

文章编号: 1000-4750(2016)08-0177-08

基于变分原理的波形钢腹板箱梁挠度计算解析法

姚 浩¹, 程 进^{1,2}

(1. 同济大学桥梁工程系, 上海 200092; 2. 同济大学土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

摘 要: 该文通过在纵向位移函数中引入翘曲变形函数以及剪切转角来分别考虑箱梁剪力滞效应和波形钢腹板剪切变形的影响, 基于能量变分原理, 提出一种波形钢腹板箱梁挠度计算的解析方法。并分别针对单箱单室和单箱双室波形钢腹板箱梁算例, 将该文方法与仅考虑波形钢腹板剪切变形的挠度计算方法及有限元值进行比较分析。结果表明: 该文方法具有较高的准确性; 剪切变形影响系数随高跨比和宽跨比的增大明显增大, 而剪力滞效应影响系数受高跨比的变化影响较小。

关键词: 波形钢腹板箱梁; 解析法; 剪力滞效应; 剪切变形; 变分原理; 挠度

中图分类号: U441 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2015.06.0527

ANALYTICAL METHOD FOR CALCULATING DEFLECTION OF CORRUGATED BOX GIRDERS BASED ON VARIATIONAL PRINCIPLE

YAO Hao¹, CHENG Jin^{1,2}

(1. Department of Bridge Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. State Key Laboratory for Disaster Reduction of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A warping displacement function and a shear rotation are introduced in a longitudinal displacement function for considering the shear lag effect of a box girder and the shear deformation of corrugated webs. Based on a variational principle, an analytical method for calculating the deflection of corrugated box girders is proposed. For the cases of single-box single-cell and single-box double-cell girders, the results of the proposed method are compared with those of the methods which only considers the effect of shear deformation of corrugated webs and those of the finite element methods. The results show that the proposed method has high accuracy. The shear deformation coefficient significantly increases with the increase of depth-span ratio and width-span ratio while the shear lag effect coefficient is less affected by depth-span ratio.

Key words: box girders with corrugated steel webs; analytical method; shear lag effect; shear deformation; variational principle; deflection

波形钢腹板箱梁是采用波形钢腹板代替传统混凝土腹板的一种钢混组合箱梁。由于波形钢腹板的使用能够有效降低箱梁自重, 并且从根本上解决传统混凝土箱梁腹板斜裂缝的问题, 使得波形钢腹板组合箱梁桥在桥梁工程中得到广泛的研究和应用。传统的研究波形钢腹板静力性能的方法主要有

模型试验法、数值分析法和理论解析法。国外学者^[1-4]早在 20 世纪 90 年代已经通过大量模型试验对波形钢腹板梁的抗剪性能、抗弯性能、极限承载力等进行了系统的分析。国内吴文清等^[5-7]也通过试验研究了波形钢腹板箱梁的剪力滞效应, 扭转、畸变以及变形等性能。模型试验在准确反映波形钢

收稿日期: 2015-06-17; 修改日期: 2016-01-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(51178334); 科技部国家重点实验室基金项目(SLDRCE14-B-08)

通讯作者: 程进(1971—), 男, 上海人, 研究员, 博士, 主要从事桥梁结构理论、可靠度分析及抗风方面的研究(E-mail: chengjin@tongji.edu.cn).

作者简介: 姚浩(1992—), 男, 江苏南通人, 硕士生, 主要从事大跨度桥梁研究(E-mail: yh13120668772@163.com).

腹板梁的力学性能方面具有其独特的优势，但也同样存在试验花费较高以及诸多试验因素不可控的弊端。目前，对于波形钢腹板梁的数值分析法均倾向于采用实体或板单元模拟混凝土顶底板，采用壳单元模拟波形钢腹板，其对分析箱梁的剪力滞效应^[8]、畸变应力^[9]等均具有较高的精度。但是由于数值分析法对于大型桥梁的建模过程繁杂，计算效率低，也存在一定的不足。

通过合理的假定及简化，采用理论解析法研究波形钢腹板梁的力学性能能够揭示其力学机理及其与主要影响因素之间的相互关系，对于指导模型试验或数值分析法进行参数分析具有重要作用。当前对于波形钢腹板采用理论解析法的研究主要集中在箱梁的剪力滞效应^[10-11]。但对于波形钢腹板箱梁而言，箱梁的剪力滞效应及波形钢腹板的剪切变形均降低了箱梁的刚度，引起较大的变形^[12]。而已有的通过理论分析得到波形钢腹板箱梁挠度解析解法，或忽略了箱梁剪力滞效应的影响^[7,13]，或未对波形钢腹板剪切变形和箱梁剪力滞效应的影响进行深入分析^[14-15]，并且研究多集中于单箱单室波形钢腹板箱梁。本文将基于变分原理，提出一种综合考虑波形钢腹板剪切变形和箱梁剪力滞效应影响的单箱多室波形钢腹板箱梁挠度计算的解析方法。其次以简支梁作用跨中集中荷载和作用均布荷载为例，给出挠度控制微分方程的解析解。最后将本文提出的方法与文献[7]的方法进行比较，验证其精确性，并进一步检验公式推广到单箱多室箱梁的精度，最后，探究箱梁高跨比和宽跨比变化与剪切变形影响系数和剪力滞效应影响系数的关系。

