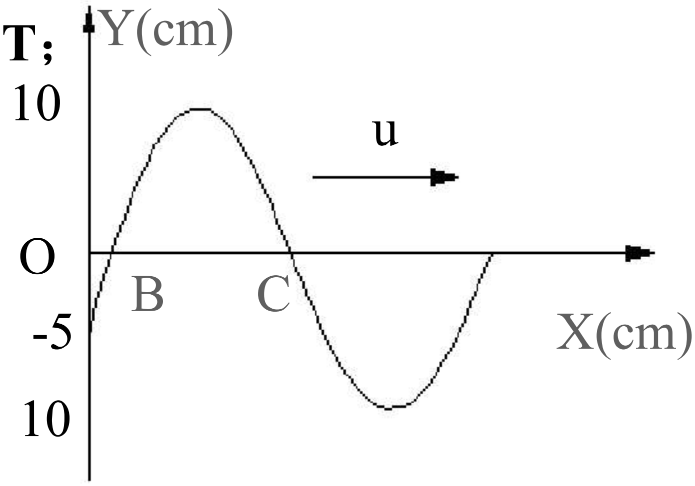
（作业47波动习题课））**5.**已知一沿**X**轴正方向传播的平面余弦横波, 波速为**20cm/s**, 在**t=1/3s**时的波形曲线如图所示, **BC=20cm**, 求:

(1) 该波的振幅**A**、波长λ和周期**T**;
(2) 写出原点的振动方程;
(3) 写出该波的波动方程.



$A=10cm, \lambda=40cm, T=40/20=2s$

t=1/3s $Y_0=-A/2, v_O<0$

$\omega t+\varphi_0=2\pi/3$

$\varphi_0=2\pi/3-2\pi t/T=\pi/3$

$Y_O=10\cos(\pi t+\pi/3)cm$

$Y=10\cos(\pi t+\pi/3-\pi x/20)cm$

二、波动微分方程

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\omega^2 A\cos[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi_0]\\[2ex]\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{u^2}\omega^2 A\cos[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi_0]\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

波动微分方程

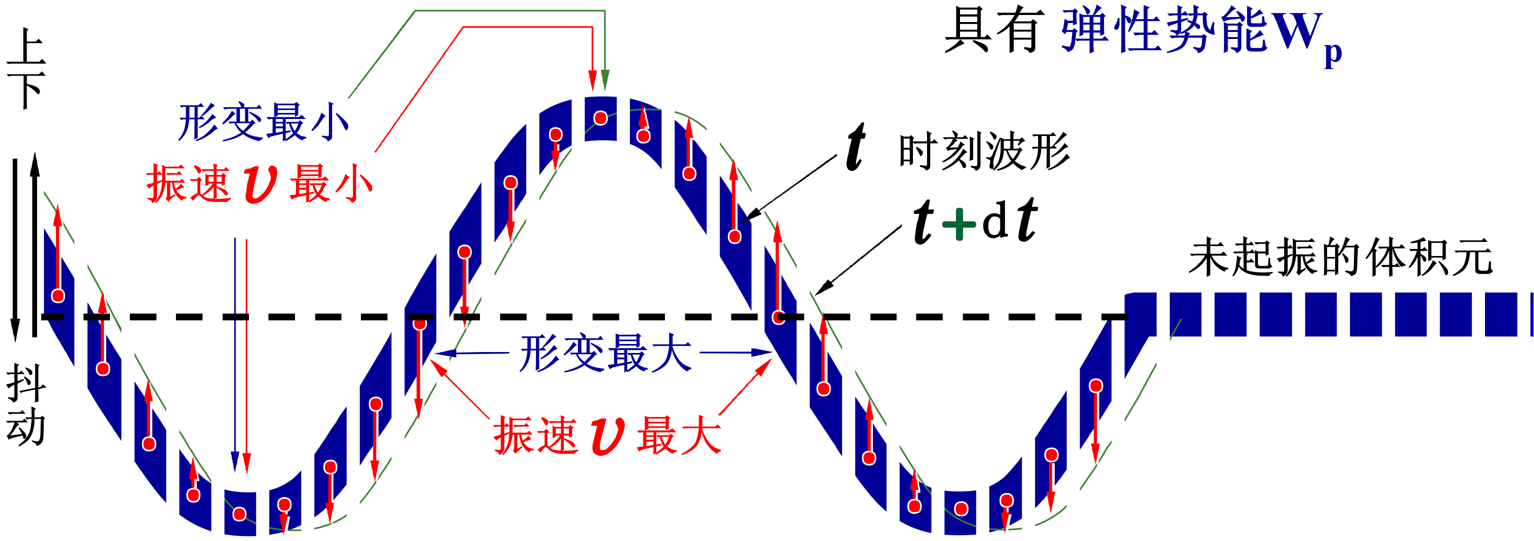
一般情况下，物理量ξ **(x,y,z,t)**在三维空间中以波的形式传播，则波动方程

