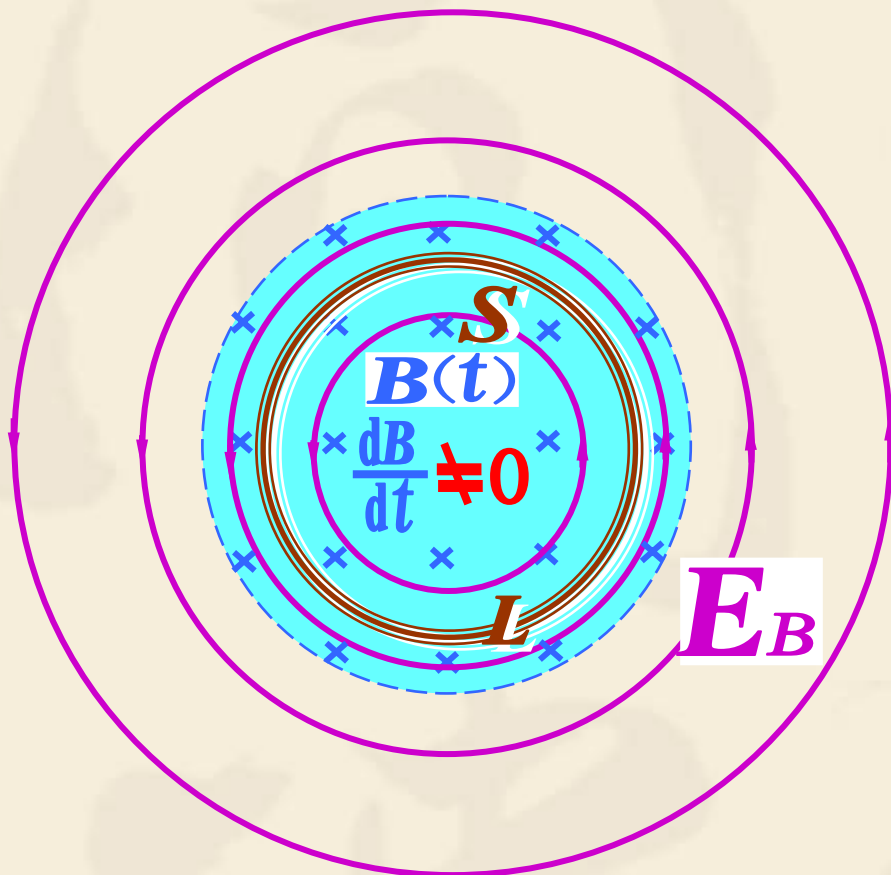
闭合回路中的感生电动势

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{s}$$

# 麦克斯韦的重要假设



$E_B$  称感生电场 或 涡旋电场

(本图以圆柱匀磁场分布,且  $\frac{dB}{dt} > 0$  为例)

随时间变化的磁场能在其周围激发起一种电场,它能对处于其中的带电粒子施以力的作用,这种电场称为感生电场.

$E_B$  是产生感生电动势的非静电力.

$E_B$  线是闭合曲线 不同于静电场  
 $E_B$  场是非保守场

设想磁场内有一回路  $L$  面积为  $S$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= \oint_L \vec{E}_B \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

这是计算感生电动势的普遍公式.

## 感生电场和静电场的对比

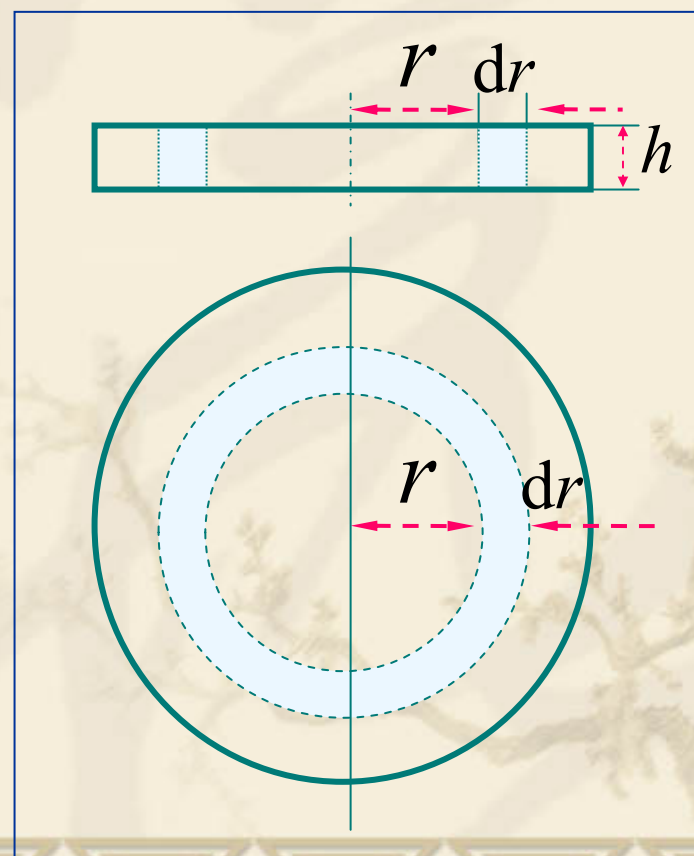
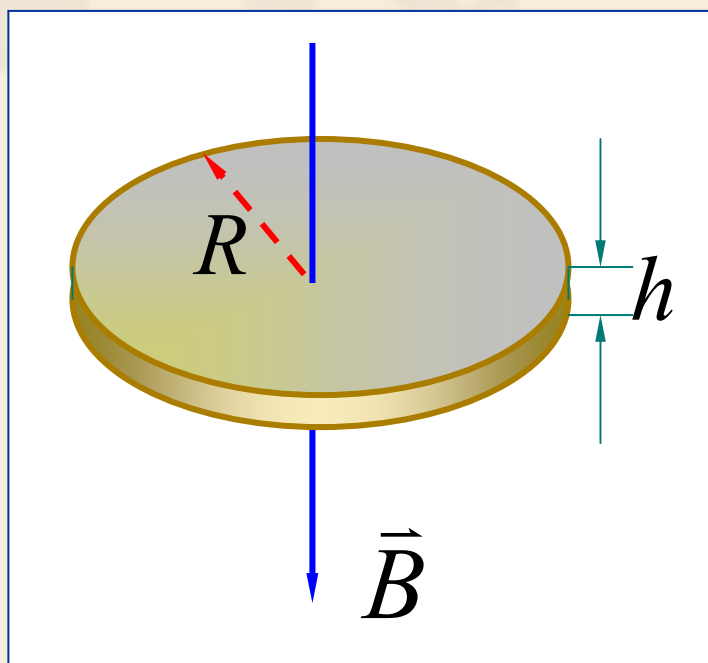
◆  $\vec{E}_{\text{静}}$  和  $\vec{E}_{\text{k}}$  均对电荷有力的作用.

◆ 静电场是保守场  $\oint_L \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{l} = 0$

◆ 感生电场是非保守场  $\oint_L \vec{E}_{\text{k}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$

◆ 静电场由电荷产生；感生电场是由变化的磁场产生.

**例 4** 设有一半径为  $R$ , 高度为  $h$  的铝圆盘, 其电导率为  $\gamma$ . 把圆盘放在磁感强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场中, 磁场方向垂直盘面. 设磁场随时间变化, 且  $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = k$  为一常量. 求盘内的感应电流值. (圆盘内感应电流自己的磁场略去不计)



已知  $R, h, \gamma, \vec{B}, \mathrm{d}B/\mathrm{d}t = k$

求  $I$

解 如图取一半径为  $r$ , 宽度为  $\mathrm{d}r$ , 高度为  $h$  的圆环.

