第十一章

机械波（ mechanical wave）基础

一、波动

•振动在空间的传播过程称为**波动**

•机械振动在弹性介质中的传播称为**机械波**

如声波、水波、地震波等

二、波动的特征

•具有一定的传播速度；

•伴随着能量的传播；

•能产生反射、折射、干涉和衍射等现象；

11－1 机械波的形成与传播

一、机械波的形成

1、波动的产生

小球点击水面，形成水波

铙钹等乐器振动时，在空气中形成声波

音叉振动时，形成声波

振动在弹性介质中由近及远地传播出去，形成**波动**。

2、产生机械波的条件

波源： 产生机械振动的振源；

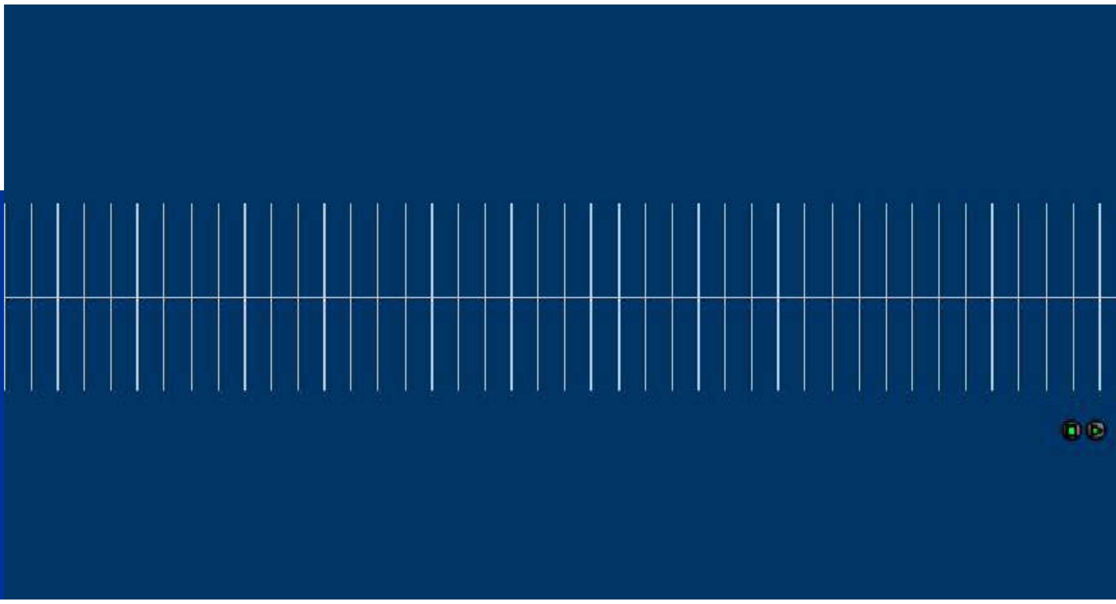
弹性介质： 传播机械振动。

洪恩软件 Human

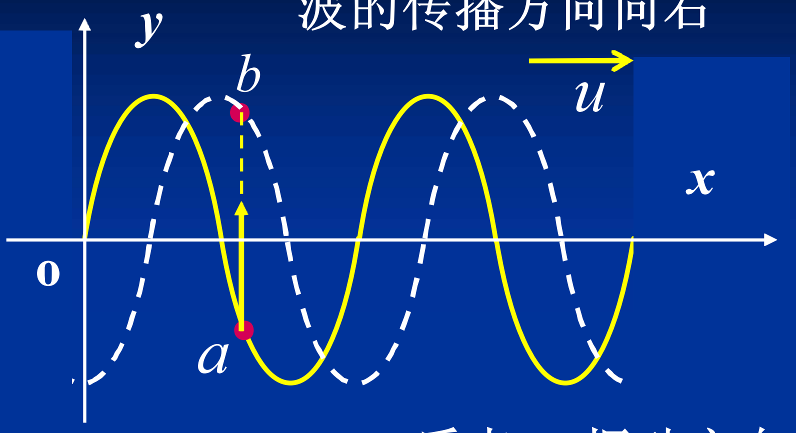
横波的形成：

开始：

质点的振动方向和传播方向互相垂直的机械波我们称为横波。
点击开始按钮，我们看到机械拨传播时波峰波谷在向前传播，我们仔细观察每一个质点就发现，介质中的质点只是在平衡位置附近做振动而并不随着波传播，波传播的只是振动的形式。

