第3节小结

1. 矩阵秩的概念

2. 求矩阵秩的方法

利用定义

(即寻找矩阵中非零子式的最高阶数);

3. 矩阵的秩与向量组的秩的关系:

矩阵的秩 = 矩阵列向量组的秩

= 矩阵行向量组的秩 = 矩阵的秩。

第 四 节

初等方阵

向量空间

一、矩阵的初等变换

定义1 下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

(1) 对调两行（对调 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）;

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素 ;

（第 i 行乘 k, 记作 $r_i \times k$）

(3) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去（第 j 行的 k 倍加到第 i 行上记作 $r_i + kr_j$).

同理可定义矩阵的初等列变换(所用记号是把“r”换成“c”).

定义2　矩阵的初等列变换与初等行变换统称为初等变换.

初等变换的逆变换仍为初等变换, 且变换类型相同.

$r_i \leftrightarrow r_j$　逆变换　$r_i \leftrightarrow r_j$;

$r_i \times k$　逆变换　$r_i \times (\frac{1}{k})$ 或 $r_i \div k$;

$r_i + kr_j$　逆变换　$r_i + (-k)r_j$ 或 $r_i - kr_j$.

如果矩阵 A 经有限次初等变换变成 矩阵 B，就称矩阵 A 与 B 等价，记作 $A \simeq B$.

等价关系的性质：

(1) 反身性 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}$;

(2) 对称性 若 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$,则 $\mathbf{B} \simeq \mathbf{A}$;

(3) 传递性 若 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}, \mathbf{B} \simeq \mathbf{C}$,则 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{C}$.

具有上述三条性质的关系称为等价.

例如，两个线性方程组同解，

就称这两个线性方程组等价

行阶梯形矩阵

特点：

（1）可划出一条阶梯线，线的下方全为零；

（2）每个台阶只有一行，

$$\begin{array}{ccccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & & \varepsilon_3 & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线后面的第一个元素为非零元，即非零行的第一个非零元.

行阶梯形矩阵 B_5 还称为行最简形矩阵，即非零行的第一个非零元为 1，且这些非零元所在的列的其他元素都为零．

对于任何矩阵 $A_{m\times n}$，总可经过有限次初等行变换把他变为行阶梯形和行最简形．

行最简形矩阵再经过初等列变换，可化成标准形．

例如，$B_5=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\underset{c_5-4c_1-3c_2+3c_3}{\overset{\substack{c_3\leftrightarrow c_4 \\ c_4+c_1+c_2}}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=F$$

矩阵 F 称为矩阵 B 的标准形．

特点：F的左上角是一个单位矩阵，其余元素全为零.

$m\times n$矩阵A总可经过初等变换化为标准形

$$F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

此标准形由m,n,r三个数唯一确定，其中r就是行阶梯形矩阵中非零行的行数.

所有与矩阵A等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类，标准形F是这个等价类中最简单的矩阵.

二、初等矩阵的概念

矩阵的初等变换是矩阵的一种基本运算，应用广泛.

定义　由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等方阵.

$$\begin{cases} \text{1. 对调两行或两列;} \\ \text{2. 以数 } k \neq 0 \text{ 乘某行或某列;} \\ \text{3. 以数 } k \text{ 乘某行（列）加到另一行（列）上去.} \end{cases}$$

1、对调两行或两列

对调 E 中第 i, j 两行，即 $(r_i \leftrightarrow r_j)$，得初等方阵

$$E(i,j)=\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 & & \cdots & & 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots && \\ &&&&&& 1 &&& \\ &&& 1 && \cdots && 0 && \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow 第\, i\, 行 \\ \\ \\ \\ \leftarrow 第\, j\, 行 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

用 m 阶初等矩阵 $E_m(i,j)$ 左乘 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$E_m(i,j)A=\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第\, i\, 行 \\ \\ \leftarrow 第\, j\, 行 \\ \\ \\ \end{array}$$

相当于对矩阵 A 施行第一种初等行变换：

把 A 的第 i 行与第 j 行对调 $(r_i \leftrightarrow r_j)$.

类似地，

以 n 阶初等矩阵 $E_n(i,j)$ 右乘矩阵 A，

$$AE_n(i,j)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

相当于对矩阵 A 施行第一种初等列变换：

把 A 的第 i 列与第 j 列对调 $(c_i \leftrightarrow c_j)$.

2、以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列

以数$k \neq 0$乘单位矩阵的第i行$(r_i \times k)$，得初等矩阵$E(i(k))$.

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第} i \text{行}$$

以 $E_m(i(k))$ 左乘矩阵 A，

$$E_m(i(k))A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

相当于以数 k 乘 A 的第 i 行 $(r_i \times k)$;

类似地，以 $E_n(i(k))$ 右乘矩阵 A，其结果

相当于以数 k 乘 A 的第 i 列 $(c_i \times k)$.