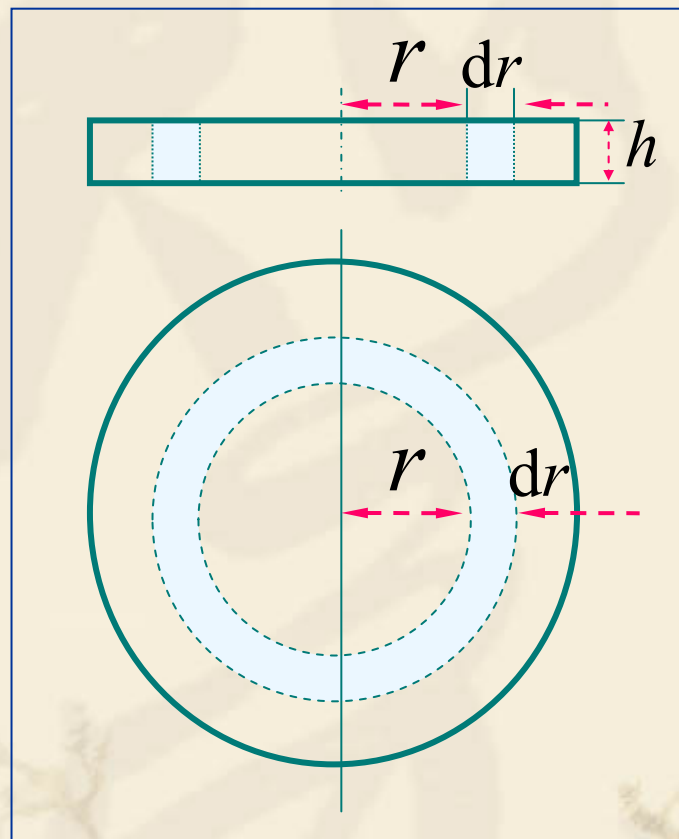
则圆环中的感生电动势的值为

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

代入已知条件得  $\mathcal{E}_i = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \int_S \mathrm{d}s = k \pi r^2$

$$\text{又 } \mathrm{d}R = \frac{1}{\gamma} \frac{2\pi r}{h \mathrm{d}r}$$

$$\text{所以 } \mathrm{d}I = \frac{kh\gamma}{2} r \mathrm{d}r$$



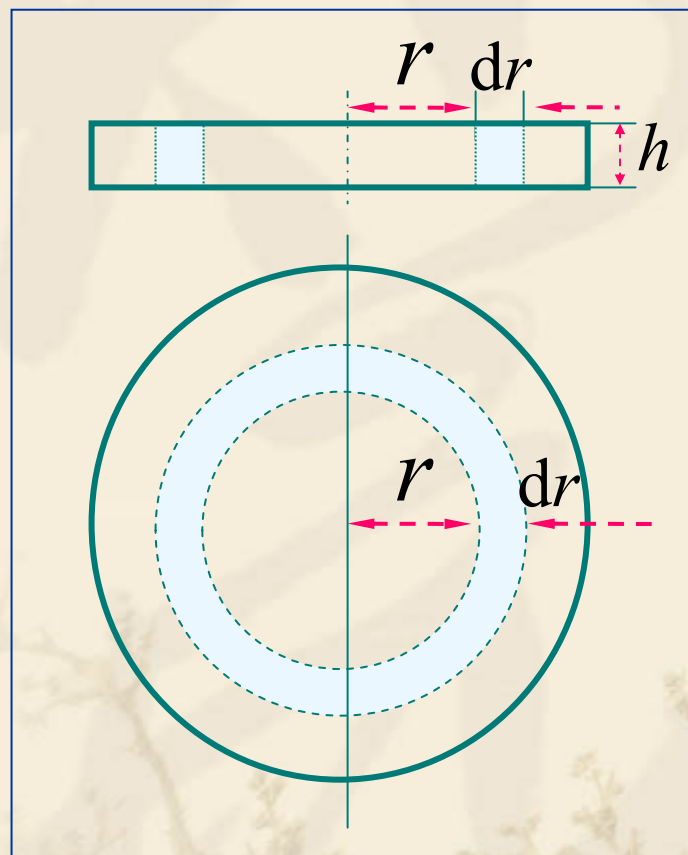


由计算得圆环中电流

$$dI = \frac{kh\gamma}{2} r dr$$

于是圆盘中的感应电流为

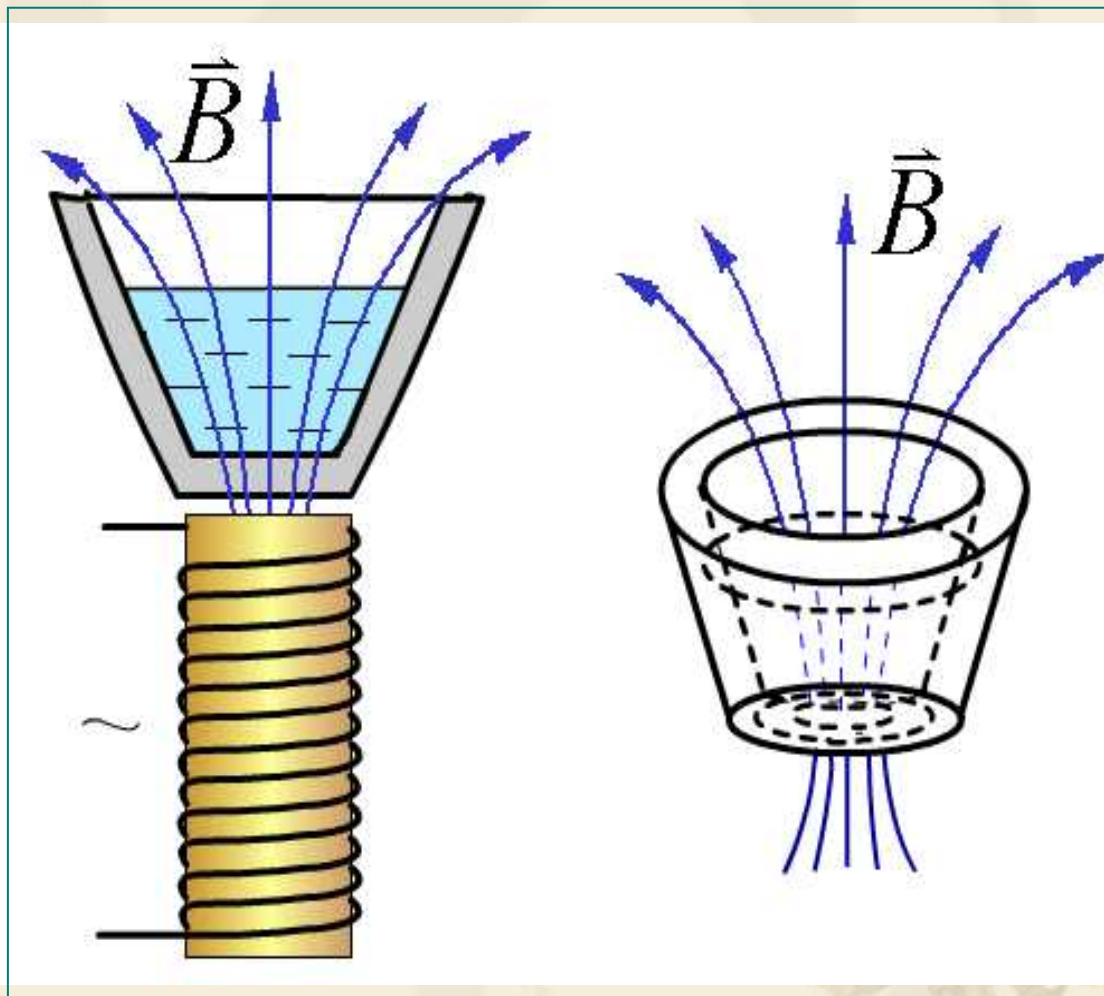
$$\begin{aligned} I &= \int dI = \frac{kh\gamma}{2} \int_0^R r dr \\ &= \frac{1}{4} k \gamma R^2 h \end{aligned}$$



## 涡电流影视

## 2 涡电流

感应电流不仅能在导电回路内出现，而且当**大块导体**与磁场有相对运动或处在变化的磁场中时，在这块导体中也会激起感应电流.这种在大块导体内流动的感应电流,叫做**涡电流**，简称涡流.