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

§11.3 波的能量

现象： 若将一软绳（弹性媒质）划分为多个小体积元）

- 在波动中，各体积元产生不同程度的 弹性形变，
  具有 弹性势能W_p



- 各体积元以变化的振动速率 v 上下振动，具有振动动能W_k

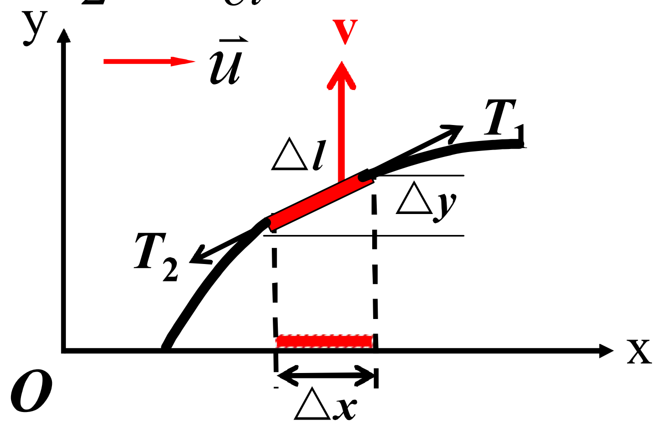
一. 波的能量和能量密度

以绳上横波为例：设波沿x方向传播，取线元Δx，

绳子单位长度的质量为μ，则线元质量Δm $\qquad \Delta m = \mu\Delta x$

线元振动速度： $$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

线元动能： $$W_k = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}\Delta m(\frac{\partial y}{\partial t})^2 \quad ①$$



线元变形具有弹性势能

$$W_p = T(\Delta l - \Delta x)$$

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

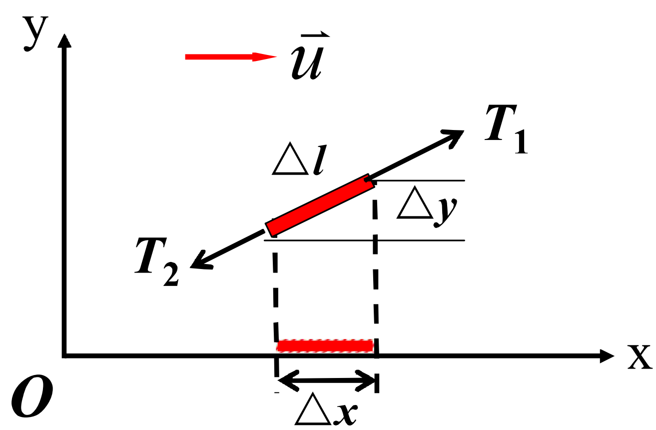
$$\approx \Delta x[1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2]^{1/2}$$

$$\approx \Delta x[1+\frac{1}{2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2]$$

$$W_p \approx \frac{1}{2}T\Delta x(\frac{\partial y}{\partial x})^2 \quad ②$$

$$W_k = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}\Delta m(\frac{\partial y}{\partial t})^2 \quad ①$$

$$W_p \approx \frac{1}{2}T\Delta x(\frac{\partial y}{\partial x})^2 \quad ②$$



线元的机械能为 $W = W_k + W_p$ ③

将 $T = u^2\mu$ 和 $y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

代入①、②、③

$$W_k = \frac{1}{2}\mu\Delta x(\frac{\partial y}{\partial t})^2 = \frac{1}{2}\mu\Delta x A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