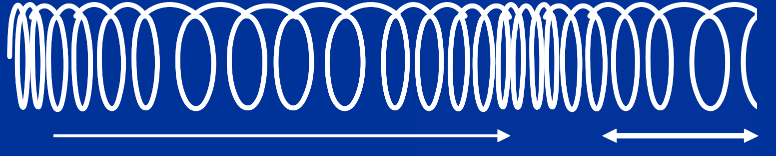


二、横波与纵波



波的传播方向向右

质点 a 振动方向向上



波的传播方向向右

质点振动方向水平

分类标准

质点振动方向与波传播方向的关系

1、横波

振动方向与传播方向垂直。

波峰——波形凸起部分

波谷——波形凹下部分

2、纵波

振动方向与波传播方向平行。

疏密状态沿波传播方向移动。

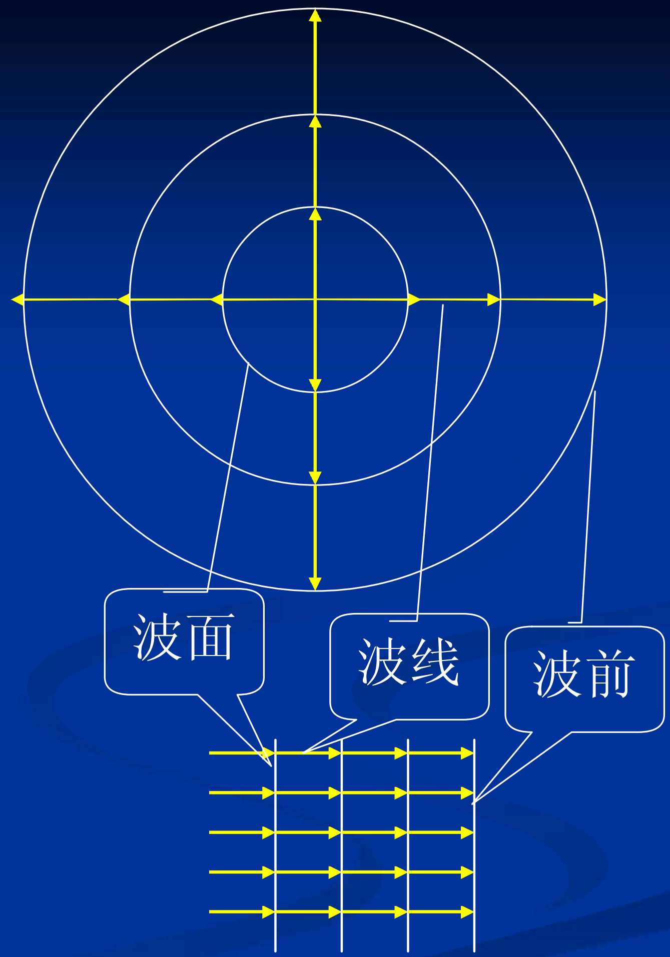
三、波线、波面、波前

1、概念

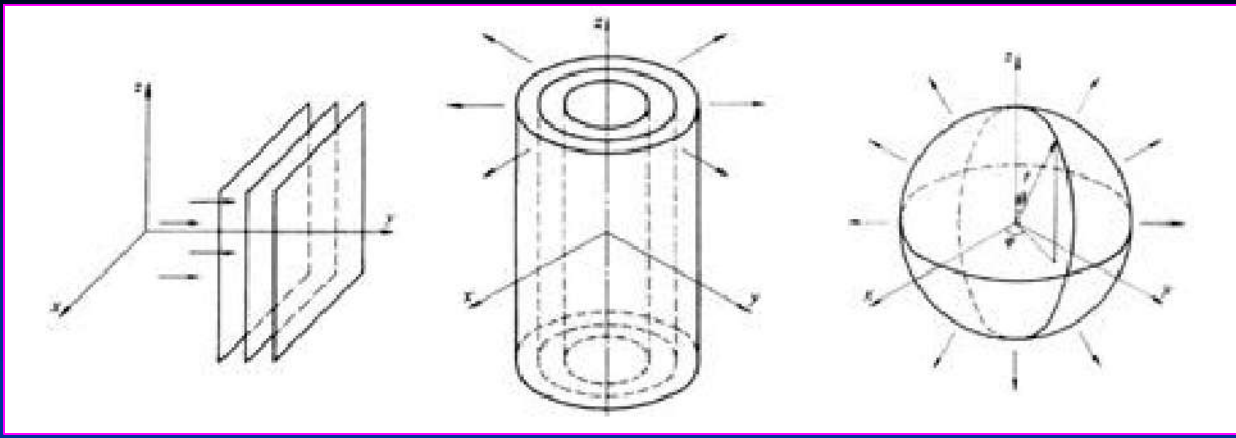
波线： **描述**波的传播方向；

波面： 相位相同的点所连成的曲面

波前： 在某一时刻，最前方的波面。



3、分类



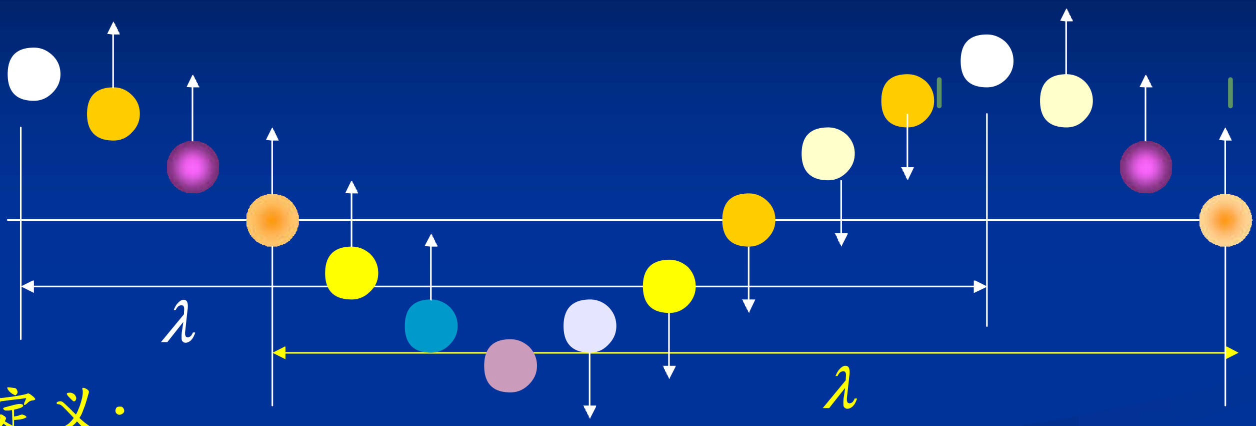
平面波：波前为平面；
柱面波：波前为柱面，由线状波源产生；
球面波：波前为球面，由点波源产生；

*波动的分类

- 按介质质点的运动方向与波动传播方向来分——横波和纵波
- 按波前形状来分——平面波、球面波、柱面波
- 按波动的传播特性来分——行波和驻波
- 按波源物理性质来分——光波、声波、水波等