1 基本假定

本文的推导和计算主要基于以下假定：

- ① 外荷载产生的弯矩均由混凝土顶底板承担，而剪力均由波形钢腹板承担，并且剪应力沿腹板高度方向均匀分布；
- ② 假设混凝土顶底板的翘曲变形(由剪力滞效应引起的翘曲变形)沿翼板高度方向均匀分布，而沿横向的分布采用余弦函数模拟；
- ③ 假设箱梁混凝土顶底板竖向纤维间无相互挤压，忽略混凝土顶底板平面外的剪应变及横向正应变；
- ④ 箱梁在弹性工作范围内，并且忽略普通钢筋和预应力钢筋的影响；

⑤ 忽略伸入箱梁顶底板的波形钢腹板的影响，计算模型均为等截面箱梁。

2 基于变分原理的波形钢腹板箱梁挠度计算解析法

本方法将基于上述假定，通过在纵向位移函数中引入翘曲变形函数以及剪切转角来分别考虑箱梁剪力滞效应和波形钢腹板剪切变形的影响，应用变分原理，得到以翘曲位移转角极值和竖向挠度为未知函数的单箱多室波形钢腹板箱梁挠度计算的控制微分方程，并推导挠度计算解析解。该方法包括纵向位移函数的描述、应变及应变能的计算、控制微分方程的推导以及挠度计算解析解四个部分，下面分别给出具体过程。

2.1 纵向位移函数的描述

图 1 所示为典型单箱多室波形钢腹板箱梁截面，其中 x 轴平行于梁轴线， y 轴为桥梁横向， z 轴为桥梁竖向。图中位于两腹板之间的顶板部分称为内翼板，位于腹板之外的顶板部分称为外伸板。

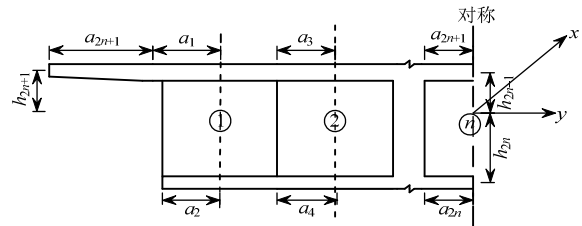


图 1 单箱多室波形钢腹板箱梁截面

Fig.1 Cross section of single-box multi-cell corrugated box girder

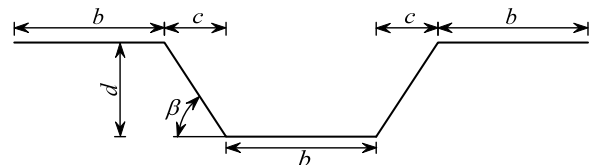


图 2 波形钢腹板形状参数

Fig.2 Geometric notations of corrugated webs

箱梁在竖向荷载对称荷载作用下，主要存在沿 x 轴方向的纵向位移及沿 z 轴方向的竖向位移。混凝土顶底板任意位置的纵向位移由两部分组成：

- 1) 由截面倾角 θ 引起的纵向位移 $U_1 = z \cdot \theta$ ，其中 θ 为截面弹性轴线的斜率，则 $\theta = \omega'(x) - \alpha(x)$ ， $\omega'(x)$ 表示由竖向弯曲挠度引起的梁弹性轴线转角， $\alpha(x)$ 为截面剪切转角。根据假定①，波形钢腹板内剪应力沿高度方向均匀分布，可得截面的剪切转角 $\alpha(x)$ 为：

$$\alpha(x) = \frac{\tau(x)}{G_w} = \frac{Q(x)}{G_w A_w} \quad (1)$$

式中： $Q(x)$ 为外荷载产生的梁内竖向剪力； G_w 为波形钢腹板的等效剪切模量，根据 Johnson 和 Cafolla^[16]的研究，可采用式 $G_w = G(b+c)/(b+c \sec \beta)$ 计算得到，其中 b 、 c 、 β 为波形钢腹板形状参数，如图 2 所示， G 为钢材剪切模量； A_w 是波形钢腹板的受剪面积。