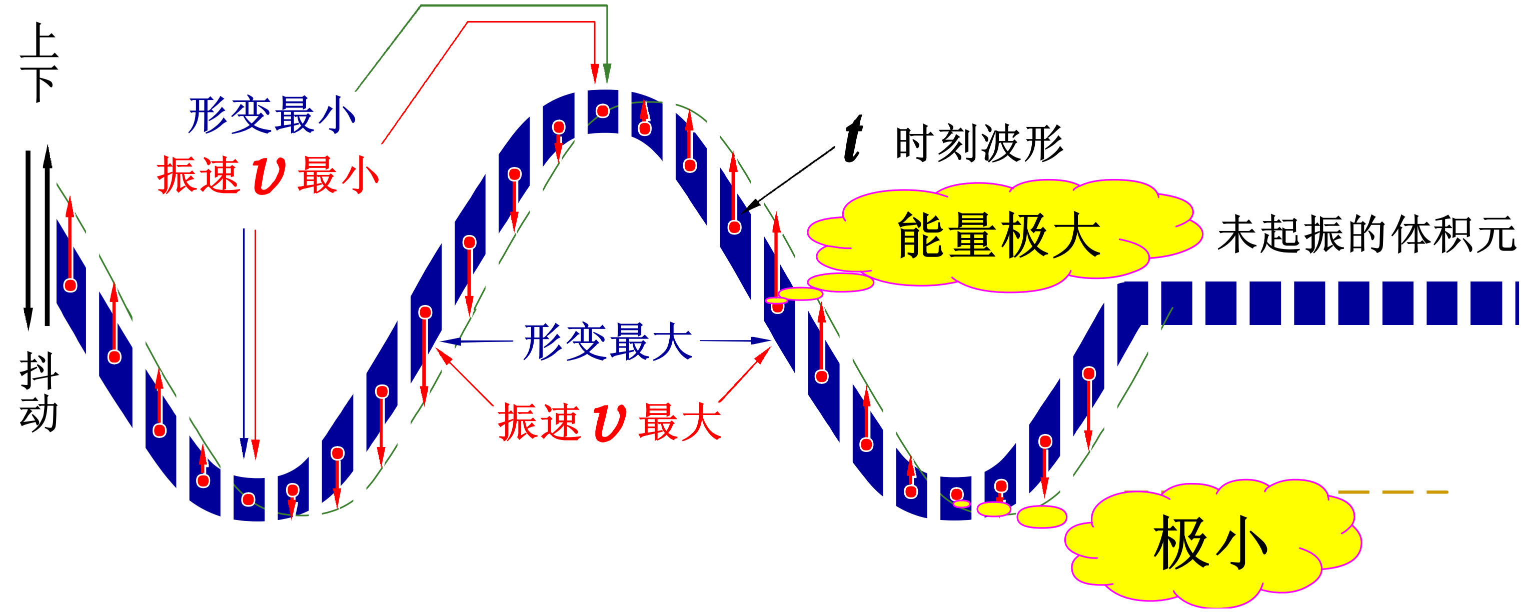
$$W_p = \frac{1}{2}T\Delta x(\frac{\partial y}{\partial x})^2 = \frac{1}{2}\mu\Delta x A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

质元总机械能 $$W = W_k + W_p = \mu\Delta x A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$= \Delta m A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

特点：**1**、平面简谐波传播中任一质元的动能与势能作同相变化，即同时达到最大值（在平衡位置），同时达到最小值零（在最大位移）

2、任一质元的总机械能随时间作周期性变化，变化的时间周期是**T/2**，空间周期是λ/**2**，能量以速度**u**随波一起传播，所以称为行波。



2、波的能量密度

单位体积介质中的能量就是能量密度

$$w=\frac{W}{\Delta V}=\rho A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

平均能量密度——一个周期内能量密度的平均值

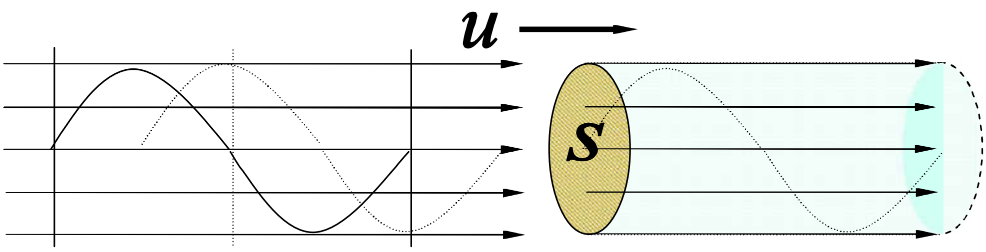
$$\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T\rho A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]dt$$

$$=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

地震的大小通常用震级表示，它是根据地震仪记录的地面地动位移，震级是地震强度大小的度量，它与地震所释放的能量有关。一个6级地震释放的地震波能量相当于第二次世界大战美国在日本广岛投下的原子弹的能量。震级每差1.0级，能量相差大约32倍；相差2.0级，能量相差约1000倍。