四、波长、波的周期和频率、波速

1、波长——反映波动的空间周期性



定义：

同一波线上相位差为2π的两个振动质点之间的距离，

或沿波的传播方向，相邻的两个同相质点之间的距离叫波长。

横波：相邻两个波峰或波谷之间的距离

纵波：相邻两个密部或疏部之间的距离

2、周期和频率——反映波动的时间周期性

周期： 波传播一个波长所需要时间，叫周期，用T表示。
频率： 周期的倒数叫做频率，用ν 表示

$$\nu = 1 / T$$

说明：

•波的周期等于波源振动的周期；

•波的周期只与振源有关，而与传播介质无关。

3、波速u ⟶ 相速

相位

定义： 在波动过程中，某一振动状态在单位时间内所传播的距离。

*固体媒质中横波和纵波的波速

横波 $$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G为媒质的切变弹性模量

纵波 $$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

Y为媒质的杨氏弹性模量

* 在液体和气体中的纵波波速

$$u = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

B为媒质的体变弹性模量

* 弦线上横波的波速

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

T为弦上的张力
μ为质量线密度

4、三者关系式

$$\boxed{u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu}$$

小结：

频率、周期：决定于波源

波速：决定于传输介质的密度和弹性模量

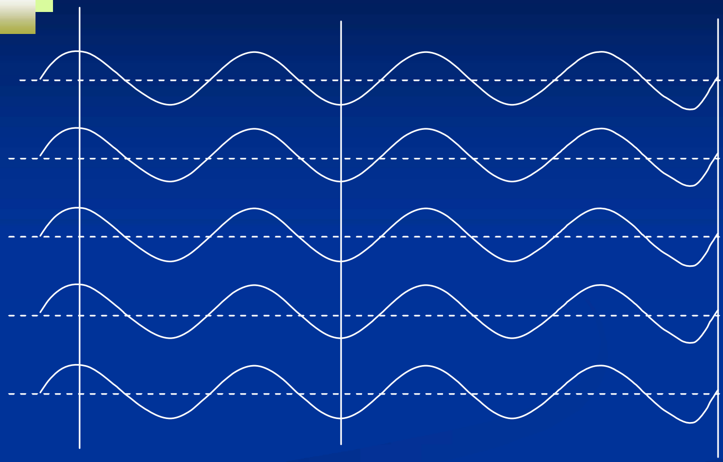
波长：由波源和传输介质共同确定

地震波分为纵波和横波。
纵波每秒钟传播速度5~6千米，能引起地面上下跳动；
横波传播速度较慢，每秒3~4千米，能引起地面水平晃动。
纵波衰减快，离震中较远的地方，只感到水平晃动。
一般情况下，地震时地面总是先上下跳动，后水平晃动，
根据时间间隔间隔判断震中位置。

11-2 平面简谐波的表达式 (波函数)

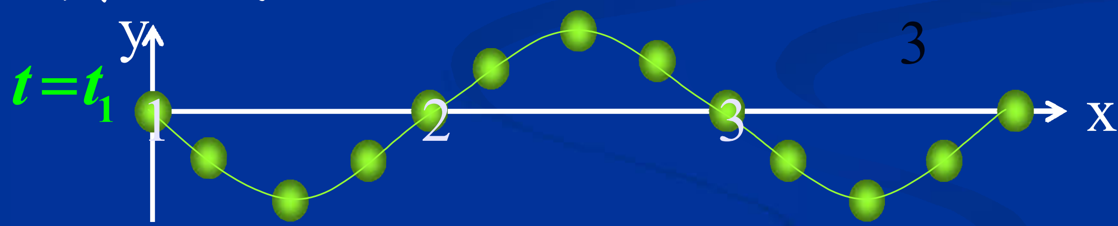
一、平面简谐波的表达式

1、平面简谐波



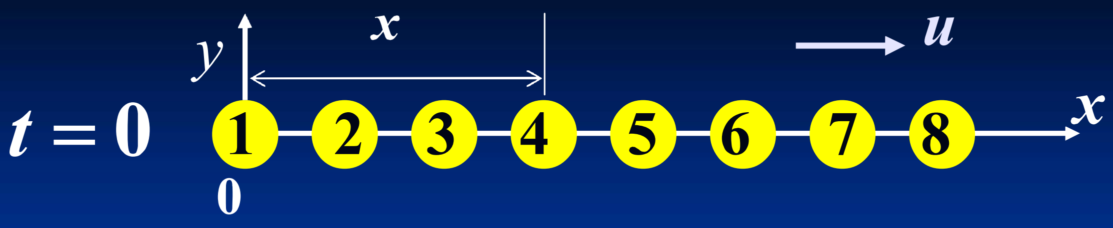
波源及波传播到的各个质点均作简谐振动——简谐波。
波面为平面的称平面简谐波

2、平面简谐波的表达式



——任一质点的振动方程

各质元的振动位移 y 随其平衡位置 x 和时间 t 变化的数学表达式，即 $y=f(x, t)$



已知： ①原点O的振动方程为： $y_0 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

②波向右传播，传播速率为 u

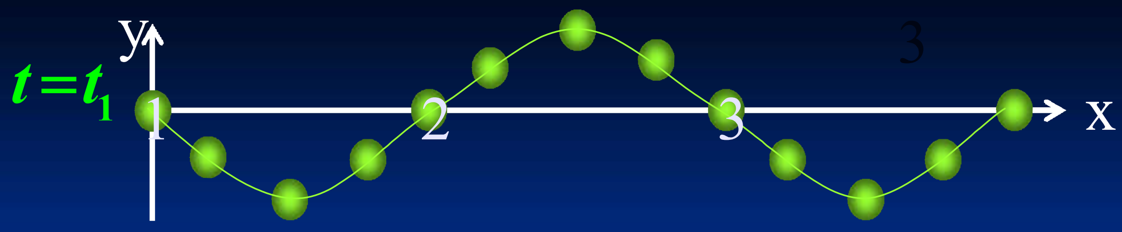
提示：① 位于x>0处的质点相位是超前还是落后？

x 处的质元比原点晚振动时间Δt $=x/u$

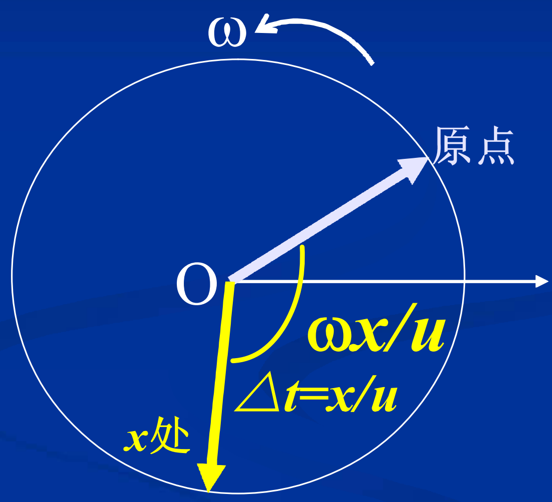
在时刻 t ，位于x处的质元的位移应该等于原点在（ $t- x/u$）时刻的位移。