3、以数$k\neq 0$乘某行(列)加到另一行(列)上去

以k乘E的第j行加到第i行上(r_i+kr_j)

[或以k乘E的第i列加到第j列上(c_j+kc_i),

$$E(i+j(k))=\begin{array}{@{}c@{}l}\left(\begin{matrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{matrix}\right) & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

以 $E_m(i+j(k))$ 左乘矩阵 A，

$$E_m(i+j(k))A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

把 A 的第 j 行乘 k 加到第 i 行上 (r_i+kr_j).

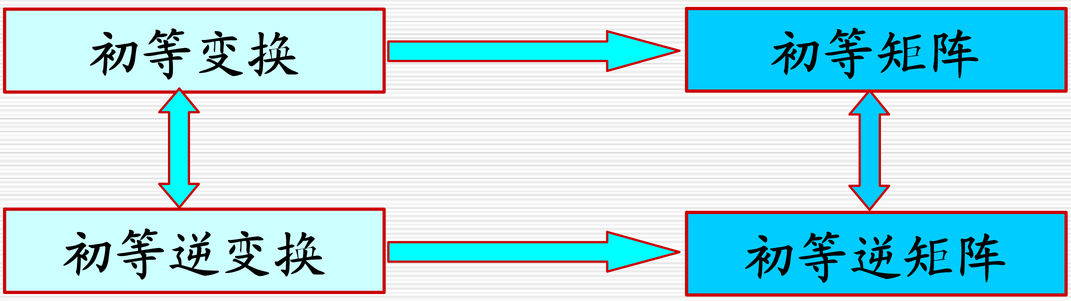
类似地，以 $E_n(i+j(k))$ 右乘矩阵 A，其结果相当于把 A 的第 i 列乘 k 加到第 j 列上 (c_j+kc_i).

$$AE_n(i+j(k))$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi}+ka_{mj} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

三、利用初等变换求矩阵的逆矩阵

定理1 设A是一个$m\times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘以相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘以相应的n阶初等矩阵.



变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换是其本身，

则 $E(i,j)^{-1} = E(i,j)$；

变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \dfrac{1}{k}$，

则 $E(i(k))^{-1} = E(i(\dfrac{1}{k}))$；

变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$，

则 $E(i+j(k))^{-1} = E(i+j(-k))$.

定理2 设A为可逆方阵，则存在有限个初等方阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$,使$A=P_1P_2\cdots P_l$.

证 $\because A\simeq E$, 故 E 经有限次初等变换可变 A,

即存在有限个初等方阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$, 使

$$P_1P_2\cdots P_rEP_{r+1}\cdots P_l=A$$

即

$$A=P_1P_2\cdots P_l.$$

推论 $m\times n$ 矩阵 $A\simeq B$ 的充分必要条件是：存在 m 阶可逆方阵 P 及 n 阶可逆方阵 Q,使 $PAQ=B$.

利用初等变换求逆阵的方法:

当$|A|\neq 0$时，由 $A=P_1P_2\cdots P_l$，有

$P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}A=E$，及 $P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}E=A^{-1}$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad & P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}(A \mid E)\\ &=\left(P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}A \mid P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}E\right)\\ &=\left(E \mid A^{-1}\right)\end{aligned}$$

即对 $n\times 2n$ 矩阵 $(A \mid E)$ 施行初等行变换，当把 A 变成 E 时，原来的 E 就变成 A^{-1}.

例1 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解 $$(A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3}$$

$$\xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)}$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

利用初等行变换求逆阵的方法，还可用于求矩阵$A^{-1}B$.

$$\because \quad A^{-1}(A \vdots B) = (E \vdots A^{-1}B)$$

即

$$(A \vdots B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \vdots \boxed{A^{-1}B})$$

例2　求矩阵 X，使 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解　若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B$.

$$(A \vdots B)=\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 5\\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9\\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 1 & -4\\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

$$\therefore \qquad X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

四、利用初等变换求矩阵秩

定理3 若 $A \simeq B$,则 $R(A) = R(B)$.

把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

例3 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的秩.

解 对A作初等行变换，变成行 阶梯形矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_4]{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\2&0&1&5&-3\\3&2&0&5&0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_4 \\ r_2-r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - 4r_2]{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4-r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&0&0&4&-8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore R(A)=3$

设 n 阶可逆矩阵 A,

$\because \quad |A| \neq 0, \quad \therefore \quad A$ 的最高阶非零子式为 $|A|$,

$R(A) = n$, 故 A 的标准形为单位阵 E, $A \simeq E$.

可逆矩阵的秩等于阶数，故称可逆矩阵为满秩矩阵. 奇异矩阵为降秩矩阵.

例4　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

求矩阵A的列向量组的一个最大无关组，并把不属最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

解 对A施行初等行变换变为行阶梯形矩阵

$$A \overset{\text{初等行变换}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知$R(A)=3$,

故列向量组的最大无关组含3个向量.

而三个非零行的非零首元在1、2、4三列,

故 a_1, a_2, a_4,为列向量组的一个最大无关组.