◆ 应用 热效应、电磁阻尼效应.

## 14-5 自感和互感

### 一 自感电动势 自感

穿过闭合电流回路的磁通量

$$\Phi = LI$$

#### 1) 自感

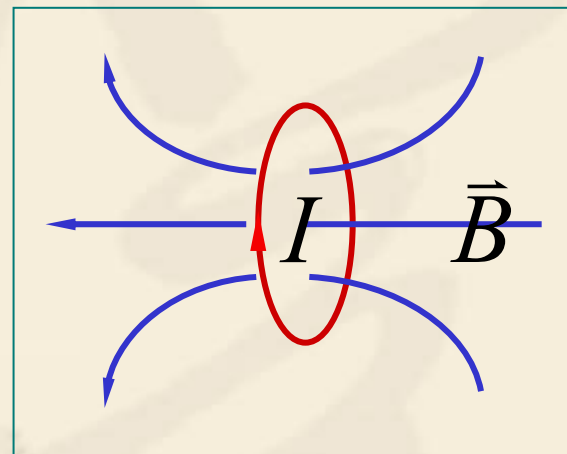
$$L = \Phi / I$$

若线圈有  $N$  匝,

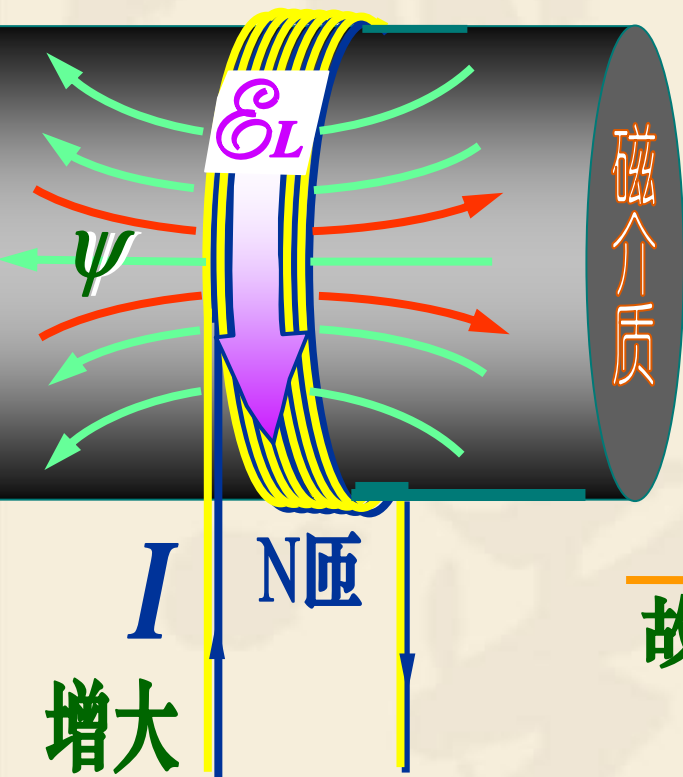
磁通匝数  $\psi = N\Phi$       自感  $L = \psi / I$

注意

无铁磁质时, 自感仅与线圈形状、磁介质及  $N$  有关.



磁链  $\psi = N\Phi$  { 与线圈结构因素有关(匝数,形状,大小,芯材性质等)  
与所通电流  $I$  的大小有关. }  $\psi = LI$   
比例系数



称 自感系数 或 自感  $L = \frac{\psi}{I}$  即一安培电流通过自身回路的磁链

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt} \quad \text{若回路 } L \text{ 不变 } \frac{dL}{dt} = 0$$

$$\text{自感电动势 } \mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt}$$

$\mathcal{E}_L$  大小  $\propto \frac{dI}{dt}$  且  $I$  增时  $\mathcal{E}_L$  与  $I$  反向;  $I$  减则同向.

故  $L$  又可定义为:

$$L = \frac{\mathcal{E}_L}{-dI/dt}$$

大小等于当电流变化为一单位时回路中产生的自感电动势.

$L$  的单位: 亨利(H)  $1H = 1Wb \cdot A^{-1} = 1V \cdot s \cdot A^{-1}$



2) 自感电动势  $\mathbf{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt}\right)$

当  $\frac{dL}{dt} = 0$  时,

$$\mathbf{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$$

自感

$$L = -\mathbf{E}_L / \frac{dI}{dt}$$

单位: 1 亨利 (H) = 1 韦伯 / 安培 (1 Wb / A)

$$1\text{mH} = 10^{-3} \text{ H}, \quad 1\mu\text{H} = 10^{-6} \text{ H}$$



## 3) 自感的计算方法

**例1** 如图的长直密绕螺线管, 已知  $l, S, N, \mu$ , 求其自感  $L$ . (忽略边缘效应)

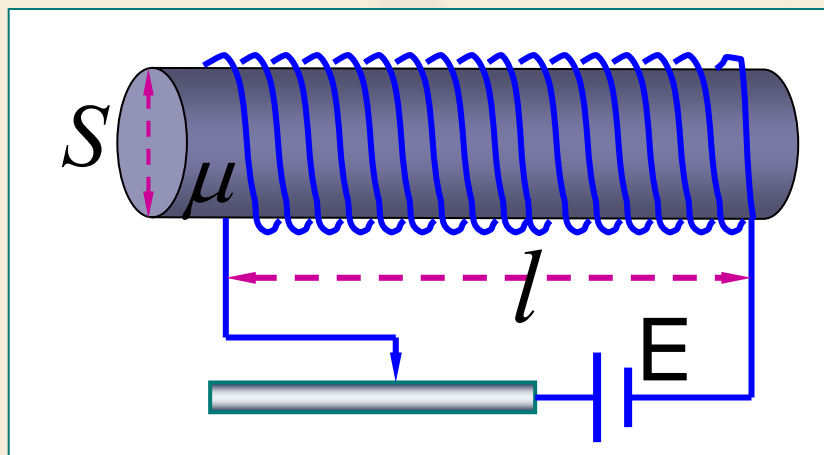
**解** 先设电流  $I \rightarrow$  根据安培环路定理求得  $H \rightarrow B$   
 $\rightarrow \Phi \rightarrow L$ .