因此： $U_1(x, y, z) = z(\omega'(x) - \alpha(x))$ 。

2) 由箱梁剪力滞效应引起的纵向位移 $U_2(x, y, z) = z \cdot \xi(y)u(x)$ ，其中 $\xi(y)$ 为假设的横截面翘曲函数， $u(x)$ 为横截面顶底板翘曲位移转角极值。鉴于文献[17]提出余弦函数作为翘曲函数计算箱梁剪力滞系数的精确性，本文翘曲函数同样采用余弦函数。根据假定②，各箱室翘曲变形基于其局部坐标系给出，仅是横向坐标 y 的函数：

$$\xi(y) = \begin{cases} \cos \frac{\pi y}{2a_{2i-1}}, & i=1,2,\dots,n & \text{顶板内翼板} \\ \cos \frac{\pi y}{2a_{2i}}, & i=1,2,\dots,n & \text{底板} \\ \cos \frac{\pi y}{2a_{2n+1}} & & \text{顶板外伸板} \end{cases} \quad (2)$$

式中： a_{2i-1} 、 a_{2i} ($i=1,2,\dots,n$) 分别为箱室 i 顶板内翼板及底板的半宽； a_{2n+1} 为外伸板宽度(如图 1 所示)。

混凝土顶底板纵向位移函数可写为：

$$U(x, y, z) = U_1(x, y, z) + U_2(x, y, z) = z(\omega'(x) - \alpha(x) + \xi(y)u(x)) \quad (3)$$

2.2 应变及应变能的计算

根据假定③，忽略混凝土顶底板平面外的剪切变形 γ_{xz} 和 γ_{yz} 及横向应变 ε_y ，仅考虑面内的剪应变 γ_{xy} 以及纵向的正应变 ε_x 。因此箱梁各箱室顶板内翼板、底板、顶板外伸板应变计算如下：

顶板内翼板：

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = z \left(\omega''(x) - \alpha'(x) + \cos \frac{\pi y}{2a_{2i-1}} u'(x) \right) \quad (4a)$$

$$\gamma_{xy1} = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} = z \left(-\frac{\pi}{2a_{2i-1}} \sin \frac{\pi y}{2a_{2i-1}} u(x) \right) \quad (4b)$$

底板：

$$\varepsilon_{x2} = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = z \left(\omega''(x) - \alpha'(x) + \cos \frac{\pi y}{2a_{2i}} u'(x) \right) \quad (5a)$$

$$\gamma_{xy2} = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} = z \left(-\frac{\pi}{2a_{2i}} \sin \frac{\pi y}{2a_{2i}} u(x) \right) \quad (5b)$$

顶板外伸板：

$$\varepsilon_{x3} = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = z \left(\omega''(x) - \alpha'(x) + \cos \frac{\pi y}{2a_{2n+1}} u'(x) \right) \quad (6a)$$

$$\gamma_{xy3} = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} = z \left(-\frac{\pi}{2a_{2n+1}} \sin \frac{\pi y}{2a_{2n+1}} u(x) \right) \quad (6b)$$

式中： ε_{x1} 、 ε_{x2} 、 ε_{x3} 分别为顶板内翼板、底板和顶板外伸板的纵向正应变； γ_{xy1} 、 γ_{xy2} 、 γ_{xy3} 分别为顶板内翼板、底板和顶板外伸板的面内剪应变。

箱梁的应变能包括顶板、底板及波形钢腹板的应变能：

顶板内翼板：

$$V_1 = \int_0^l \iint_A (E_c \varepsilon_{x1}^2 + G_c \gamma_{xy1}^2) dydz dx \quad (7)$$

底板：

$$V_2 = \int_0^l \iint_A (E_c \varepsilon_{x2}^2 + G_c \gamma_{xy2}^2) dydz dx \quad (8)$$

顶板外伸板：

$$V_3 = \int_0^l \iint_A (E_c \varepsilon_{x3}^2 + G_c \gamma_{xy3}^2) dydz dx \quad (9)$$

式中： V_1 、 V_2 、 V_3 分别为混凝土顶板内翼板、底板以及顶板外伸板的总应变能； E_c 、 G_c 分别为混凝土的弹性模量和剪切模量。

波形钢腹板：

$$V_w = \int_0^l \iint_A (G_w \alpha^2(x)) dydz dx = A_w \int_0^l G_w \alpha^2(x) dx \quad (10)$$

式中， V_w 为波形钢腹板的应变能。

从而总应变能采用下式得到：

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_w \quad (11)$$

分别将应变公式(4)~式(6)代入相应的应变能计算式(7)~式(9)，则可计算得到波形钢腹板箱梁各部位的应变能，进而代入式(11)，得到体系的总应变能为：

$$V = \frac{E_c I_c}{2} \int_0^l \left[(\omega''(x) - \alpha'(x))^2 + \frac{4}{\pi} (\omega''(x) - \right.$$

$$\alpha'(x)u'(x) + \frac{1}{2}u'(x)^2 \Big] dx + \frac{G_c}{2} \int_0^l \frac{\pi^2}{8} \cdot \left(\frac{A_1 h_1^2}{a_1^2} + \frac{A_2 h_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{A_{2n} h_{2n}^2}{a_{2n}^2} + \frac{A_{2n+1} h_{2n+1}^2}{a_{2n+1}^2} \right) \cdot u(x)^2 dx + A_w \int_0^l G_w \alpha^2(x) dx \quad (12)$$