二、能流 和 能流密度

$\left.\begin{array}{l}\text{体积元的能量取决于其振动状态}\\ \text{振动状态以波速}\,u\,\text{在媒质中传播}\end{array}\right\}$ 能量以波速 u 在媒质中传播



能流 单位时间垂直通过的某截面积 S 的能量 $P=wsu$

平均能流 一周期内垂直通过某截面积 S 的能量的平均值

$$\overline{P}=\overline{w}su$$

单位：瓦 (W)

能流密度（波的强度）垂直通过单位截面积的平均能流

$$I=\frac{\overline{P}}{s}=\overline{w}\,u=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\,u$$

单位：瓦·米$^{-2}$ (W· m^{-2})

例 已知

一频率为 1000 Hz 的声波在空气中传播

波强为

$3\times10^{-2}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$

波速为

$330\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

空气密度为

$1.3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

求

此声波的振幅

解法提要

波强 $I=\overline{w}\,u=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$

$$\omega=2\pi\nu$$

则 $A=\dfrac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\dfrac{2I}{\rho u}}$

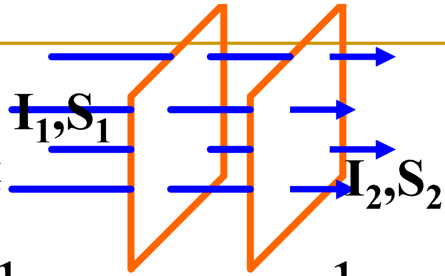
$$=\frac{1}{2000\pi}\sqrt{\frac{2\times3\times10^{-2}}{1.3\times330}}$$

$$=1.8\times10^{-6}\ (\mathrm{m})$$

声波是纵波，此振幅表示空气各体积元作振动时，在波线方向上相对于各自平衡位置的最大位移。

三、平面波与球面波的振幅

能量不损失时，通过各波振面的能流相等



平面波 $I_1S_1 = I_2S_2$，$S_1 = S_2$ $\Rightarrow$ $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 u = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 u$

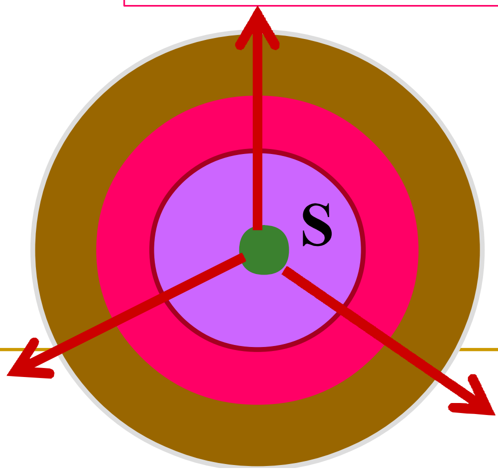
$\boxed{A_1 = A_2}$

球面波 $I_1S_1 = I_2S_2$

$S_1 = 4\pi r_1^2, S_2 = 4\pi r_2^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}}$