$$n = N/l$$

$$B = \mu H = \mu n I$$

$$\psi = N \Phi = N B S$$

$$= N \mu \frac{N}{l} I S$$



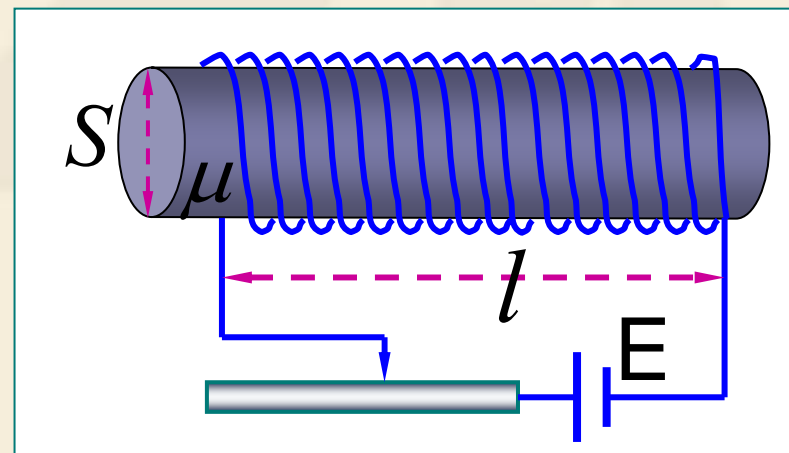
## 14-5 自感和互感

$$\psi = N\mu \frac{N}{l} IS$$

$$L = \frac{\psi}{I} = \mu \frac{N^2}{l} S$$

$$n = N/l \quad V = lS$$

$$\therefore L = \mu n^2 V$$



(一般情况可用下式  
测量自感)

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$$

4) 自感的应用 稳流, LC 谐振电路, 滤波电路, 感应圈等.

日光灯原理动画

## 14-5 自感和互感

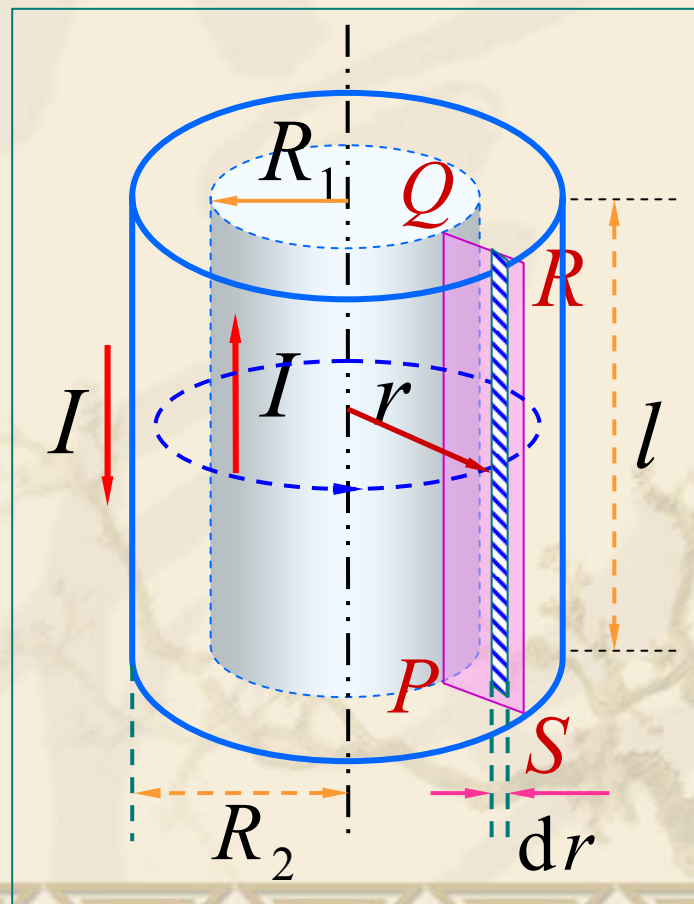
**例 2** 有两个同轴圆筒形导体，其半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，通过它们的电流均为  $I$ ，但电流的流向相反。设在两圆筒间充满磁导率为  $\mu$  的均匀磁介质，求其自感  $L$ 。

**解** 两圆筒之间  $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$

如图在两圆筒间取一长为  $l$  的面  $PQRS$ ，并将其分成许多小面元。

$$\text{则 } d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bl dr$$

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I}{2\pi r} l dr$$



## 14-5 自感和互感

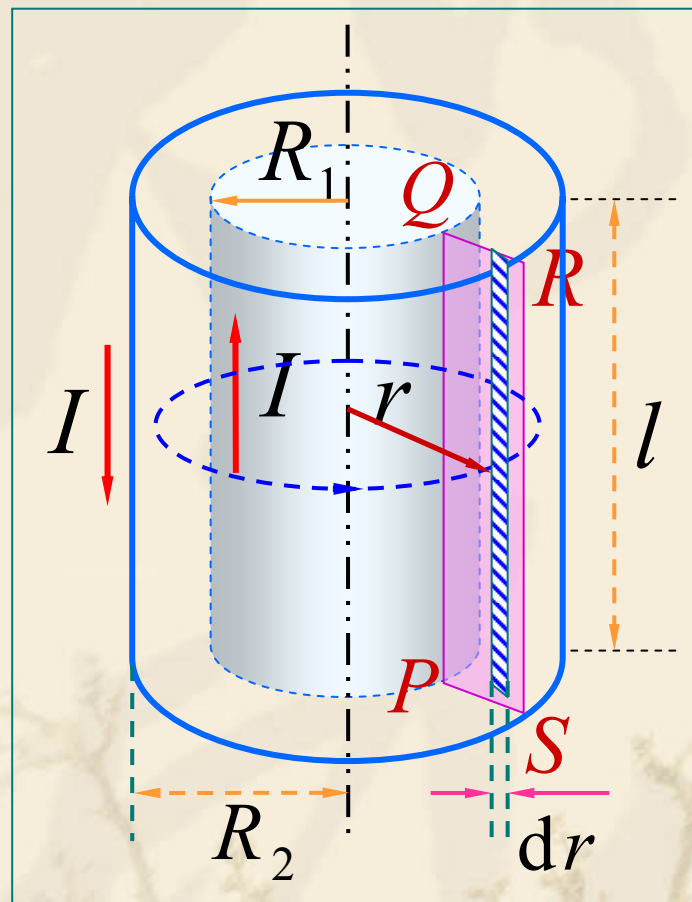
$$\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I}{2\pi r} l dr$$

即 
$$\Phi = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由自感定义可求出

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

单位长度的自感为 
$$\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

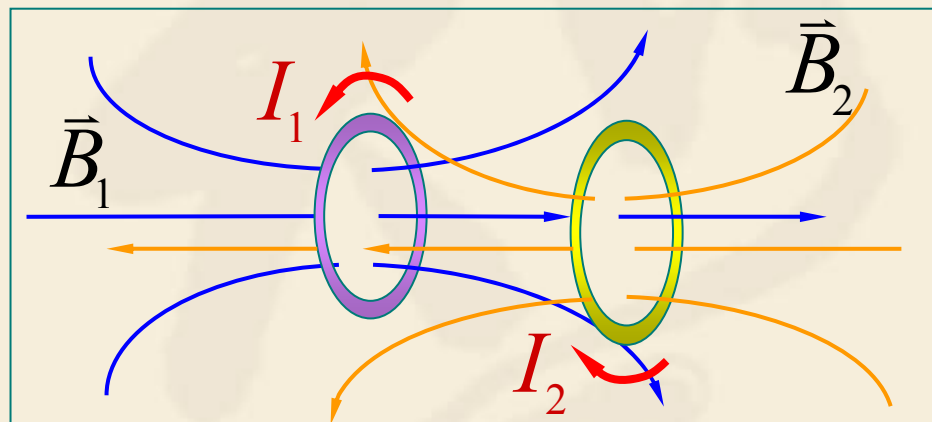


### 二 互感电动势 互感

$I_1$  在  $I_2$  电流回路中所产生的磁通量

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1$$

$I_2$  在  $I_1$  电流回路中所产生的磁通量  $\Phi_{12} = M_{12} I_2$



#### 1) 互感系数

(理论可证明)