式中: I_c 为顶底板对截面中性轴的总惯性矩, $I_c = (A_1 h_1^2 + A_2 h_2^2 + \dots + A_{2n} h_{2n}^2 + A_{2n+1} h_{2n+1}^2)$; A_{2i-1} 、 A_{2i} ($i=1, 2, \dots, n$) 分别为箱室 i 顶板内翼板及底板的面积; A_{2n+1} 为外伸板面积; h_{2i-1} 、 h_{2i} ($i=1, 2, \dots, n$) 分别为箱室 i 顶板内翼板、底板形心到截面中性轴的距离; h_{2n+1} 为顶板外伸板形心到截面中性轴的距离。

2.3 控制微分方程的推导

根据最小势能原理, 当结构处于平衡状态时, 任何容许的虚位移发生时, 体系的总势能的一阶变分为零:

$$\delta\pi = \delta(V + W) = 0 \quad (13)$$

式中: V 为结构总应变能, 由式(12)求得; W 为体系外力势能, 采用下式计算:

$$W = \int_0^l M(x)[\omega''(x) - \alpha'(x)] dx + \int_0^l Q(x)\alpha(x) dx \quad (14)$$

式中, $M(x)$ 为外荷载产生的梁内弯矩。

将式(12)及(14)代入式(13), 根据变分原理, $\delta\pi = 0$, 从而得到以箱梁竖向挠度 $\omega(x)$ 和横截面翘曲位移转角极值 $u(x)$ 为未知函数的控制微分方程:

$$u''(x) - k^2 u(x) = \eta Q(x) \quad (15)$$

$$\omega''(x) - \alpha'(x) + \frac{2}{\pi} u'(x) + \frac{\pi^2 - 8}{4\pi} \eta M(x) = 0 \quad (16)$$

以及自然边界条件:

$$\frac{E_c I_c}{2} \left[\frac{4}{\pi} (\omega''(x) - \alpha'(x)) - u'(x) \right] \delta u(x) \Big|_0^l = 0 \quad (17)$$

式中, k 和 η 分别表示为:

$$k = \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{4} G_c \left(\frac{A_1 h_1^2}{a_1^2} + \frac{A_2 h_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{A_{2n} h_{2n}^2}{a_{2n}^2} + \frac{A_{2n+1} h_{2n+1}^2}{a_{2n+1}^2} \right)}{(\pi^2 - 8) E_c I_c}}$$

$$\eta = \frac{4\pi}{(\pi^2 - 8) E_c I_c}$$

在上述 k 、 η 的表达式中令 $n=1$, 则式(15)、式(16)转化为单箱单室波形钢腹板箱梁的控制方程。

根据已知的截面参数及材料性质, 分别求出系数 k 、 η , 首先由式(15), 并结合外荷载产生的剪力求得横截面翘曲位移转角极值 $u(x)$ 的表达式, 代入

式(16), 并结合式(1)及外荷载产生的弯矩即可得到波形钢腹板箱梁竖向挠度的解析表达式。

2.4 挠度计算解析解

限于篇幅, 下面仅针对简支梁作用跨中集中荷载的典型工况, 给出挠度解析解的推导全过程。对于简支梁作用均布荷载的情况, 直接给出解析解计算公式。

对于图3所示作用跨中集中荷载的波形钢腹板简支箱梁。梁内的弯矩和剪力分别为:

$$Q(x) = \frac{P}{2} \quad (18a)$$

$$M(x) = \frac{P}{2} x \quad (18b)$$

式(15)的通解为:

$$u(x) = C_1 \sinh kx + C_2 \cosh kx + u^* \quad (19)$$

式中: C_1 、 C_2 为积分常数, 根据边界条件求得; u^* 为非齐次方程的特解, 根据剪力 $Q(x)$ 的表达式选取, 可取特解为 $u^* = -\eta P / 2k^2$ 。因此横截面翘曲位移转角极值 $u(x)$ 的表达式为:

$$u(x) = C_1 \sinh kx + C_2 \cosh kx - \frac{\eta P}{2k^2} \quad (20)$$

由边界条件 $u'(0) = 0$, $u(l/2) = 0$ 求得积分常数 C_1 、 C_2 后, 得到:

$$u(x) = \frac{\eta P}{2k^2 \cosh \frac{kl}{2}} \cosh kx - \frac{\eta P}{2k^2} \quad (21)$$