球面波波动表达式

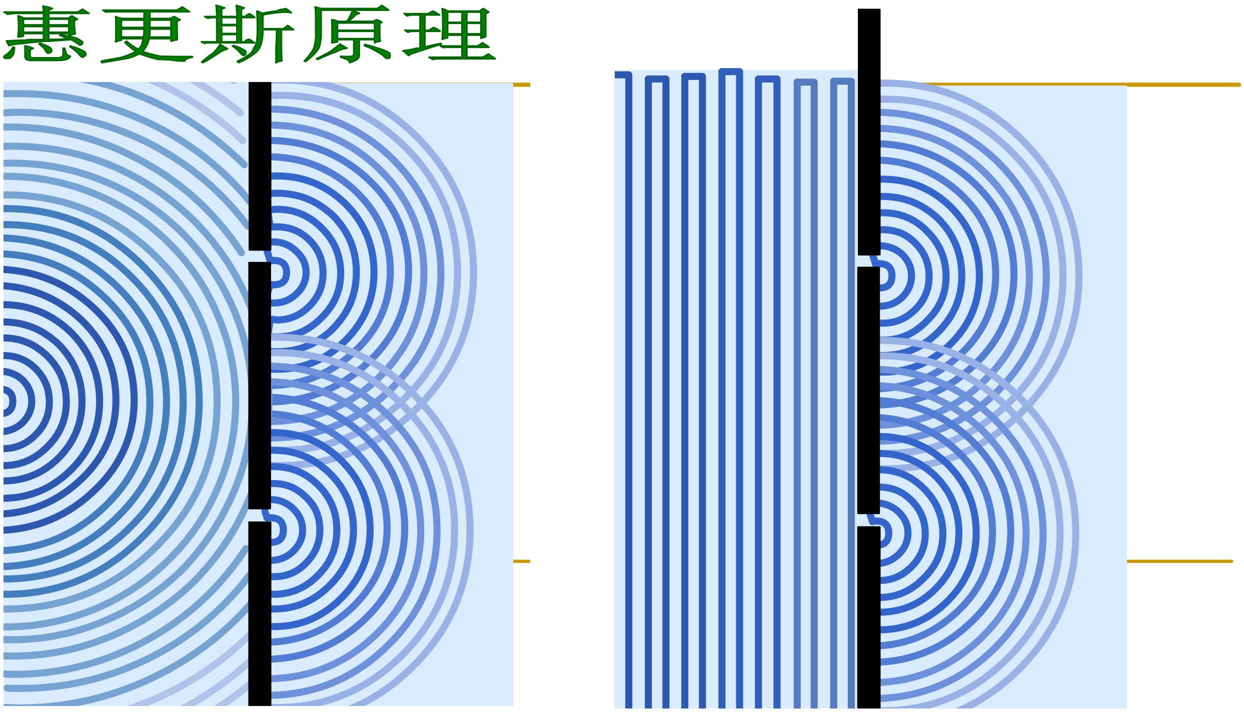
$$\boxed{y = \frac{A_1}{r}\cos[\omega(t - \frac{r}{u}) + \varphi_0]}$$



A_1：离波源单位距离处的振幅

11-5　惠更斯原理

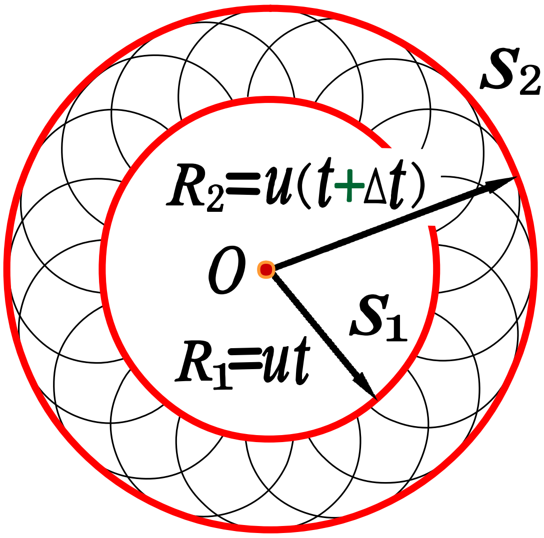
一、惠更斯原理

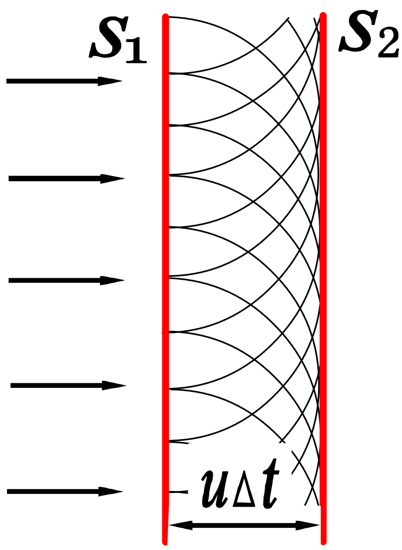


一入射波传播到带有小孔的屏时，不论入射波的波阵面是什么形状，通过小孔时，在小孔的另一侧都产生以小孔作为点波源的前进波，可将其抽象为从小孔处发出的一种次波或子波，其频率与入射波频率相同。

