第1节小结

1. 将一组基正交规范化的方法:

　　先用施密特正交化方法将基正交化，然后再将其单位化.

2. A为正交矩阵的充要条件是下列条件之一成立:

　(1) $A^{-1}=A^T$;

　(2) $AA^T=E$;

　(3) A的列向量是两两正交的单位向量;

　(4) A的行向量是两两正交的单位向量.

第 二 节

特征值与特征向量

一、特征值与特征向量的概念

定义1 设A是n阶矩阵，如果数λ和n维非零列向量x使关系式

$$Ax = \lambda x$$

成立，那末，这样的数λ称为方阵A的特征值，非零向量x称为A的对应于特征值λ的特征向量.

说明 1. 特征向量$x \neq 0$，特征值问题是对方阵而 言的.

2. n阶方阵A的特征值，就是使齐次线性方程组$(\lambda E - A)x = 0$有非零解的λ值，即满足方程$|\lambda E - A| = 0$的λ都是矩阵A的特征值.

3. $|\lambda E - A| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

称以λ为未知数的一元 n次方程 $|\lambda E - A| = 0$ 为A的特征方程．

记 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$，它是$\lambda$的$n$次多项式，称其为方阵$A$的特征多项式．

4. 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则有

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

例1 求$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$的特征值和特征向量 .

解 A的特征多项式为

$$\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2-1$$

$$=\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-4)(\lambda-2)$$

所以A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=4.$

当$\lambda_1=2$时,对应的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix}2-3 & 1\\ 1 & 2-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

解得$x_1 = x_2$，所以对应的特征向量可 取为 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

所以对应于 $\lambda_1 = 2$的全部特征向量为 $k_1 p_1 (k_1 \neq 0)$.

当$\lambda_2 = 4$时，由

$$\begin{pmatrix} 4-3 & 1 \\ 1 & 4-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{即} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得$x_1 = -x_2$，所以对应的特征向量可 取为 $p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

所以对应于 $\lambda_2 = 4$的全部特征向量为 $k_2 p_2 (k_2 \neq 0)$.

例2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)^2,$$

所以A的特征值为$\lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=1.$

当$\lambda_1=2$时,解方程$(2E-A)x=0$.由

$$2E-A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\4&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $$p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以对应于 $\lambda_1=2$的全部特征向量为 $k_1p_1(k_1\neq 0)$.

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时,解方程$(E-A)x=0$.由

$$E-A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $$p_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

所以对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量为$k_2p_2(k_2\neq 0)$.

例3 设 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$,求A的特征值与特征向量.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 4 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}$

$=(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$

令 $(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$

得A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2.$

当$\lambda_1=-1$时,解方程$(-E-A)x=0$.由

$$-E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-3&0\\4&-1&-4\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$

故对应于$\lambda_1=-1$的全体特征向量为

$$k_1\,p_1 \qquad (k_1\neq 0).$$

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，解方程$(2E-A)x=0$.由

$$2E-A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系为:

$$p_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\qquad p_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 4\end{pmatrix},$$

所以对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量为：

$$k_2p_2+k_3p_3\quad(k_2,k_3\text{不同时为 }0).$$

例4 证明：若 λ 是矩阵 A 的特征值，x 是 A 的属于 λ 的特征向量，则

(1) λ^m 是 A^m 的特征值（m 是任意正整数）.

(2) 当 A 可逆时，λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值.

证明 (1) $\because Ax=\lambda x$

$$\therefore A(Ax)=A(\lambda x)=\lambda(Ax)=\lambda(\lambda x)\Rightarrow A^2x=\lambda^2x$$

再继续施行上述步骤 $m-2$ 次，就得 $A^m x=\lambda^m x$

故 λ^m 是矩阵 A^m 的特征值，且 x 是 A^m 对应于 λ^m 的特征向量.

(2)当A可逆时，$\lambda \neq 0$，

由$Ax = \lambda x$可得

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}(\lambda x) = \lambda A^{-1}x$$

$$\Rightarrow A^{-1}x = \lambda^{-1}x$$

故λ^{-1}是矩阵A^{-1}的特征值，且x是A^{-1}对应于λ^{-1}的特征向量.

例5 设 $\lambda(\neq 0)$ 是n阶方阵A的特征值，则伴随矩阵 A^* 具有特征值 $\underline{\ |A|/\lambda\ \ \ }$

因为 $A\alpha = \lambda\alpha \quad (\alpha \neq 0) \Rightarrow A^* A\alpha = A^*\lambda\alpha = |A|E\alpha$

$$A^*\alpha = (|A|/\lambda)\alpha$$

例6 合同矩阵 $(A^2 = E)$ 的特征值为 $\underline{\ \ \pm 1\ \ }$

因为 $A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow A^2\alpha = E\alpha = \lambda^2\alpha \Rightarrow \lambda^2 = 1$

$\alpha \neq 0$

例7 幂等矩阵 $(A^2 = A)$ 的特征值只能是<u>**0或1**</u>

因为 $A\alpha = \lambda\alpha \quad (\alpha \neq 0) \Rightarrow$

$$A^2\alpha = A\alpha \Rightarrow \lambda^2\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \lambda^2 = \lambda$$

二、特征值和特征向量的性质

定理1 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是方阵$A$的$m$个特征值，$p_1,p_2,\cdots,p_m$依次是与之对应的特征向量.如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$各不相等，则$p_1,p_2,\cdots,p_m$线性无关.

