定义 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**.

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

证明 设 $A = (a_{ij})$，记 $AA^* = (b_{ij})$，则

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = |A|\delta_{ij},$$

故 $AA^* = (|A|\delta_{ij}) = |A|(\delta_{ij}) = |A|E.$

同理可得

$$A^*A = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}\right) = (|A|\delta_{ij}) = |A|(\delta_{ij}) = |A|E.$$

退出

第1节小结

1、矩阵的概念　m行n列的一个数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2、特殊矩阵

- 方阵 $(m=n)$;
- 行矩阵与列矩阵; $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$;
- 单位矩阵; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- 对角矩阵; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$
- 零矩阵.
- 三角矩阵
  - 上三角矩阵
  - 下三角矩阵

3、

$$\text{矩阵运算}\begin{cases}\text{加法}\\ \text{数与矩阵相乘}\\ \text{矩阵与矩阵相乘}\\ \text{转置矩阵}\\ \text{方阵的行列式}\\ \text{对称阵与伴随矩阵}\\ \text{共轭矩阵}\end{cases}$$

注意

（1）只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

（2）只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘,且矩阵相乘不满足交换律.

（3）矩阵的数乘运算与行列式的数乘运算不同.

第 二 节

逆矩阵的求法

一、概念的引入

在数的运算中，当数$a \neq 0$时，有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

其中 $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ 为 a 的倒数,（或称 a 的逆）；

在矩阵的运算中,单位阵E相当于数的乘法运算中的1， 那么，对于矩阵A，如果存在一个矩阵A^{-1},

使得 $$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

则矩阵A^{-1}称为A的逆矩阵或逆阵.

二、逆矩阵的概念和性质

定义 对于n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵B，使得

$$AB = BA = E,$$

则说矩阵A是可逆的，并把矩阵B称为A的逆矩阵.

A的逆矩阵记作A^{-1}.

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$

$\because AB = BA = E,$ $\therefore B$是A的一个逆矩阵.

说明 若 A 是可逆矩阵，则 A 的逆矩阵是唯一的.

若设 B 和 C 是 A 的逆矩阵，则有

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

可得 $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$

所以 A 的逆矩阵是唯一的,即

$$B = C = A^{-1}.$$

例 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，求$A$的逆阵.

解 利用待定系数法

设 $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 是A的逆矩阵,

则 $$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2a+c & 2b+d\\ -a & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1, \\ 2b+d=0, \\ -a=0, \\ -b=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=-1, \\ c=1, \\ d=2. \end{cases}$$

又因为

$$\overset{AB}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = \overset{BA}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

定理1 矩阵A可逆的充要条件是$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*,$$

其中A^*为矩阵A的**伴随矩阵**。

证明 若 A可逆，即有A^{-1}使$AA^{-1} = E$.

故$|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$，所以$|A| \neq 0$.

当$|A| \neq 0$时，

当$|A| \neq 0$时，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = |A|$$

$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} = |A|$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & & \boldsymbol{O} \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \\ \boldsymbol{O} & & & & \end{pmatrix},$$

$$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A\frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|}A = E,$$

按逆矩阵的定义得

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$ 证毕

奇异矩阵与非奇异矩阵的定义

当$|A| = 0$时，A称为奇异矩阵，当$|A| \neq 0$时，A称为非奇异矩阵.

由此可得A是可逆阵的充要条件是 A为非奇异矩阵.

推论 若 $AB=E$（或 $BA=E$），则 $B=A^{-1}$.

证明 $|A|\cdot|B|=|E|=1$, 故 $|A|\neq 0$,

因而 A^{-1} 存在，于是

$$B=EB=\left(A^{-1}A\right)B=A^{-1}(AB)$$

$$=A^{-1}E=A^{-1}$$

证毕

逆矩阵的运算性质

(1) 若 A 可逆，则 A^{-1} 亦可逆，且 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若A可逆，数$\lambda \neq 0$，则λA可逆，且

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

(3) 若A, B为同阶方阵且均可逆，则AB亦可逆，且

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

证明 $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$

$$= AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

推广 $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

(4) 若A可逆，则A^T亦可逆，且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

证明 $\because\ A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=E^T=E,$

$$\therefore\ \left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T.$$

另外，当$|A|\neq 0$时，定义

$$A^0=E,\quad A^{-k}=\left(A^{-1}\right)^k.$$

(k为正整数)

当$|A| \neq 0$, λ, μ为整数时,有

$$A^{\lambda} A^{\mu} = A^{\lambda+\mu}, \quad \left(A^{\lambda}\right)^{\mu} = A^{\lambda\mu}.$$

(5)若A可逆,则有$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

证明 $\because AA^{-1} = E$

$\therefore |A|\left|A^{-1}\right| = 1$

因此$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

三、逆矩阵的求法——伴随矩阵法

例1 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$的逆矩阵.