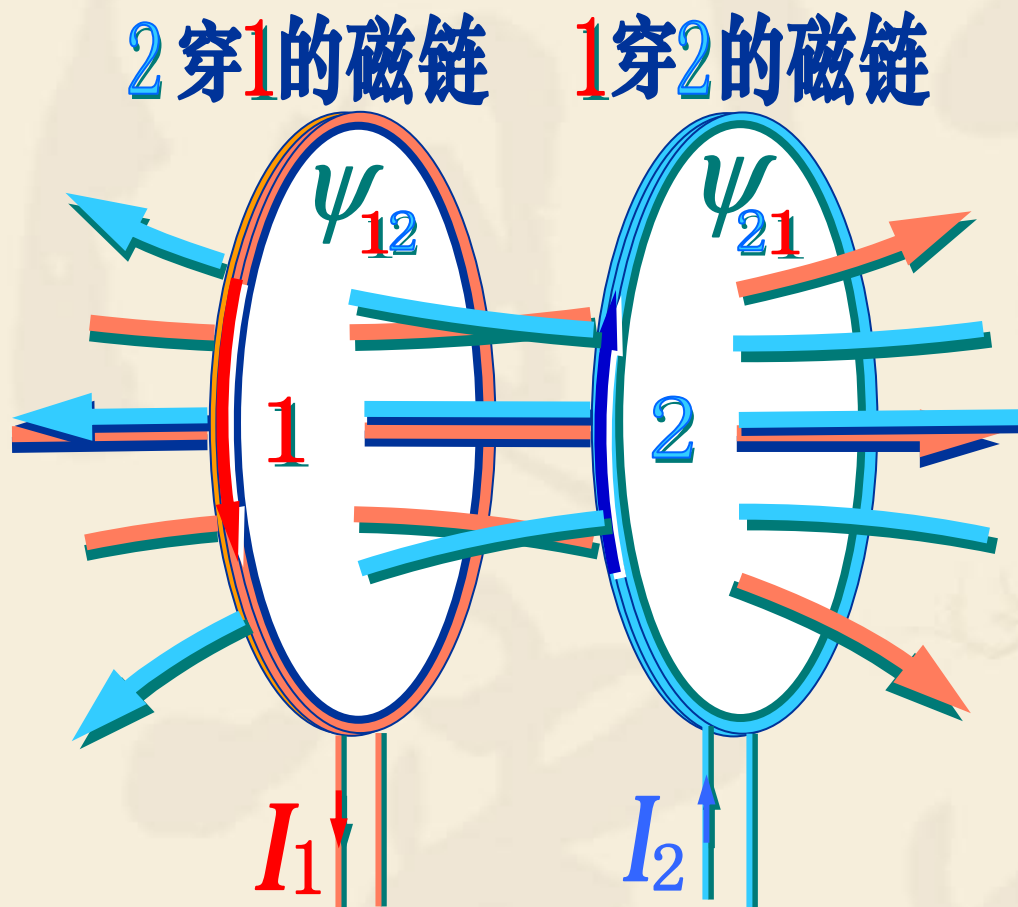
$$M_{12} = M_{21} = M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

注意

互感仅与两个线圈形状、大小、匝数、相对位置以及周围的磁介质有关 (无铁磁质时为常量)。



## 14-5 自感和互感



若两线圈结构、位置、介质条件不变。

$\psi_{21} = M_{21} I_1$  理论和实验证明  
 $\psi_{12} = M_{12} I_2$  两比例系数相等

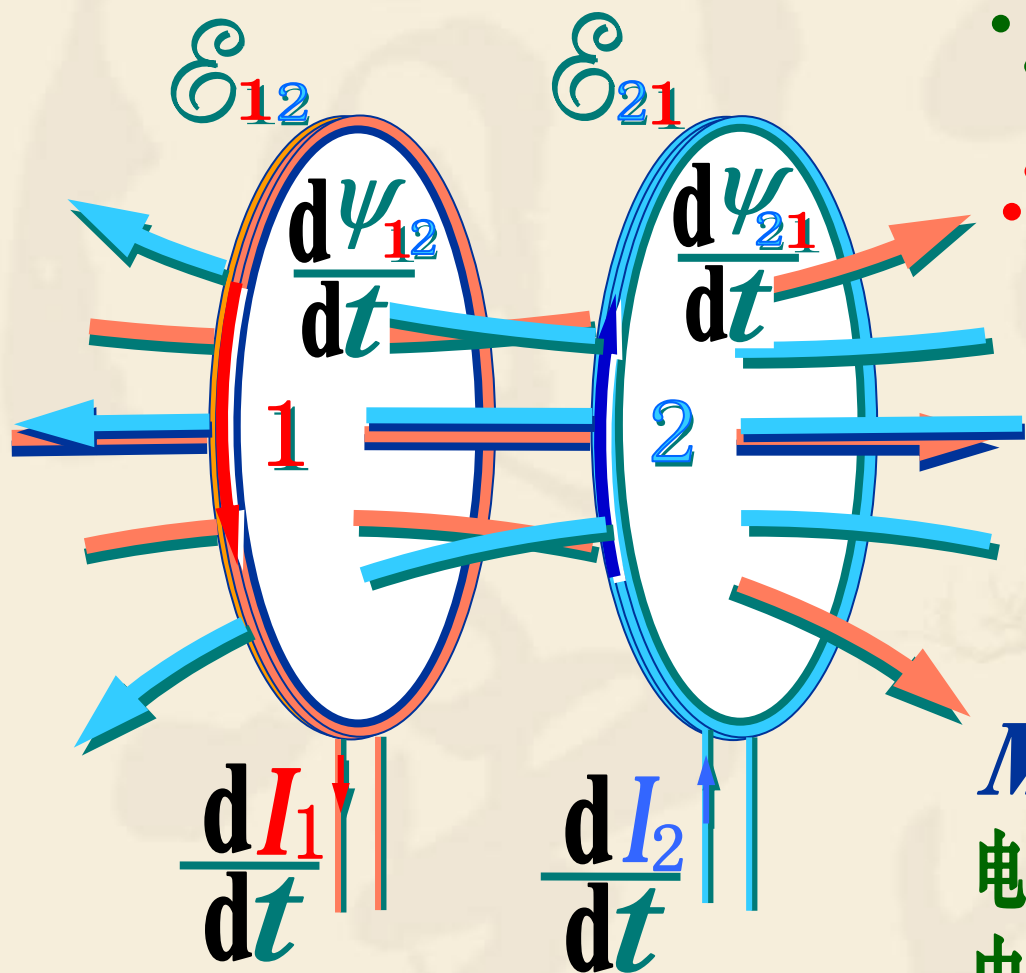
$$M_{12} = M_{21} = M$$

$M$  称 互感系数 或 互感

$$\psi_{21} = M I_1, \psi_{12} = M I_2$$

$$M = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\psi_{12}}{I_2}$$

$M$  在数值上等于其中任一  
线圈的电流为一个单位时  
通过另一线圈的磁链。



$$\therefore \psi_{21} = M I_1, \psi_{12} = M I_2$$

$$\therefore \mathcal{E}_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

$$M = -\frac{\mathcal{E}_{21}}{dI_1/dt} = -\frac{\mathcal{E}_{12}}{dI_2/dt}$$

$M$  在数值上等于其中任一线圈的电流变化为一个单位时在另一线圈中产生的互感电动势的大小。

互感  $M$  的单位也是 亨利 (H)