惠更斯原理

媒质中波动传到的各点，都可以看作能够发射子波的新波源，在这以后的任意时刻，这些子波的包络面就是该时刻的波面。



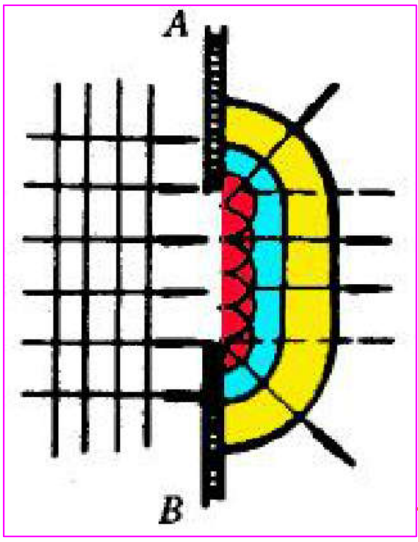


二、波的衍射

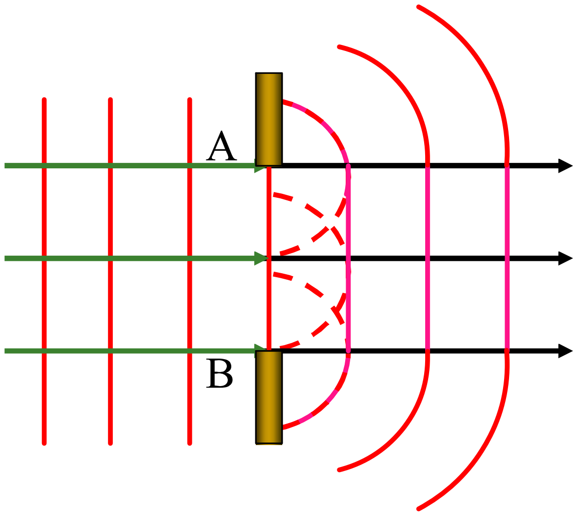
1、波的衍射现象

波在传播过程中遇到障碍物时，能够绕过障碍物的边缘继续前进的现象叫做波的衍射现象。

2、用惠更斯原理解释波的衍射现象



靠近狭缝的边缘处，波面弯曲，波线改变了原来的方向，即绕过了障碍物继续前进。

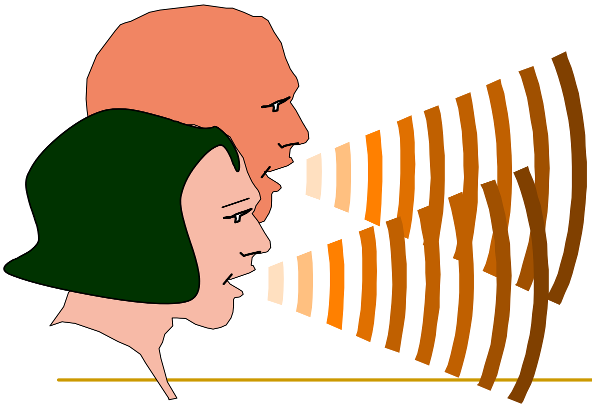


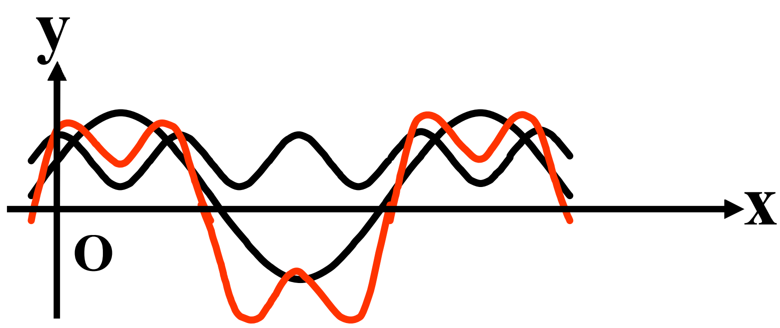
11.6 波的干涉

一、波的叠加原理

•波的独立传播原理：几列波在同一介质中传播时，
•将各自保持其原有的特性（频率、波长、振动方向等）不变，并沿原来的方向继续传播下去，好象其它波不存在一样；

•波的叠加原理：在波相遇区域内，介质中任一点的振动均为各列波单独存在时在该点所引起振动的合成。





二、波的干涉

1、相干波