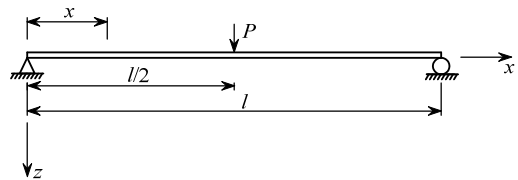


图3 简支波形钢腹板箱梁作用集中荷载示意图

Fig.3 Simply supported corrugated box girder under concentrated load at midspan

将式(21)、式(18b)代入式(16), 并结合式(1), 得到挠度表达式为:

$$\omega(x) = -\frac{Px^3}{12E_c I_c} + \frac{Px}{2G_w A_w} - \frac{\eta P \sinh kx}{\pi k^3 \cosh \frac{kl}{2}} + C_3 x + C_4 \quad (22)$$

式中: C_3 、 C_4 为积分常数, 根据边界条件 $\omega(0) = 0$, $\omega'(l/2) - \alpha(l/2) = 0$, 分别求得:

$$C_3 = \frac{Pl^2}{16E_c I_c} + \frac{\eta P}{\pi k^2}, \quad C_4 = 0$$

将上述积分常数代入式(22), 则得到简支波形钢腹板箱梁作用跨中集中荷载下挠度计算解析解:

$$\omega(x) = \frac{P}{4E_c I_c} \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{l^2 x}{4} \right) + \frac{Px}{2G_w A_w} + \frac{P\eta}{\pi k^3} \left(kx - \sinh kx / \cosh \frac{kl}{2} \right) \quad (23)$$

式中, 令 $x=l/2$, 则得到简支梁跨中竖向挠度:

$$\omega\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{48E_c I_c} + \frac{Pl}{4G_w A_w} + \frac{\eta P}{\pi k^3} \left(\frac{kl}{2} - \tanh \frac{kl}{2} \right) = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 \quad (24)$$

式中: ω_0 表示由初等梁理论(欧拉梁理论)得到的挠度部分, $\omega_0 = \frac{Pl^3}{48E_c I_c}$; ω_1 表示由波形钢腹板剪切

变形引起的挠度部分, $\omega_1 = \frac{Pl}{4G_w A_w}$; ω_2 表示由剪力滞效应引起的挠度部分, $\omega_2 = \frac{\eta P}{\pi k^3} \left(\frac{kl}{2} - \tanh \frac{kl}{2} \right)$ 。

据此, 简支波形钢腹板箱梁作用均布荷载下挠度计算解析解:

$$\omega(x) = \frac{q}{2E_c I_c} \left(\frac{l^3 x}{12} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{q(lx - x^2)}{2G_w A_w} + \frac{2\eta q}{\pi k^4} \left(1 - \cosh kx + \tanh \frac{kl}{2} \cdot \sinh kx + \frac{k^2 x^2}{2} - \frac{k^2 lx}{2} \right) \quad (25)$$

从而得到简支梁跨中竖向挠度:

$$\omega(l/2) = \frac{5ql^4}{384E_c I_c} + \frac{ql^2}{8G_w A_w} + \frac{2\eta q}{\pi k^4} \left(1 - \cosh \frac{kl}{2} + \tanh \frac{kl}{2} \cdot \sinh \frac{kl}{2} - \frac{k^2 l^2}{8} \right) = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 \quad (26)$$

式中: ω_0 表示由初等梁理论(欧拉梁理论)得到的挠度部分, $\omega_0 = \frac{5ql^4}{384E_c I_c}$; ω_1 表示由波形钢腹板剪切

变形引起的挠度部分, $\omega_1 = \frac{ql^2}{8G_w A_w}$; ω_2 表示由剪

力滞效应引起的挠度部分, $\omega_2 = \frac{2\eta q}{\pi k^4} \left(1 - \cosh \frac{kl}{2} + \tanh \frac{kl}{2} \cdot \sinh \frac{kl}{2} - \frac{k^2 l^2}{8} \right)$ 。

3 算例

为验证本文提出的解析法的正确性, 分别选取单箱单室和单箱双室波形钢腹板简支箱梁算例进行分析。

3.1 单箱单室箱梁算例

下面将本文提出的解析法得到的简支梁跨中挠度值与文献[7]的挠度计算方法(在初等梁理论计算挠度上直接叠加波形钢腹板剪切变形挠度作为波形钢腹板箱梁总挠度)进行比较。文献[7]所采用的单箱单室波形钢腹板箱梁截面特性如图4所示, 集中荷载 P 加载于波形钢腹板位置处以消除箱型截面扭转、畸变及横向弯曲效应的影响。波形钢腹板的形状参数分别为: $a=30$ mm, $c=26$ mm, $\beta=30^\circ$, $t_w=1$ mm。混凝土材料弹性模量和剪切模量分别为: $E_c=2.7 \times 10^{10}$ Pa, $G_c=1.08 \times 10^{10}$ Pa; 钢材的剪切模量为 $G=8.4 \times 10^{10}$ Pa。