事实上

$$(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\overset{\text{初等行变换}}{\simeq}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知$R(a_1,a_2,a_4)=3$，故a_1,a_2,a_4线性无关

要把a_3,a_5用a_1,a_2,a_4线性表示，必须将A再变成行最简形矩阵.

$$A \overset{\text{初等行变换}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得
$$\begin{cases} a_3 = -a_1 - a_2, \\ a_5 = 4a_1 + 3a_2 - 3a_4 \end{cases}$$

五、向量空间的有关概念

定义1 设 V 为 n 维向量的集合，如果集合 V 非空，且集合 V 对于加法及乘数两种运算封闭，那么就称集合 V 为向量空间.

说明

1. 集合 V 对于加法及乘数两种运算封闭指

$$若\ \alpha \in V, \beta \in V, 则\ \alpha + \beta \in V;$$

$$若\ \alpha \in V, \lambda \in R, 则\ \lambda\alpha \in V.$$

2. n 维向量的集合是一个向量空间,记作 R^n.

定义2 设有向量空间 V_1 及 V_2，若向量空间 $V_1 \subset V_2$，就说 V_1 是 V_2 的**子空间**.

实例

设 V 是由 n 维向量所组成的向量空间，

显然 $V \subset R^n$

所以 V 总是 R^n 的子空间.

定义3　设 V 是向量空间，如果 r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$，且满足

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

(2) V 中任一向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示．

那末，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 就称为向量 V 的一个**基**，r 称为向量空间 V 的**维数**，并称 V 为 r 维向量空间.

说明

（1）只含有零向量的向量空间称为0维向量空间，因此它没有基.

（2）若把向量空间 V 看作向量组，那末 V 的基就是向量组的最大无关组, V 的维数就是向量组的秩.

（3）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基，则 V 可表示为

$$V=\left\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_r\in R\right\}$$

例5 3维向量的全体R^3,是一个向量空间.

因为任意两个3维向量之和仍然是3维向量,数λ乘3维向量仍然是3维向量，它们都属于R^3.

类似地，n维向量的全体R^n，也是一个向量空间.

例6 判别下列集合是否为向量空间.

$$V_1 = \{x = (0, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in R\}$$

解 V_1是向量空间.

因为对于V_1的任意两个元素

$$\alpha = (0, a_2, \cdots, a_n)^T, \beta = (0, b_2, \cdots, b_n)^T \in V_1,$$

有
$$\alpha + \beta = (0, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)^T \in V_1$$

$$\lambda\alpha = (0, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)^T \in V_1.$$

例7 判别下列集合是否为向量空间.

$$V_2 = \{x = (1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in R\}$$

解 V_2不是向量空间.

因为若$\alpha = (1, a_2, \cdots, a_n)^T \in V_2$,

则$2\alpha = (2, 2a_2, \cdots, 2a_n)^T \notin V_2$.

例8 设 a,b 为两个已知的 n 维向量，集合

$$V=\{x=\lambda a+\mu b \mid \lambda,\mu\in R\}$$

试判断集合是否为向量空间.

解 V 是一个向量空间. 因为若 $x_1=\lambda_1 a+\mu_1 b$，$x_2=\lambda_2 a+\mu_2 b$，则有

$$x_1+x_2=(\lambda_1+\lambda_2)a+(\mu_1+\mu_2)b\in V,$$

$$kx_1=(k\lambda_1)a+(k\mu_1)b\in V.$$

这个向量空间称为由向量 a,b 所生成的向量空间.

一般地，由向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 所生成的向量空间为

$$V = \{x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in R\}$$

例9 设向量组 $a_1, \cdots, a_m$ 与向量组 $b_1, \cdots, b_s$ 等价，记

$$V_1 = \{x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in R\}$$

$$V_2 = \{x = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \cdots + \mu_s b_s \mid \mu_1, \mu_2, \cdots \mu_s \in R\}$$

试证： $V_1 = V_2$.

证 设$x \in V_1$，则x可由$a_1,\cdots,a_m$线性表示. 因$a_1,\cdots,a_m$可由$b_1,\cdots,b_s$线性表示，故x可由$b_1,\cdots,b_s$线性表示，所以$x \in V_2$.

这就是说，若$x \in V_1$，则$x \in V_2$，因此$V_1 \subset V_2$.

类似地可证：若$x \in V_2$，则$x \in V_1$，因此$V_2 \subset V_1$.

因为$V_1 \subset V_2$，$V_2 \subset V_1$，所以$V_1 = V_2$.

六、小结

1、初等行(列)变换 $\begin{cases} (1) r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j); \\ (2) r_i \times k (c_i \times k); \\ (3) r_i + k r_j (c_i + k c_j). \end{cases}$

2、$A \xrightarrow{\text{初等变换}} B \Rightarrow A \simeq B.$

3、矩阵等价具有的性质

(1)反身性； (2)对称性； (3)传递性.

4、单位矩阵 $\xrightarrow{\text{一次初等变换}}$ 初等矩阵.

5、逆矩阵的计算方法—— 初等变换法.

6、求向量组的秩以及最大无关组的方法:
将向量组中的向量作为列向量构成一个矩阵，然后进行初等行变换.

7、向量空间的简单概念。（了解）