解 $\because \ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2,\ \therefore\ A^{-1}$存在.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$$

同理可得 $A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$

得 $$A^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix},$$

故

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

例2 下列矩阵A,B是否可逆？若可逆，求出其逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&3&-5\\1&5&-11\end{pmatrix}.$$

解 $$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-4\\0&1&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & -4\\ 1 & 0\end{vmatrix}=4\neq 0,$$ 所以A可逆.

$$\because\quad A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-3,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5,$$

同理可求得 $A_{21}=3, A_{22}=0, A_{23}=-1, A_{31}=1,$

$A_{32}=4, A_{33}=-3.$

$$\therefore A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

由于$|B|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & -11 \end{vmatrix}=0,$ 故B不可逆.

例3 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix},$

求矩阵X使满足 $AXB=C$.

解 $\because |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\ |B|=\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}=1\neq 0,$

$\therefore\ A^{-1}, B^{-1}$都存在.

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$,

又由 $AXB=C \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{E}X\underbrace{BB^{-1}}_{E}=A^{-1}CB^{-1}$

$$\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}.$$

于是 $X=A^{-1}CB^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 10 & -4\\ -10 & 4\end{pmatrix}.$$

例4 设方阵A满足方程$A^2-A-2E=0$,证明:$A, A+2E$都可逆,并求它们的逆矩阵.

证明 由$A^2-A-2E=0$,

$$\overset{A^{-1}}{}$$

得$A(A-E)=2E \Rightarrow A\dfrac{A-E}{2}=E$

$\Rightarrow |A|\left|\dfrac{A-E}{2}\right|=1 \Rightarrow |A|\neq 0$, 故$A$可逆.

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E).$$

又由$A^2-A-2E=0$

$$\Rightarrow (A+2E)(A-3E)+4E=0$$

$$\Rightarrow (A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right]=E$$

$(A+2E)^{-1}$

$$\Rightarrow |A+2E|\left|-\frac{1}{4}(A-3E)\right|=1,$$ 故$A+2E$可逆.

且$(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)=\frac{3E-A}{4}.$

例5　已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}.

解　因 $|A| = 5! \neq 0,$　故 A^{-1} 存在.

由伴随矩阵法得 $A^{-1} = A^{*} / |A|,$

$$=\frac{1}{5!}\begin{pmatrix} 2\cdot3\cdot4\cdot5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1\cdot3\cdot4\cdot5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdot2\cdot4\cdot5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\cdot2\cdot3\cdot5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\cdot2\cdot3\cdot4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

四、小结

逆矩阵的概念及运算性质.

逆矩阵 A^{-1} 存在 $\Leftrightarrow |A| \neq 0.$

逆矩阵的计算方法

(1)待定系数法 ;(2)利用公式$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$;

思考题

1、若A可逆,那么矩阵方程$AX = B$是否有唯一解 $X = A^{-1}B$? 矩阵方程 $YA = B$ 是否有唯一解 $Y = BA^{-1}$?

2、将矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$表示成有限个初等方阵的乘积.

思考题解答

1、 是的.这是由于 A^{-1}的唯一性决定的 .

2、 A可以看成是由3阶单位矩阵E经4次初等变换,

$$r_2 \leftrightarrow r_3,\quad c_1+2c_3,\quad (-1)r_3,\quad (-1)c_3$$

而得. 而这4次初等变换所对应的初等方阵为:

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}, P_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$P_4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

由初等方阵的性质得

$$A=P_3P_1EP_2P_4 \;=P_3P_1P_2P_4.$$

例5 解矩阵方程 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

(2) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$,

得 $$\overbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}}^{E} X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -28 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$(2)\ X\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

给方程两端右乘矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$，

得 $$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -14 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$(3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

给方程两端右乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$，

$$\text{得}\quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -75 & 30 \\ 9 & 52 & -21 \\ 21 & 120 & -47 \end{pmatrix}.$$

例6 设三阶矩阵A,B满足关系：

$$A^{-1}BA = 6A + BA, \text{且} A = \begin{pmatrix} 1/2 & & O \\ & 1/4 & \\ O & & 1/7 \end{pmatrix} \text{求} B.$$

解 $A^{-1}BA - BA = 6A$

$$\Rightarrow (A^{-1} - E)BA = 6A \Rightarrow (A^{-1} - E)B = 6E$$

$$\Rightarrow B = 6(A^{-1} - E)^{-1}.$$

$$B=6\left(A^{-1}-E\right)^{-1}$$

$$=6\left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$