证明 设有常数$x_1,x_2,\cdots,x_m$使

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_mp_m=0.$$

则 $A(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_mp_m)=0$，即

$$\lambda_1x_1p_1+\lambda_2x_2p_2+\cdots+\lambda_mx_mp_m=0,$$

类推之，有 $\lambda_1^kx_1p_1+\lambda_2^kx_2p_2+\cdots+\lambda_m^kx_mp_m=0.$

$$(k=1,2,\cdots,m-1)$$

把上列各式合写成矩阵形式，得

$$(x_1 p_1, x_2 p_2, \cdots, x_m p_m)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (0,0,\cdots,0)$$

上式等号左端第二个矩阵的行列式为范德蒙行列式,当各λ_i不相等时,该行列式不等于0,从而该矩阵可逆.于是有$(x_1 p_1, x_2 p_2, \cdots, x_m p_m) = (0,0,\cdots,0)$,

即$x_j p_j = 0 \ (j=1,2,\cdots,m)$.但 $p_j \neq 0$, 故 $x_j = 0 \ (j=1,2,\cdots,m)$.

所以向量组 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 线性无关.

注意

1．属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

2．属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是属于这个特征值的特征向量.

3．矩阵的特征向量总是相对于矩阵的特征值而言的，一个特征值具有的特征向量不唯一；一个特征向量不能属于不同的特征值.

（*因为不同特征值对应的特征向量线性无关*）

例8 设3阶方阵A具有3个不同的特征值

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ，对应特征向量分别为 ξ_1,ξ_2,ξ_3 ，求A

解: 因 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相同，所以，ξ_1,ξ_2,ξ_3

线性无关。从而 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 是可逆矩阵。

由分块矩阵算法知

$$A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$$

即 $$AP=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$$

所以

$$A = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}P^{-1}$$

称A与对角矩阵$diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$相似。

例9 设A是 n 阶方阵，其特征多项式为

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

求 A^T 的特征多项式.

解

$$\begin{aligned} f_{A^T}(\lambda)&=|\lambda E-A^T| \\ &=|(\lambda E-A)^T| \\ &=|\lambda E-A| \\ &=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0 \end{aligned}$$

四、小结

求矩阵特征值与特征向量的步骤:

1. 计算A的特征多项式 $\det(\lambda E - A)$;

2. 求特征方程 $\det(\lambda E - A) = 0$的全部根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,就是$A$的全部特征值;

3. 对于特征值λ_i,求齐次方程组

$$(\lambda_i E - A)x = 0$$

的非零解,就是对应于λ_i的特征向量.

思考题

设4阶方阵A满足条件:$\det(3E+A)=0$,

$AA^T=2E$,$\det A<0$,求A^*的一个特征值.

思考题解答

解 因为 $\det A < 0$，故 A 可逆.由 $\det(3E + A) = 0$ 知 -3 是 A 的一个特征值，从而 $-\frac{1}{3}$ 是 A^{-1} 的一个特征值.又由 $AA^T = 2E$ 得 $\det(AA^T) = \det(2E) = 16$，即 $(\det A)^2 = 16$，于是 $\det A = \pm 4$，但 $\det A < 0$，因此 $\det A = -4$，故 A^* 有一个特征值为 $\frac{4}{3}$.

例3 计算3阶实矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$的全部特征值和特征向量.

解 第一步 计算A的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-4\\-2&\lambda&-2\\-4&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-8)(\lambda+1)^2.$$

第二步　求出特征多项式$f(\lambda)$的全部根,即A的全部特征值.

令$f(\lambda)=0$,解之得$\lambda_1=8,\lambda_2=\lambda_3=-1$,为$A$的全部特征值.

第三步　求出A的全部特征向量

对$\lambda_1=8$,求相应线性方程组$(\lambda_1 E-A)x=0$的一个基础解系.

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$$

化简求得此方程组的一个基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

属于$\lambda_1 = 8$的全部特征向量为$k_1\alpha_1(k_1 \neq 0$为实数).

同理对 $\lambda_2=\lambda_3=-1$，求相应线性方程组 $(\lambda_2 E-A)x=0$ 的一个基础解系：

$$\begin{cases} -4x_1-2x_2-4x_3=0, \\ -2x_1-x_2-2x_3=0, \\ -4x_1-2x_2-4x_3=0, \end{cases}$$

求解得此方程组的一个基础解系：

$$\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

于是A的属于$\lambda_2=\lambda_3=-1$的全部特征向量为

$$k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,$$

k_2,k_3是不全为零的实数.

从而A的全部特征向量为$k_1\alpha_1;k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$,这里$k_1\neq 0$为实数,$k_2,k_3$是不全为零的实数.

求下列矩阵的特征值和特征向量:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ； (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ ；

(3) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, (a_1 \neq 0)$

并问它们的特征向量是否两两正交?