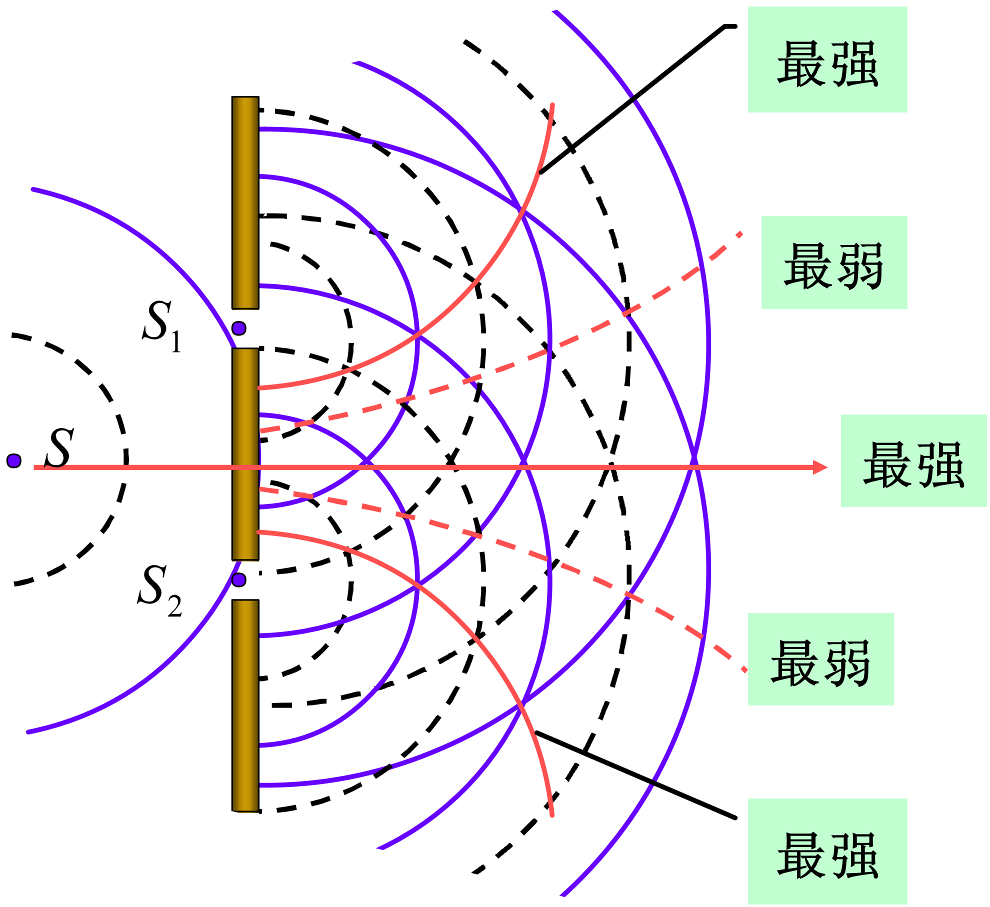
振动方向相同、频率相同、相位相同或相位差恒定的两列波，

在空间相遇叠加的结果

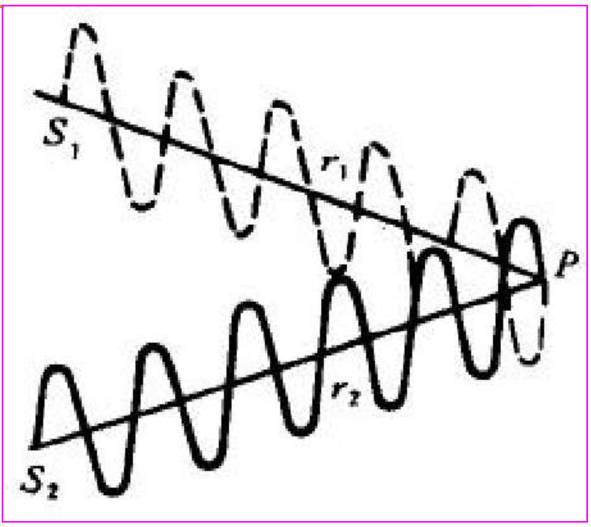
某些点的振动始终加强

另外某些点的振动始终减弱，

形成一种稳定的强弱分布——波的干涉现象。


最强
最弱
S1
S
最强
S2
最弱
最强

2、干涉图样的形成



考虑两相干波源，振动表达式为：

$$y_{10} = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_{20} = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

传播到 P 点引起的振动为：

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda} r_1)$$

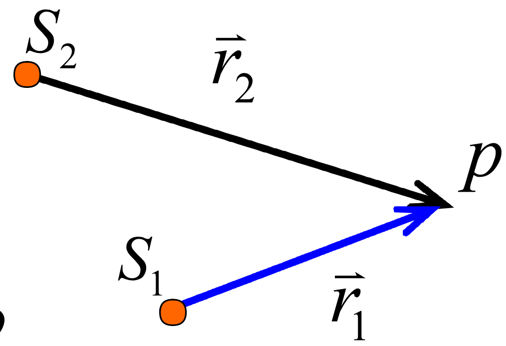
$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - \frac{2\pi}{\lambda} r_2)$$