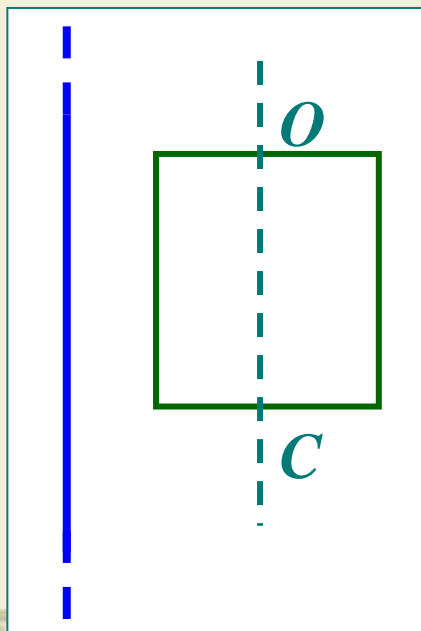
## 互感应用动画

## 2) 互感电动势

$$E_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

$$E_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

➤ 互感系数  $M = -\frac{E_{21}}{dI_1/dt} = -\frac{E_{12}}{dI_2/dt}$



问：下列几种情况互感是否变化？

- 1) 线框平行直导线移动；
- 2) 线框垂直于直导线移动；
- 3) 线框绕  $OC$  轴转动；
- 4) 直导线中电流变化。

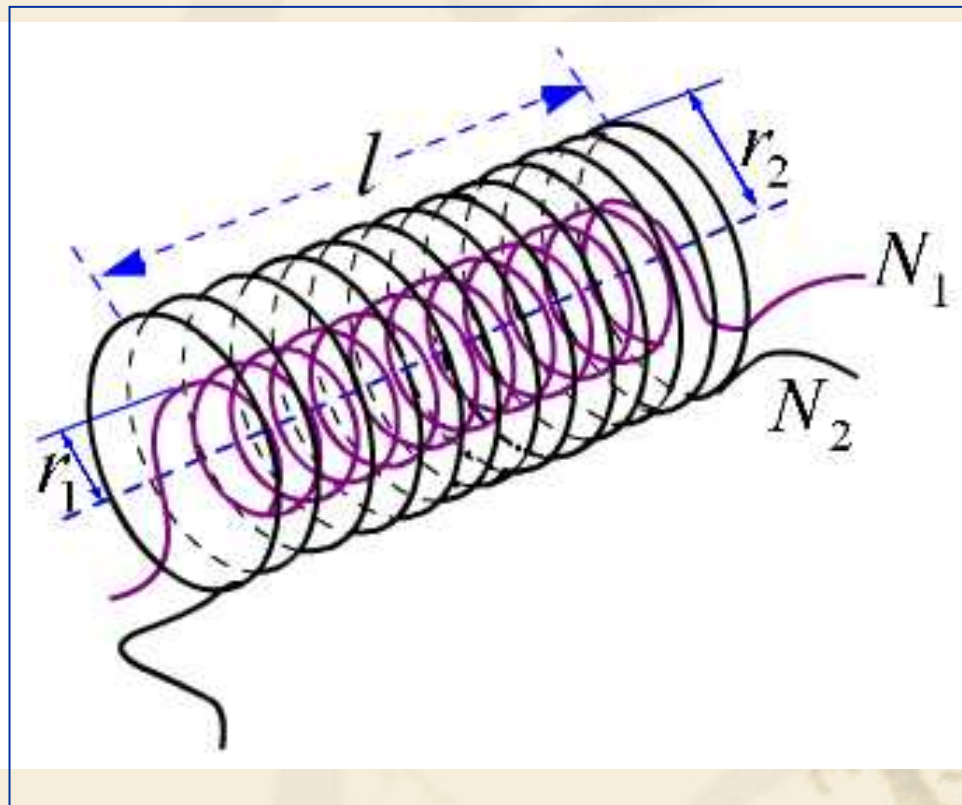
## 14-5 自感和互感

**例1** 两同轴长直密绕螺线管的互感 有两个长度均为 $l$ ,半径分别为 $r_1$ 和 $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ),匝数分别为 $N_1$ 和 $N_2$ 的同轴长直密绕螺线管.求它们的互感  $M$ .

**解** 先设某一线圈中通以电流  $I \rightarrow$  求出另一线圈的磁通量  $\Phi \rightarrow M$

设半径为  $r_1$  的线圈中通有电流  $I_1$ , 则

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 = \mu_0 n_1 I_1$$



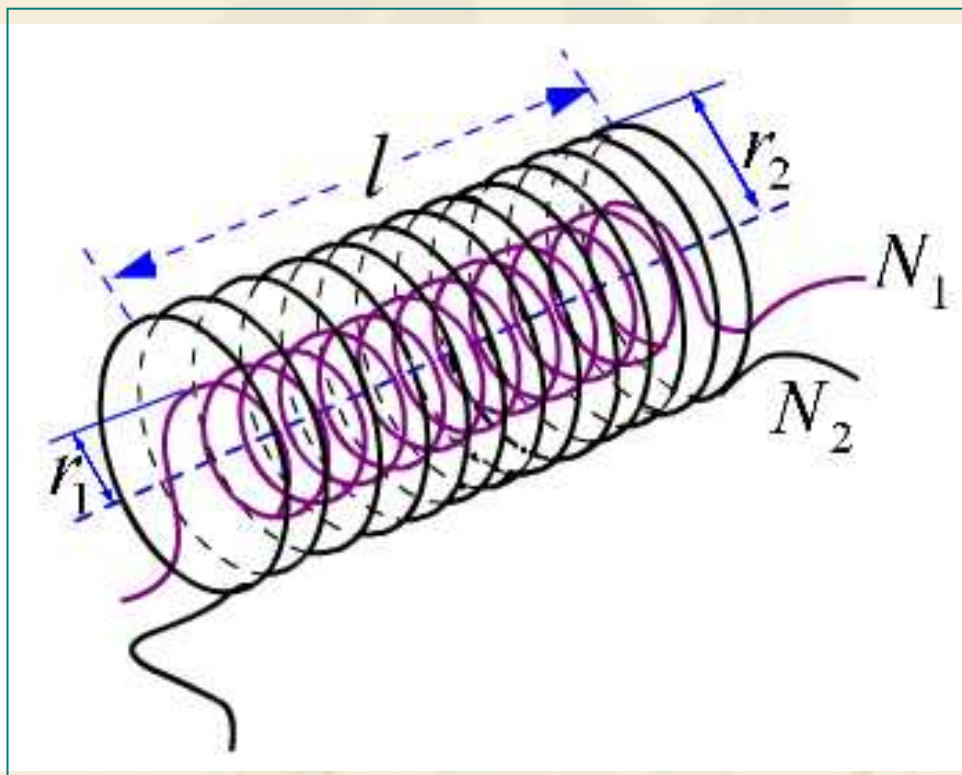


## 14-5 自感和互感

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 = \mu_0 n_1 I_1$$

则穿过半径为  $r_2$  的线圈的磁通匝数为

$$\begin{aligned}\psi &= N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 (\pi r_1^2) \\ &= n_2 l B_1 (\pi r_1^2)\end{aligned}$$



