§9.4 感生电动势　感生电场

一、感生电动势

二、有旋电场

三、电磁感应定律的普遍形式

§9.4 感生电动势　感生电场

一、 感生电动势：回路在磁场中没有相对运动，仅由磁场的变化而产生的感应电动势。

二、涡旋电场定义：变化的磁场在其周围空间激发一种新的电场，这种电场称为涡(有)旋电场。

感生电动势：$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\phi}{dt}$

库仑场 $\vec{E}_c$（静电场）与涡(有)旋电场 $\vec{E}_r$ 的关系：

库仑场：电荷按库仑定律激发电场，电力线不闭合，场强环流为零，是有势场。

$$\begin{cases} \oint_L \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0 \\ \oint_s \vec{E}_c \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(s)} q_i \end{cases}$$

涡(有)旋电场：由变化的磁场激发电场，电力线闭合，场强环流不为零，非势场

$$\begin{cases} \varepsilon = \oint_L \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\phi}{dt} \\ \oint_s \vec{E}_r \cdot d\vec{s} = 0 \end{cases}$$

§9.4 感生电动势　感生电场

相同点：二者对电荷都有作用力。

不同点：

①、有旋电场不是由电荷激发的，而是由变化的磁场激发电场；

②、有旋电场的电力线是闭合的，是非势场。

三、电磁感应定律的普遍形式

$$\because \vec{E}=\vec{E}_c+\vec{E}_r \qquad \oint \vec{E}_c\cdot d\vec{l}=0 \qquad \oint \vec{E}_r\cdot d\vec{l}=-{d\phi}/{dt}$$

$$\therefore \oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=-{d\phi}/{dt}=-\frac{d}{dt}\iint_{(S)}\vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \oint_{(L)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint_{(S)}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

———电磁感应定律的积分形式。

§9.4 感生电动势　感生电场

四、有旋电场和感生电动势的计算

1.有旋电场的计算一般情况比较复杂,但对于场的分布具有特殊对称的情况可利用有旋电场的性质求解.

$$\oint_L \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

2.感生电动势的计算

(1).利用法拉第电磁感应定律计算

(2).利用定义计算

(a)对于一个闭合回路: $\varepsilon = \oint_L \vec{E}_r \cdot d\vec{l}$

(b)对于一段导线: $\varepsilon = \int_L \vec{E}_r \cdot d\vec{l}$

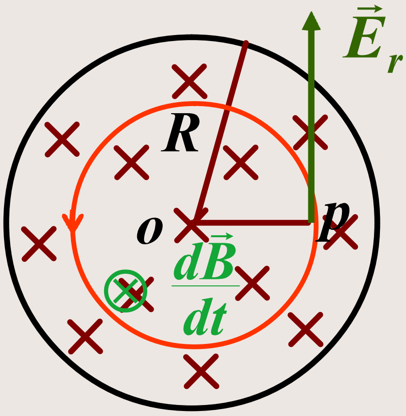
§9.4 感生电动势　感生电场

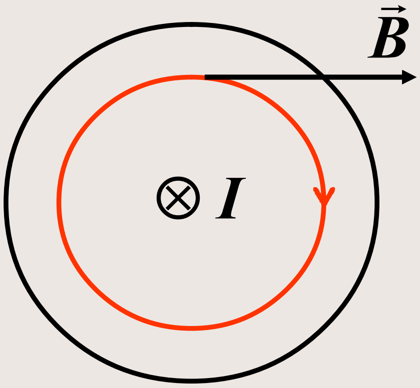
例1、半径为R的圆柱形空间分布着均匀磁场，其横截面如图，磁感应强度$\vec{B}$随时间以恒定速率$dB/dt > 0$变化，试求感生电场的分布。

(比较无限长通电圆柱：$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_s \vec{j}\cdot d\vec{s}$)

[解]　$\oint \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = E_r \cdot 2\pi r$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \frac{dB}{dt}\iint dS$$



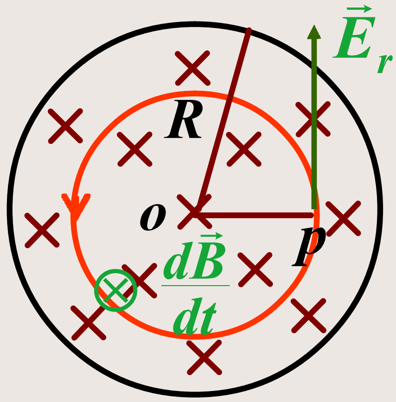


§9.4 感生电动势 感生电场

1、$r < R$时.

$$\because E_r \cdot 2\pi r = \frac{dB}{dt}\pi r^2$$

$$\therefore E_r = \frac{1}{2} r \frac{dB}{dt}$$



2、$r > R$时.