② 相位落后多少？

相位落后： $\omega\Delta t=\omega x/u$



③位于 x处的质点的振动方程



t 时刻，x处质元的振动与原点在（ t- x/u）时刻时相同

x处质元的振动相位落后：$\omega x/u$

位于 x处的质点的振动方程为：

$$y_P = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$= A\cos(\omega t+\varphi_0 - \omega\frac{x}{u})$$

简谐波表达式
波函数
波动方程

$$y_P = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0] = A\cos(\omega t + \varphi_0 - \omega\frac{x}{u})$$

平面简谐波的表达式（波函数）

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

$$y = A\cos[2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

$$y = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut - x) + \varphi_0]$$

$$y = A\cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right)$$

波数

$$k = \omega / u = 2\pi / uT$$
$$= 2\pi / \lambda$$

3、波动中质点振动的速度和加速度

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$a=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-A\omega^2\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

4、沿X轴负方向传播的平面简谐波的表达式

$$y=A\cos\omega[(t+\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$y=A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut+x)+\varphi_0]$$

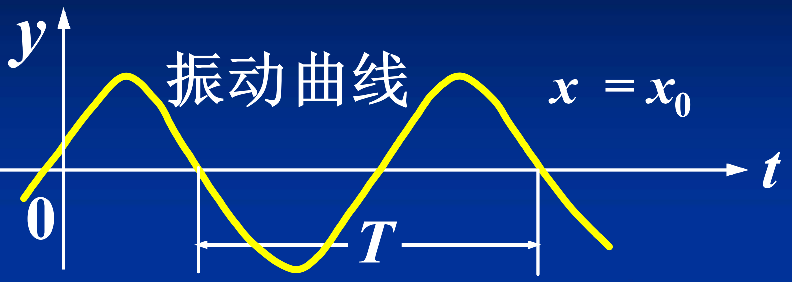
$$y=A\cos(\omega t+kx+\varphi_0)$$

二、波函数的物理意义

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

1、x一定，则位移仅是时间的函数，对于$x=x_0$

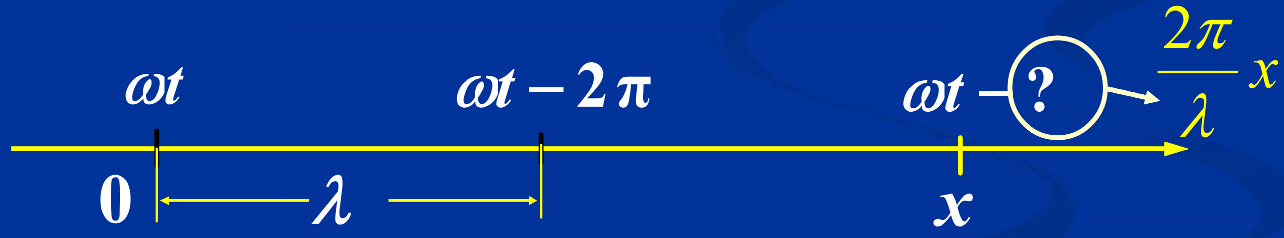
$$y=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi x_0}{\lambda}+\varphi_0\right)$$



表示x_0处质点的振动方程

$$y(\lambda,t)=A\cos(\omega t+\varphi_0-2\pi)$$
$$=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