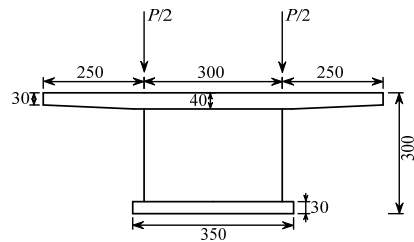


图4 单箱单室波形钢腹板箱梁截面 /mm

Fig.4 Cross section of single-box single-cell corrugated box girder

表1列出了集中荷载 $P=25$ kN 下文献[7]给出的跨中挠度随主梁跨度变化的公式计算结果、ANSYS 有限元计算结果以及与文本解析公式计算结果的比较。其中横断面尺寸保持不变, 变化梁的计算跨径($l=3$ m、4.5 m、6 m、7.5 m、9 m)。

从表1可以看出, 由于综合考虑了波形钢腹板箱梁腹板剪切变形和箱梁剪力滞效应的影响, 本文解析法计算值位于文献[7]计算值与有限元计算值之间, 比在初等梁理论值基础上简单叠加波形钢腹板剪切变形值的计算方法更精确。

表1 单箱单室波形钢腹板箱梁跨中挠度值比较

| 跨径/m | | 3 | 4.5 | 6 | 7.5 | 9 |
|--------------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|
| 文献[7]方法 | 挠度/mm | 1.46 | 3.96 | 8.56 | 15.98 | 26.87 |
| | 误差/(%) | 3.31 | 7.48 | 3.17 | 0.93 | 1.32 |
| 本文方法 | 挠度/mm | 1.507 | 4.020 | 8.642 | 16.078 | 27.031 |
| | 误差/(%) | 0.199 | 6.07 | 2.24 | 0.32 | 0.73 |
| 文献[7]有限元值/mm | | 1.51 | 4.28 | 8.84 | 16.13 | 27.23 |

3.2 单箱双室箱梁算例

由于缺少单箱多室箱梁挠度计算的相关文献，本文主要通过与 ANSYS 有限元计算结果比较来验证单箱多室波形钢腹板筒支箱梁作用跨中集中荷载及作用均布荷载的挠度计算公式的精度，并以单箱双室箱梁为例，其截面特性如图 5 所示，集中荷载 P 或均布荷载集度 q 加载于波形钢腹板位置处以减少截面扭转、畸变以及顶板横向弯曲的附加影响。材料特性与上述单箱单室箱梁算例相同。

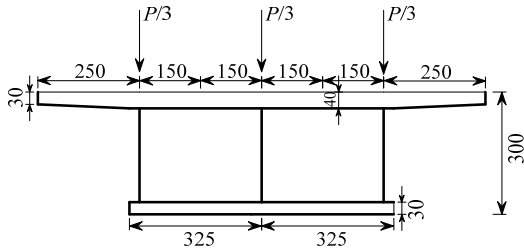


图 5 单箱双室波形钢腹板箱梁截面 /mm

Fig.5 Cross section of single-box double-cell corrugated box girder

采用 ANSYS 进行有限元建模，混凝土顶底板采用三维 10 节点的 solid95 实体单元，波形钢腹板采用 shell93 壳单元，一方面为了考虑腹板剪切变形的影响，另一方面以保证与 solid95 三维实体单元的位移相容性。有限元模型如图 6 所示。计算中提取波形钢腹板截面形心位置处的挠度值。

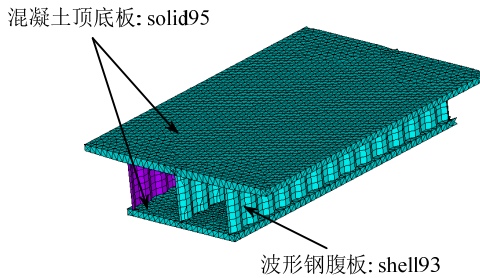


图 6 单箱双室波形钢腹板箱梁有限元模型

Fig.6 Finite element model of single-box double-cell corrugated box girder

图 7 所示为计算跨径 6 m 的单箱双室波形钢腹板筒支箱梁沿跨方向挠度分布情况。从图中可以看出本文提出的理论分析方法得到的解析解对于全梁沿轴向的挠度分布均具有较高的精度，并且对于跨中位置的挠度，解析解比有限元计算值稍大，将使得本文简化计算方法应用于工程实例中偏于安全。