在 *P* 点的振动为同方向同频率振动的合成。

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

在P点的合成振动为：

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$



其中：$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - \dfrac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

相长干涉的条件：

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

$$= \pm 2k\pi$$

$$k = 0,1,2,\ldots$$

$$A = A_1 + A_2$$

相消干涉的条件：

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

$$= \pm(2k-1)\pi,$$

$$k = 1,2,3,\ldots$$

$$A = |A_1 - A_2|$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right)}$$

若 $\varphi_2 = \varphi_1$ 即两分振动具有相同的初相位

则 $\Delta\varphi$ 取决于两波源到P点的路程差$\delta = r_2 - r_1$，δ 称为波程差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \pm 2k\pi$$

$$k = 0,1,2,\ldots$$

$$\delta = (r_2 - r_1) = \pm k\lambda$$

$$A = A_1 + A_2$$

干涉加强

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \pm(2k-1)\pi$$

$$k = 0,1,2,\ldots$$

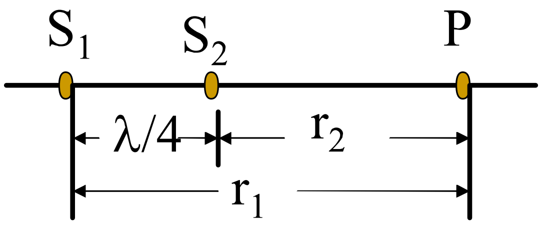
$$\delta = (r_2 - r_1) = \pm(2k-1)\frac{\lambda}{2}$$

$$A = |A_1 - A_2|$$

干涉减弱

例：两个同频率波源S_1和S_2相距λ/4，两波源振动方向相同，振幅同为A_0初相差为 $\varphi_1-\varphi_2=\dfrac{\pi}{2}$ **在通过S_1、S_2的直线上，S_2外侧各点的合振幅为多大？S_1外侧各点的合振幅为多大？**

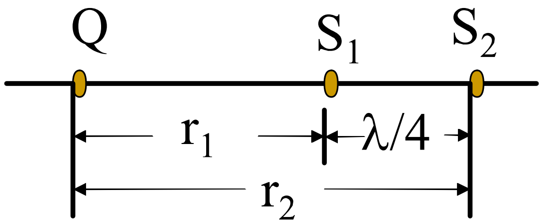
解： $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda}$



在S_2外的P点 $r_2-r_1=-\dfrac{\lambda}{4}$

$$\Delta\varphi_P=-\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=0$$

$A_P=2A_0$



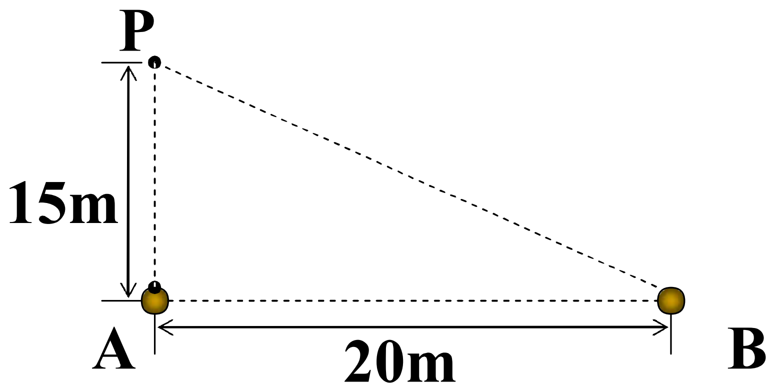
在S_1外的Q点 $r_2-r_1=\dfrac{\lambda}{4}$

$$\Delta\varphi_Q=-\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2})=-\pi$$

$A_Q=0$

例题、AB为两相干波源，振幅均为5cm，频率为100Hz，波速为10m/s。A点为波峰时，B点恰为波谷，试确定两列波在P点干涉的结果。

解：



$$BP=\sqrt{20^2+15^2}=25m$$

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=0.1m$$

设A比B超前π　$\varphi_A-\varphi_B=\pi$

$$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A-2\pi\frac{BP-AP}{\lambda}=-\pi-2\pi\frac{25-15}{0.1}$$

$$=-201\pi$$ 反相　　振幅$A=0$　P点静止