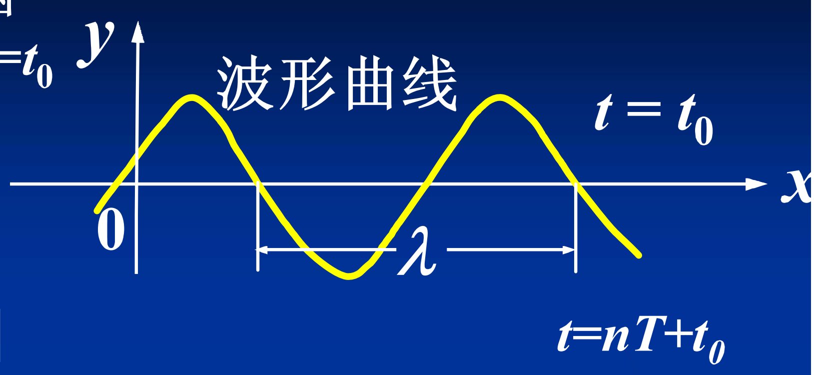
相距为λ的两点振动方程相同
波长反映了波的空间周期性



沿波传播方向每增加λ的距离，位相落后2π。

因此，x点比0点位相落后$\frac{2\pi}{\lambda}x$。

2、t 一定，则位移仅是坐标的函数，其图形为波形曲线，对于 $t=t_0$



$$y = A\cos\left(\omega t_0 - \frac{\omega x}{u} + \varphi_0\right)$$

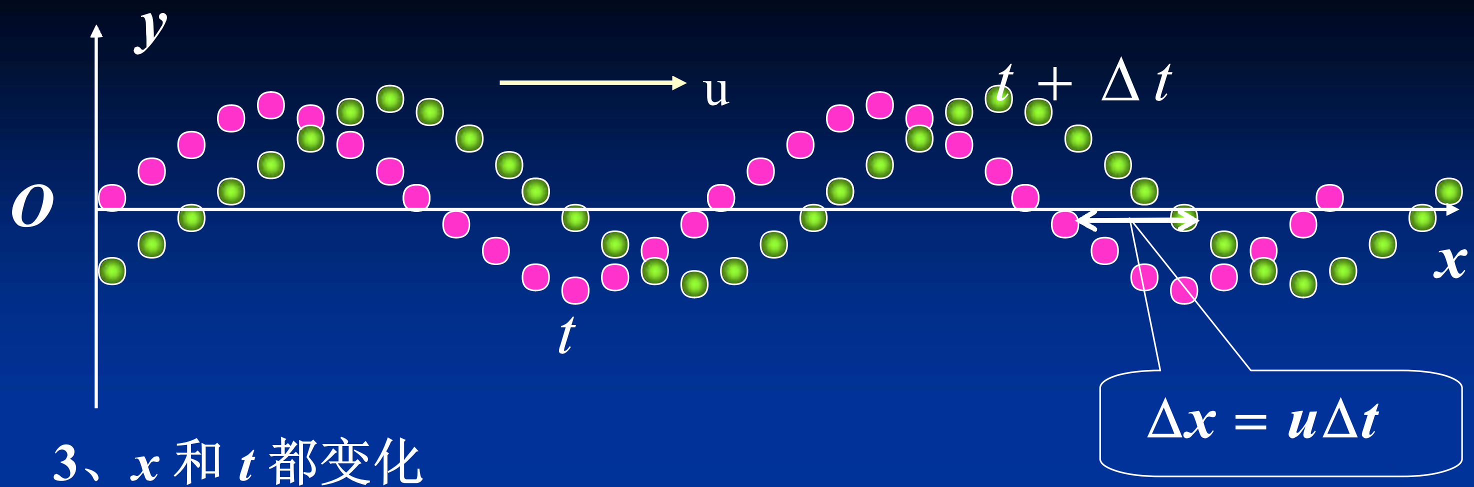
$$y(x,T) = A\cos[\omega(T - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$$= A\cos(2\pi - \frac{\omega x}{u} + \varphi_0) = y(x,0)$$

每经历一个时间周期T，波形曲线相同

在波传播过程中，每经历一个时间周期T，各质点的相位增加2π；

所以任意质点t时刻的相位较初始时刻增加 $\frac{2\pi}{T}t$



3、x 和 t 都变化

波函数表示波线上所有质点在不同时刻的位移。若t增加Δt，x增加$\Delta x = u\Delta t$,则y不变，x处同一振动状态经Δt时间传到$x+\Delta x$处，相应波形曲线沿传播方向移动Δx的距离.