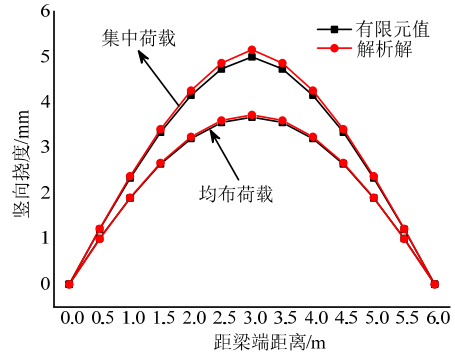


图 7 单箱双室波形钢腹板箱梁挠度沿跨分布

Fig.7 Deflection variation of single-box double-cell corrugated box girder with longitudinal length

表 2 为集中荷载 $P=25$ kN 和均布荷载 $q=5$ kN/m 作用下不同跨径的单箱双室筒支波形钢腹板箱梁的跨中挠度解析解与有限元值的比较。其中横断面尺寸保持不变，变化梁的计算跨径($l=3$ m、4.5 m、6 m、7.5 m、9 m)。从中看出：无论是集中荷载还是均布荷载工况下，公式计算结果比有限元计算结果稍大；对于集中荷载工况，误差不超过 6%，并且随梁跨度的增加，公式的计算误差变小；对于均布荷载工况，误差稳定在 1% 左右。

表 2 单箱双室波形钢腹板箱梁跨中挠度值比较

Table 2 Comparison of midspan deflection of single-box double-cell corrugated box girder

| | | 跨径/m | 3 | 4.5 | 6 | 7.5 | 9 |
|------|------------|------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 集中荷载 | 本文值/mm | | 0.93 | 2.435 | 5.187 | 9.601 | 16.094 |
| | ANSYS 值/mm | | 0.880 | 2.316 | 4.997 | 9.317 | 15.691 |
| | 误差/(%) | | 5.682 | 5.138 | 3.802 | 3.048 | 2.568 |
| 均布荷载 | 本文值/mm | | 0.307 | 1.276 | 3.724 | 8.741 | 17.730 |
| | ANSYS 值/mm | | 0.301 | 1.275 | 3.682 | 8.618 | 17.474 |
| | 误差/(%) | | 1.993 | 0.078 | 1.141 | 1.427 | 1.465 |

4 剪切变形和剪力滞效应对挠度的影响分析

为探讨剪切变形和剪力滞效应对挠度的影响，本文引入剪切变形影响系数 λ_1 和剪力滞效应影响系数 λ_2 。以简支单箱双室箱梁作用跨中集中荷载为例，将式(24)改写为如下的形式：

$$\omega\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{48E_c I_c} + \frac{Pl}{4G_w A_w} + \frac{\eta P}{\pi k^3} \left(\frac{kl}{2} - \tanh \frac{kl}{2} \right) = \omega_0(1 + \lambda_1 + \lambda_2) \tag{27}$$

式中： λ_1 表示剪切变形影响系数， $\lambda_1 = \frac{12E_c I_c}{G_w A_w l^2}$ ；

λ_2 表示剪力滞效应影响系数, $\lambda_2 = \frac{48\eta E_c I_c}{\pi k^3 l^3} \left(\frac{kl}{2} - \tanh \frac{kl}{2} \right)$ 。

对于箱梁而言,高跨比及宽跨比是影响剪切变形和剪力滞效应的主要因素。下面以上述单箱双室箱梁算例为例,保持梁跨(6 m)不变,分别改变梁高(分别为 0.2 m、0.24 m、0.3 m、0.4 m)及梁宽(分别为 0.7 m、0.9 m、1.1 m、1.3 m、1.5 m),得到不同高跨比下和宽跨比下剪切变形系数 λ_1 和剪力滞效应系数 λ_2 的变化如表3、表4所示。

从表3、表4可以看出,随着高跨比及宽跨比的增大,波形钢腹板的剪切变形影响系数 λ_1 均显著增大。因此对于梁宽、梁高较大的波形钢腹板箱梁,剪切变形对挠度的影响不可忽略;波形钢腹板箱梁剪力滞效应影响系数 λ_2 受高跨比变化影响较小,而受宽跨比变化影响较大,因此宽箱梁的挠度计算中,需计入箱梁剪力滞效应引起的附加挠度;无论高跨比和宽跨比如何变化,剪切变形影响系数 λ_1 始终大于剪力滞效应影响系数 λ_2 ,即相比箱梁剪力滞效应,波形钢腹板的剪切变形对挠度的影响更大。

表3 剪切变形系数和剪力滞效应系数随高跨比的变化
Table 3 Variation of shear deformation coefficient and shear lag effect coefficient upon the depth-span ratio

| 高跨比 | 1/30 | 1/25 | 1/20 | 1/15 |
|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|
| $\lambda_1(\times 10^{-2})$ | 10.793 | 12.715 | 15.656 | 20.674 |
| $\lambda_2(\times 10^{-2})$ | 1.341 | 1.340 | 1.337 | 1.337 |