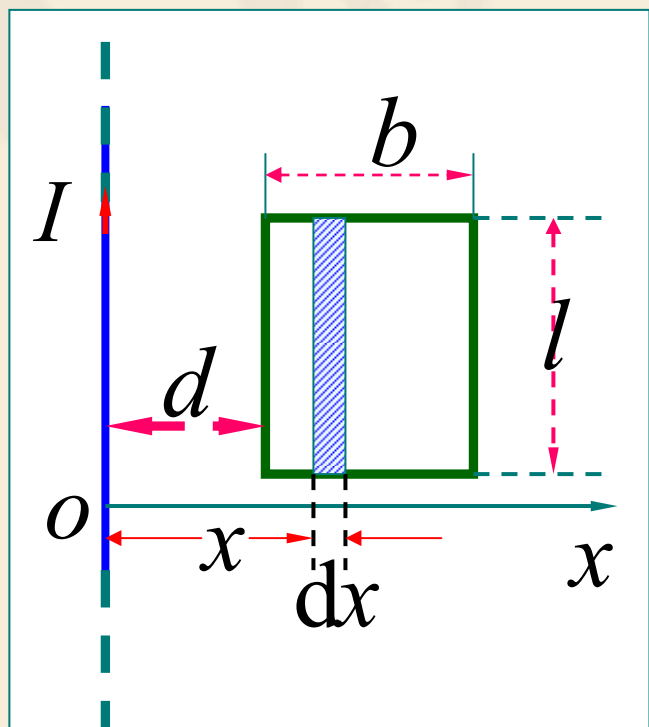
代入  $B_1$  计算得  $\psi = N_2 \Phi_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi r_1^2) I_1$