(x,t)与（$x+\Delta x, t+\Delta t$)处的相位相同

$$\frac{2\pi}{\lambda}(ut-x)=\frac{2\pi}{\lambda}[u(t+\Delta t)-(x+\Delta x)]$$

结论：波的传播是相位的传播（行波）

总结：$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

在波的传播过程中，一方面振动相位随时间**t**增加，每经历一个周期**T**质点振动相位增加**2π**，故每经历单位时间质点的相位增加 $\frac{2\pi}{T}$

因而每经历时间**t**，任一质点的相位增加 $\frac{2\pi}{T}t$

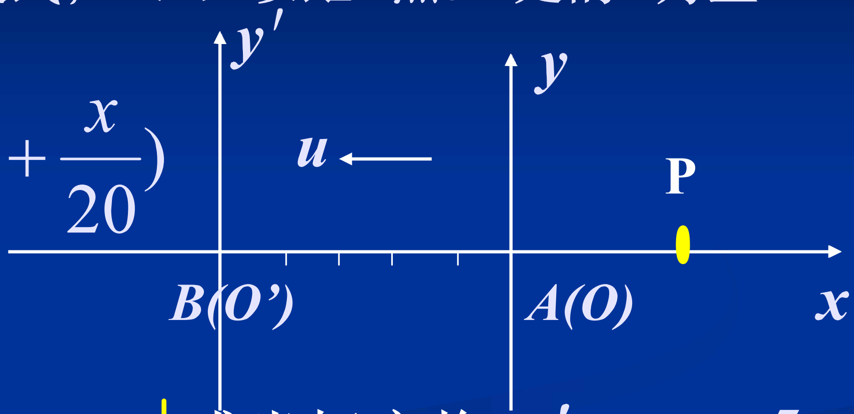
另一方面，沿传播方向每增加一个波长λ的距离，该质点相位较原处落后**2 π**，故沿传播方向每前进单位距离的质点相位落后 $\frac{2\pi}{\lambda}$

因而每沿传播方向增加距离**x**，该质元的相位滞后 $\frac{2\pi}{\lambda}x$

所以**x**处质点**t**时刻的相位为 $\varphi_0+\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x$

从而波动表达式为：$y(x,t)=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0)$

例　一平面简谐波在介质中以速度 $u = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，沿 Ox轴的负向传播。已知A点的振动方程为$y = 3\cos(4\pi t)$，则（1）以A点为坐标原点求波动表达式；（2）以距A点5m处的B为坐标原点求波动表达式。



解(1)　$y = 3\cos 4\pi(t + \frac{x}{20})$

B点振动表达式为：

$$x = -5\mathrm{m}$$

$$y_B = 3\cos(4\pi t - \pi)$$

(2)波动表达式为：

$$y' = 3\cos[4\pi(t + \frac{x'}{20}) - \pi]$$

或坐标变换 $x' = x + 5$

$$y' = 3\cos 4\pi(t + \frac{x' - 5}{20})$$

$$= 3\cos\left[4\pi(t + \frac{x'}{20}) - \pi\right]$$

例 横波沿一张紧的长绳传播，波动表达式为： $y=0.04\cos\pi(5x-200t)$。求（1）A, ν, λ, u；（2）如每米弦的质量为$0.05\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$，求绳中张力。（例11-1）

解：将表达式写成标准形式

$$y=0.04\cos 2\pi\left(\frac{t}{1/100}-\frac{x}{2/5}\right)$$

$$A=0.04\text{m} \qquad T=0.01\text{s}$$

$$\nu=\frac{1}{T}=100\ \text{Hz} \qquad \lambda=\frac{2}{5}=0.4\text{m}$$

$$u=\frac{\lambda}{T}=\frac{0.4}{0.01}=40\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\because \quad u=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$T=u^2\mu$$

$$=40^2\times 0.05\text{N}$$

$$=80\text{N}$$

例：一平面简谐波以波速 $u = 200\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 沿 x 轴正方向传播, 在 $t = 0$ 时刻的波形如图所示。

(1) 求 O 点的振动方程并写出波动表达式；

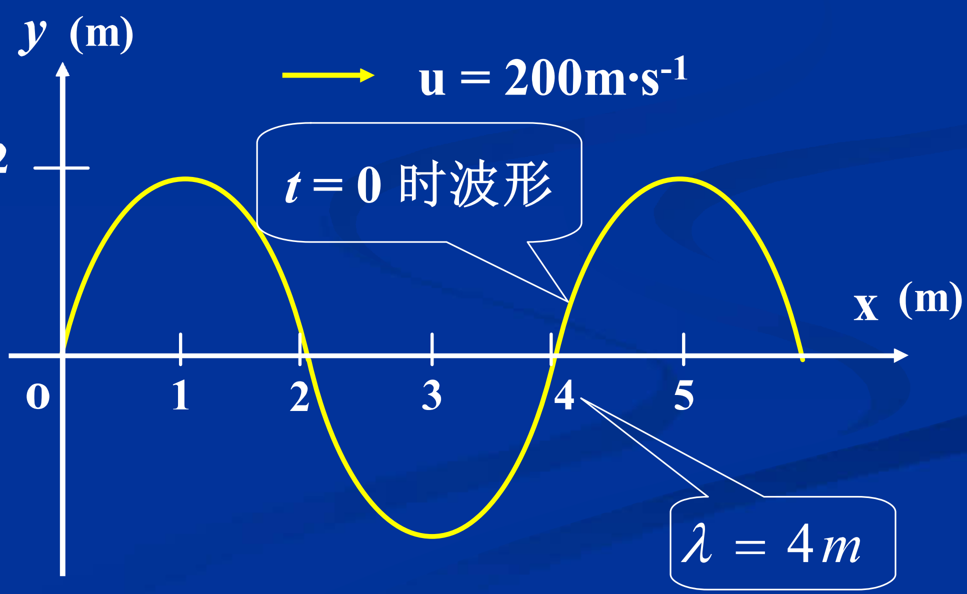
(2) 求 $t = 0.1$ s , $x = 10$ m 处质点的位移、振动速度和加速度。