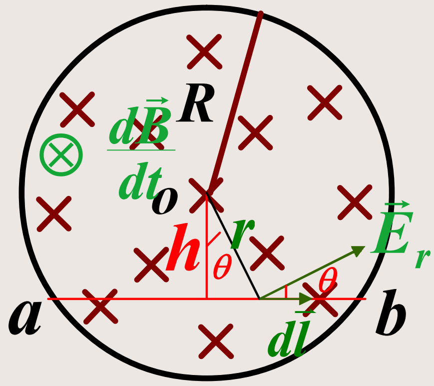
$$\because E_r \cdot 2\pi r = \frac{dB}{dt}\pi R^2$$

$$\therefore E_r = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

$$\text{大小：} E_r = \begin{cases} \dfrac{1}{2} r \dfrac{dB}{dt} & r < R \\ \dfrac{R^2}{2r} \dfrac{dB}{dt} & r > R \end{cases}$$

有旋电场线的绕向与 $\frac{d\vec{B}}{dt}$ 的方向成左手螺旋关系 .

例2、如图，在上题圆柱的截面内放置一长为L金属棒，金属棒为圆的弦，弦到圆心的距离为h，求棒中感生电动势。



解法一：

大小：$E_r = \begin{cases} \dfrac{1}{2} r \dfrac{dB}{dt} & r < R \\ \dfrac{R^2}{2r}\dfrac{dB}{dt} & r > R \end{cases}$

方向垂直于过该点处的半径。

在棒上取 $d\vec{l}$，则

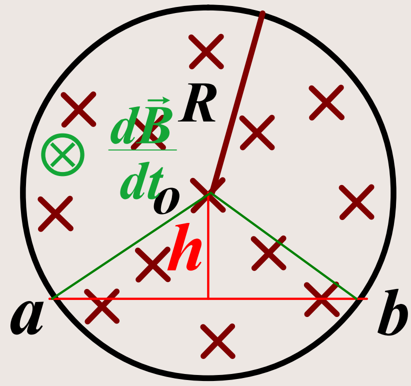
$$d\varepsilon = \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = E_r \cos\theta dl = \frac{1}{2} r \frac{dB}{dt} \cos\theta dl = \frac{1}{2} h \frac{dB}{dt} dl$$

$$\varepsilon = \int_0^L \frac{1}{2} h \frac{dB}{dt} dl = \frac{1}{2} hL \frac{dB}{dt}$$

方向：$a \rightarrow b$

法二:

$$\text{大小: } E_r = \begin{cases} \frac{1}{2} r \frac{dB}{dt} & r < R \\ \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} & r > R \end{cases}$$



方向垂直于过该点处的半径。

联接oa、ob形成闭合回路。 $\varepsilon_{oa} = \varepsilon_{bo} = 0$

$$\therefore \varepsilon_{ab} = \varepsilon_{oabo}$$

$$\phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} LhB$$

$$\varepsilon = \left| \frac{d\phi}{dt} \right| = \frac{1}{2} Lh \frac{dB}{dt}$$

方向: $a \rightarrow b$

例题3、一根无限长直导线通电流$I = I_0 \cos\omega t$,式中I_0,ω为常数.矩形回路平面与之共面(如图).求矩形回路线圈的感应电动势的大小.

解:如图建立坐标系, $B(x) = \dfrac{\mu_0 I_0 \cos\omega t}{2\pi x}$

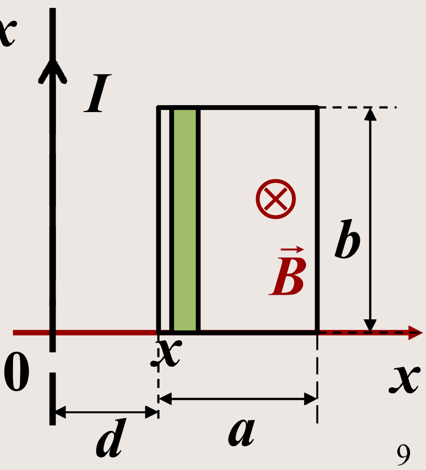
取面元$ds = bdx$,如图.方向$\otimes$

$$d\Phi_m = \vec{B}\cdot d\vec{s} = Bds = \frac{\mu_0 I_0 \cos\omega t b}{2\pi x}dx$$

$$\therefore \Phi_m = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I_0 \cos\omega t b}{2\pi x}dx$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 \cos\omega t b}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

$$\varepsilon = \left|\frac{d\Phi_m}{dt}\right| = \frac{\mu_0 I_0 \omega b|\sin\omega t|}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$