则 
$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi r_1^2)$$



**例 2** 在磁导率为  $\mu$  的均匀无限大的磁介质中，一无限长直导线与一宽长分别为  $b$  和  $l$  的矩形线圈共面，直导线与矩形线圈的一侧平行，且相距为  $d$ 。求二者的互感系数。

**解** 设长直导线通电流  $I$

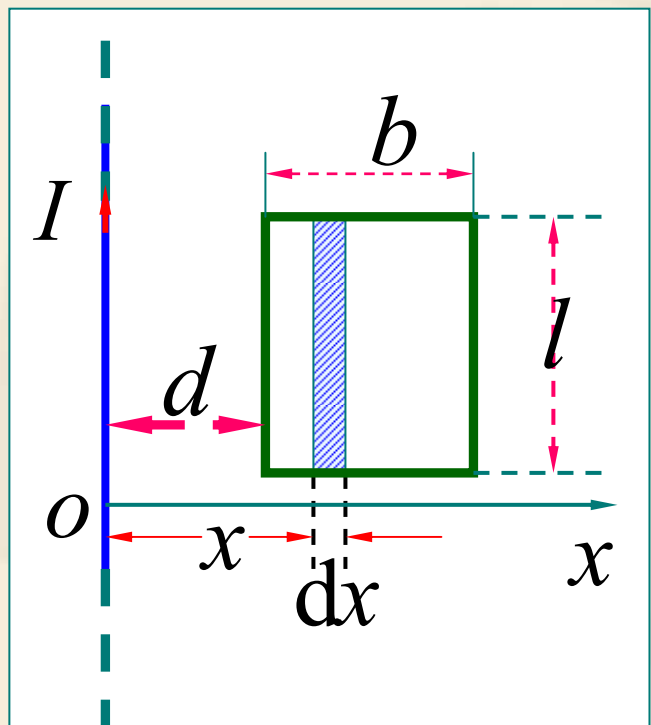


$$B = \frac{\mu I}{2\pi x}$$

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu I}{2\pi x} l dx$$

$$\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu I}{2\pi x} l dx$$

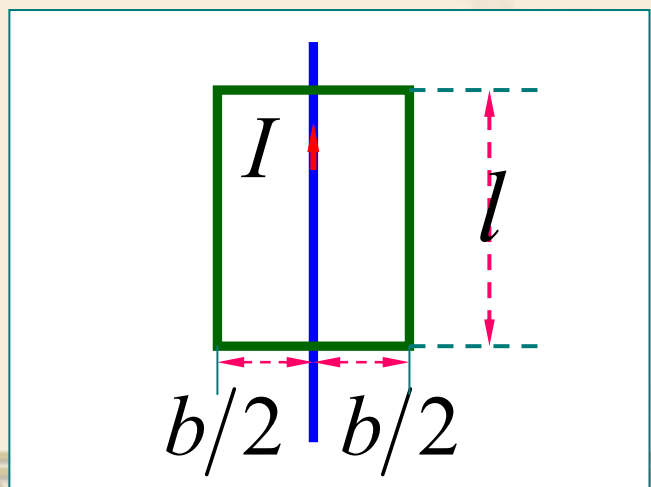
## 14-5 自感和互感



$$\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu I}{2\pi x} l dx$$

$$= \frac{\mu I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$$

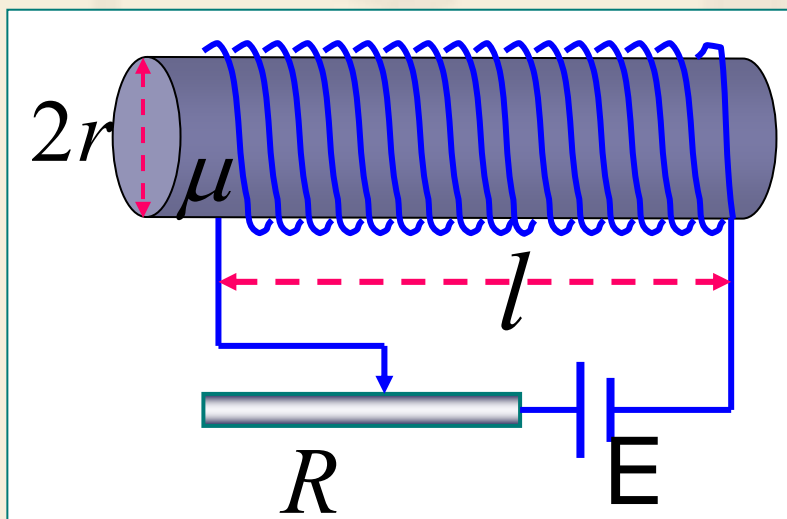


若导线如左图放置, 根据对称性可知  $\Phi = 0$

得

$$M = 0$$

## 14-5 自感和互感



自感线圈磁能

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = RI$$

$$\mathcal{E} I dt - LI dI = RI^2 dt$$

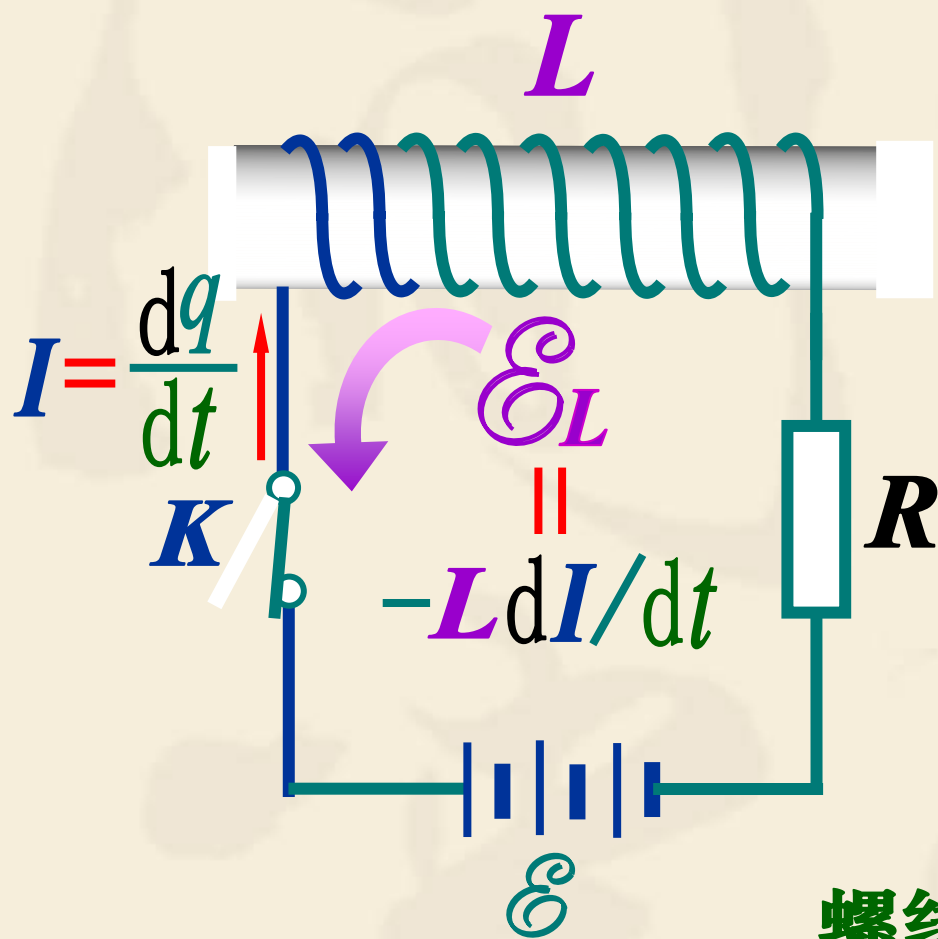
$$\int_0^t \mathcal{E} I dt = \frac{1}{2} LI^2 + \int_0^t RI^2 dt$$

电源  
做功

电源反  
抗自感  
电动势  
作的功

回路电  
阻所放  
出的焦  
耳热

## 14-7磁场的能量



$dt$  瞬间  $\mathcal{E}$  反抗  $\mathcal{E}_L$  作的元功

$$dA = -\mathcal{E}_L dq = -\mathcal{E}_L I dt \\ = LI dI$$

充磁毕,  $I$  达恒定  $I_0$ .

充磁过程  $\mathcal{E}$  反抗  $\mathcal{E}_L$  作的总功

$$A = \int dA = \int_0^{I_0} LI dI \\ = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad \text{转换为}$$

螺线管中的磁场能量  $W_m$

即

$$W_m = A = \frac{1}{2} LI_0^2$$

● 式  $W_m = A = \frac{1}{2} L I_0^2$  可用场量  $B, H$  表述:

长直螺线管  $L = \mu n^2 V$ ,  $B = \mu n I_0$

$$W_m = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left( \frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu} V$$

● 引入 磁能密度  $w_m = W_m/V$  概念, 可解算非均匀分布问题:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu} \xrightarrow{B=\mu H} \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH$$

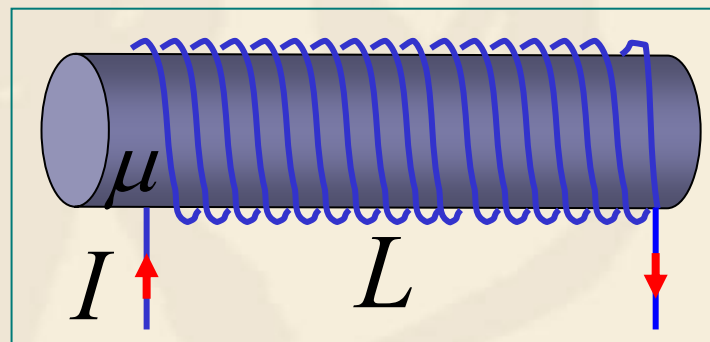
非均匀磁场中某体积元  $dV$  的磁能  $dW_m = w_m dV$

体积  $V$  内的磁能  $W_m = \int dW_m = \int_V w_m dV$



## ◆ 自感线圈磁能

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$



$$L = \mu n^2 V, \quad B = \mu n I$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left( \frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V = w_m V$$

## ◆ 磁场能量密度

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH$$

## ◆ 磁场能量

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu} dV$$

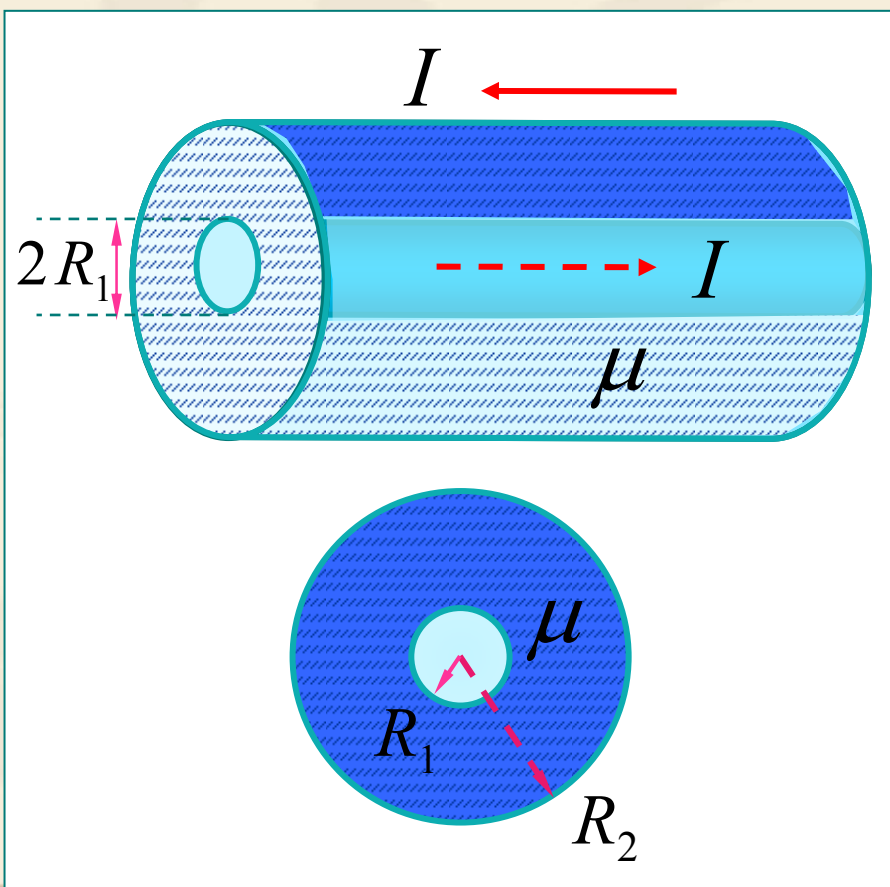
**例** 如图同轴电缆,中间充以磁介质,芯线与圆筒上的电流大小相等、方向相反. 已知  $R_1, R_2, I, \mu$ , **求** 单位长度同轴电缆的磁能和自感. 设金属芯线内的磁场可略.

**解** 由安培环路定律可求  $H$

$$\left\{ \begin{array}{ll} r < R_1, & H = 0 \\ R_1 < r < R_2, & H = \frac{I}{2\pi r} \\ r > R_2, & H = 0 \end{array} \right.$$

则  $R_1 < r < R_2$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{I}{2\pi r} \right)^2$$



$$R_1 < r < R_2 \quad w_m = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{I}{2\pi r} \right)^2 = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} dV$$

单位长度壳层体积

$$dV = 2\pi r dr \cdot 1$$

$$W_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I^2}{4\pi r} dr = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