解：

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{200}{4} = 50Hz$$

$$\omega = 2\pi\nu = 100\pi(s^{-1})$$

为方便起见，以下均用 SI 制，单位略去。

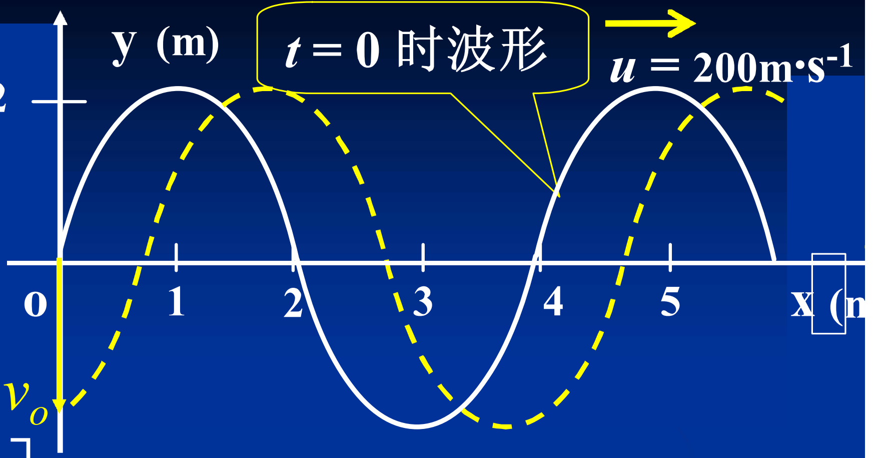


$$\omega = 2\pi\nu = 100\pi s^{-1}$$

解：(1) O 点振动方程

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$= 0.02\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$



波动表达式

$$y = 0.02\cos\left[100\pi(t - \frac{x}{200}) + \frac{\pi}{2}\right]$$

(2) $t = 0.1$ s，$x = 10$ m 处质点

位移 $$y = 0.02\cos\left[100\pi(t - \frac{x}{200}) + \frac{\pi}{2}\right] = 0$$

速度 $$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -0.02\times100\pi\sin\left[100\pi(t - \frac{x}{200}) + \frac{\pi}{2}\right] = 2\pi$$

加速度 $$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -0.02\times(100\pi)^2\cos\left[100\pi(t - \frac{x}{200}) + \frac{\pi}{2}\right] = 0$$

二、波动微分方程

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi_0] \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{u^2}\omega^2 A\cos[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi_0] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

波动微分方程

一般情况下，物理量ξ (x,y,z,t)在三维空间中以波的形式传播，则波动方程

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

例：一平面简谐波沿x轴正向传播，A=10cm,ω=7πrad/s,当t=1.0s时，x=10cm处质点正通过其平衡位置向y轴负方向运动，而x=20cm处的质点正通过y=5.0cm向y轴正方向运动，设λ>10cm,求该平面波的表达式。

解：设该平面波的表达式为 $y = 10\cos(7\pi t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0)[cm]$

$$\left.\begin{array}{l} t = 1.0s, x = 10cm, y_1 = 0, v_1 < 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \\ t = 1.0\text{时}, x_2 = 20cm, y_2 = \frac{1}{2}A, v_2 > 0 \Rightarrow \varphi_2 = -\frac{\pi}{3} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(20-10) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{5\pi}{6} \qquad \therefore \lambda = 24cm$$

$$\varphi_1 = 7\pi - \frac{20\pi}{\lambda} + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \varphi_0 = -\frac{17}{3}\pi$$

$$y = 10\cos(7\pi t - \frac{2\pi}{24}x - \frac{17}{3}\pi)[cm]$$