§9.5　自感和互感

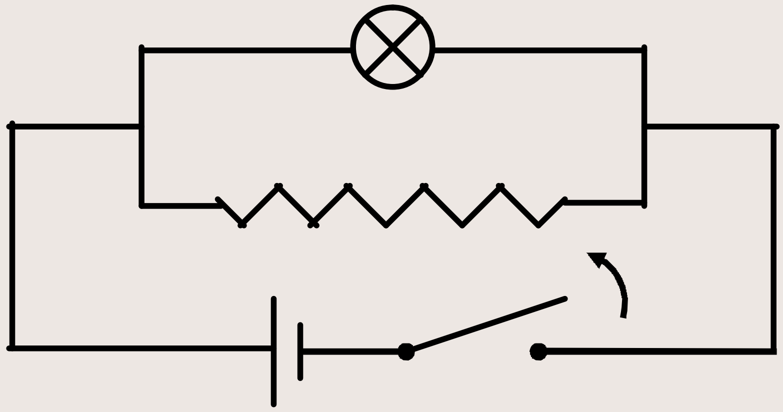
一、自感

二、互感

§9.5　自感和互感

一、自感

定义：当一个线圈中的电流发生变化时，它所激发的磁场穿过该线圈自身的磁通量也随之发生变化，从而在这个线圈中产生感应电动势，这种现象称为自感现象。这种电动势称为自感电动势。



§9.5 自感和互感

$\because \psi \to B \to I$

$\therefore \psi = LI$ （定义①）

若线圈回路和周围磁介质均不变,则自感电动势为:

$$\varepsilon_L = -\frac{d\psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$ （定义②）

L决定于回路的几何形状以及周围磁介质的磁导率。

求自感系数 L 的步骤:

① 假定回路中通有电流 I, 求出 $\vec{B}$的分布;

② 求出回路中的全磁通 ψ; 利用

$$L = \frac{\psi}{I}.$$

§9.5 自感和互感

例题1.已知一空心单层密绕的长直螺线管,长为 l ,截面积为 s ,单位长度匝数为 n .管内为真空,求长直螺线管的自感系数.

解:设螺线管通电为I,忽略边缘效应,管内为均匀磁场

$$B=\mu_0 nI$$

磁通量: $\phi = NBS = nl\mu_0 nIS = \mu_0 n^2 VI$

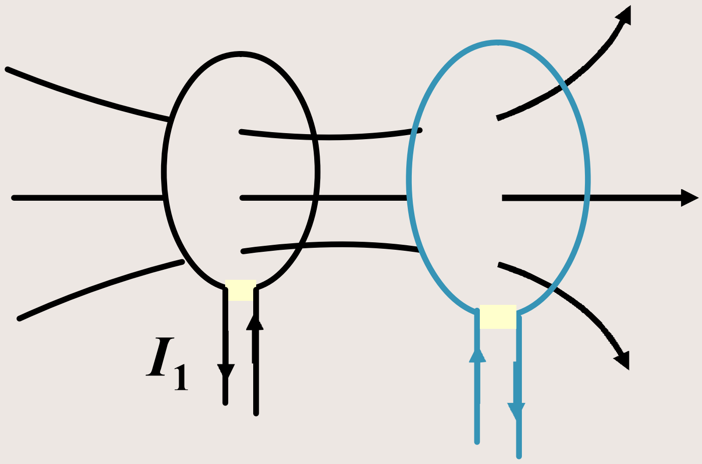
$$\boxed{\therefore L=\frac{\phi}{I}=\mu_0 n^2 V}$$

若管内充满磁导率为 μ 的磁介质,则

$\boxed{L=\mu n^2 V}$ $\mu=\mu_r\mu_0$ μ_r :介质相对磁导率

二、互感

定义：当一个线圈中的电流发生变化时，将在它周围空间产生变化的磁场，从而在它附近的另一个线圈中产生感应电动势，这种现象称为互感现象。这种电动势称为互感电动势。



§9.5 自感和互感

$\because \psi_{21} \rightarrow B_1 \rightarrow I_1$

$\therefore \psi_{21} = M_{21} I_1$

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

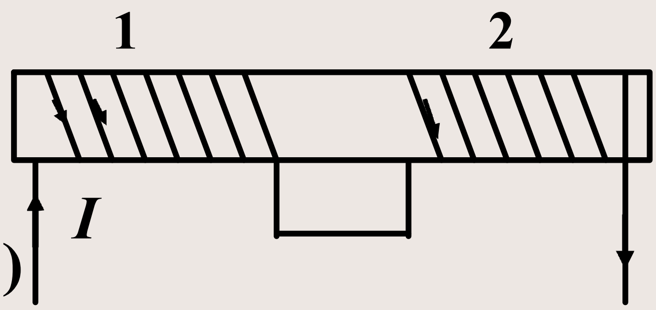
$\therefore \psi_{12} = M_{12} I_2$ （定义①）

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$ （定义②）

可以证明：$M_{21} = M_{12} = M$ 单位：亨利（**H**）。

M只和两个回路的形状，相对位置及周围磁介质的磁导率有关。

例2. 求自感系数分别为 L_1和 L_2的两个线圈串联的自感系数。



[解]: 1. 顺接

$$\because \varepsilon_1 + \varepsilon_{21} = -(L_1 \frac{dI}{dt} + M\frac{dI}{dt})$$

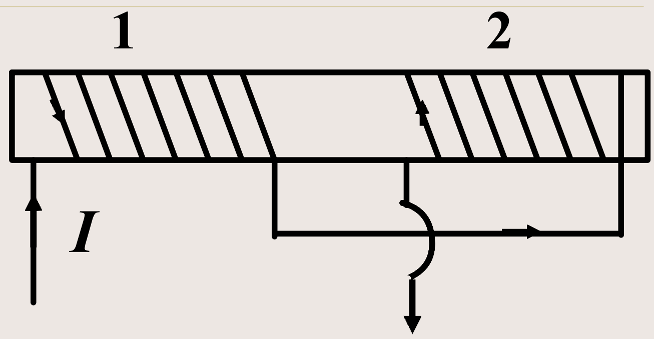
$$\varepsilon_2 + \varepsilon_{12} = -(L_2 \frac{dI}{dt} + M\frac{dI}{dt})$$

$$\therefore \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_{21} + \varepsilon_2 + \varepsilon_{12} = -(L_1 + L_2 + 2M)\frac{dI}{dt}$$

$$\therefore L = L_1 + L_2 + 2M$$

法二：$\psi = L_1 I + MI + L_2 I + MI = (L_1 + L_2 + 2M)I$

$$\therefore L = \frac{\psi}{I} = L_1 + L_2 + 2M$$



2. 反接

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_{21} + \varepsilon_2 - \varepsilon_{12}$$

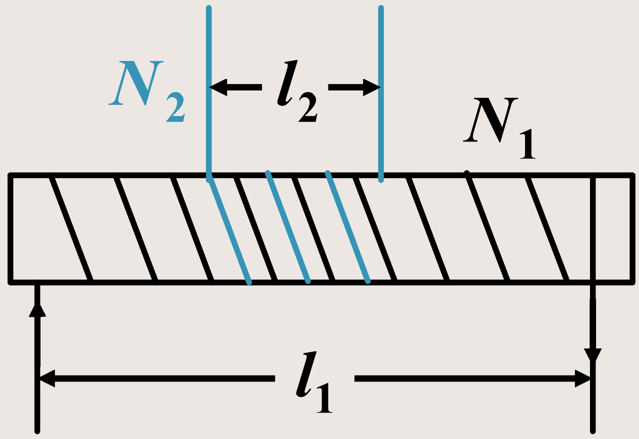
$$= -(L_1 + L_2 - 2M)\frac{dI}{dt}$$

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

法二：$\psi = L_1 I - MI + L_2 I - MI = (L_1 + L_2 + 2M)I$

$$L = \frac{\psi}{I} = L_1 + L_2 - 2M$$

例3. 两个共轴螺线管的长度、面积和匝数分别为 l_1,S_1,N_1 和 l_2,S_2,N_2，螺线管2绕在螺线管1的中部，设 $l_1=30cm,S_1=10cm^2,N_1=1600$；$l_2=5cm$，$S_2=11cm^2,N_2=150$.（1）、试求两个螺线管之间的互感 M；（2）、若螺线管1中电流的变化率为 $50.0\,mA/s$ 试求螺线管2中的感应电动势。



[解] 1、$\because B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \mu_0 \dfrac{N_1}{l_1} I_1$

$\therefore \psi_{21} = N_2 B_1 S_1$

$$\therefore M = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1}{l_1} = 1.01(mH)$$

2、$|\varepsilon| = M\dfrac{dI_1}{dt}$

$$= 1.01\times 10^{-3}\times 50.0\times 10^{-3}V = 50.5(\mu V)$$

三、自感与互感的关系

$$\boxed{M = k\sqrt{L_1 L_2}} \qquad 0 \le k \le 1$$

$k = 1$，称为理想耦合(两线圈共轴靠近放置).

$k = 0$，称为松耦合(两线圈轴线垂直，轴心重合)