表4 剪切变形系数和剪力滞效应系数随宽跨比的变化
Table 4 Variation of shear deformation coefficient and shear lag effect coefficient upon the width-span ratio

| 宽跨比 | 0.7/6 | 0.9/6 | 1.1/6 | 1.3/6 | 1.5/6 |
|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\lambda_1(\times 10^{-2})$ | 10.538 | 13.089 | 15.656 | 17.993 | 20.716 |
| $\lambda_2(\times 10^{-2})$ | 0.588 | 0.926 | 1.337 | 1.824 | 2.380 |

5 结论

本文基于变分原理,提出一种综合考虑箱梁剪力滞效应和波形钢腹板剪切变形影响的挠度计算解析方法。通过在纵向位移函数中引入考虑箱梁剪力滞效应的翘曲变形函数以及考虑波形钢腹板剪切变形的剪切转角,应用能量变分原理,推导了单箱多室波形钢腹板箱梁挠度计算的控制微分方程。结合简支波形钢腹板箱梁作用跨中集荷载及作用均布荷载的典型案例,给出竖向挠度解析解。并分别通过单箱单室箱梁和单箱双室案例的验证以及对剪切变形和剪力滞效应影响系数的分析,得出以

下结论:

(1) 通过本文理论分析法得到的单箱单室简支波形钢腹板箱梁跨中挠度值与文献[7]挠度计算方法及其有限元值的比较,发现本文理论分析得到的解析解位于文献[7]方法计算值与有限元值之间,显示了本文方法的精确性;

(2) 通过对单箱双室波形钢腹板箱梁沿跨方向解析解得到的挠度分布与 ANSYS 有限元计算结果的比较,以及集中荷载和均布荷载作用下不同跨径单箱双室波形钢腹板简支箱梁解析解得到的跨中挠度与有限元值的误差分析,可以发现,本文理论分析方法应用于单箱多室箱梁同样具有较好的精度。

(3) 引入剪切变形和剪力滞效应影响系数,并针对不同高跨比及宽跨比分析各影响系数的变化趋势,发现剪切变形影响系数随高跨比和宽跨比的增大明显增大,而剪力滞效应影响系数受高跨比的变化影响较小,受宽跨比的变化影响较大;相对于箱梁剪力滞效应,波形钢腹板剪切变形对挠度的影响更大。

参考文献:

- [1] Elgaaly M, Hamilton R, Seshadri A. Shear strength of beams with corrugated webs [J]. Journal of Structural Engineering, 1996, 122(4): 390-398.
- [2] Elgaaly M, Seshadri A, Hamilton R W. Bending strength of steel beams with corrugated webs [J]. Journal of Structural Engineering, 1997, 123(6): 772-782.
- [3] Elgaaly M, Seshadri A. Depicting the behavior of girders with corrugated webs up to failure using non-linear finite element analysis [J]. Advances in Engineering Software, 1998, 29(3/4/5/6): 195-208.
- [4] Luo R, Edlund B. Ultimate strength of girders with trapezoidally corrugated webs under patch loading [J]. Thin-walled Structures, 1996, 24(2): 135-156.
- [5] 吴文清. 波形钢腹板组合箱梁剪力滞效应问题研究[D]. 南京: 东南大学, 2002: 17-33.
Wu Wenqing. Studies on shear lag effect of box girder with corrugated steel webs [D]. Nanjing: Southeast University, 2002: 17-33. (in Chinese)
- [6] 李宏江. 波形钢腹板箱梁扭转与畸变的试验研究及分析[D]. 南京: 东南大学, 2003: 16-32.
Li Hongjiang. Analysis and experimental study of torsion and distortion of box girder with corrugated steel webs [D]. Nanjing: Southeast University, 2003: 16-32. (in Chinese)
- [7] 李宏江, 叶见曙, 万水, 吴文清. 剪切变形对波形钢腹板箱梁挠度的影响[J]. 交通运输工程学报, 2002, 2(12):

- 17—21.
Li Hongjiang, Ye Jianshu, Wan Shui, Wu Wenqing. Influence of shear deformation on deflection of box girder with corrugated steel webs [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2002, 2(12): 17—21. (in Chinese)
- [8] 吴文清, 万水, 叶见曙. 波形钢腹板箱梁剪力滞效应的空间有限元分析[J]. 土木工程学报, 2004, 37(9): 31—36.
Wu Wenqing, Wan Shui, Ye Jianshu. 3-D finite element analysis on shear lag effect in composite box girder with corrugated steel webs [J]. China Civil Engineering Journal, 2004, 37(9): 31—36. (in Chinese)
- [9] 杨丙文, 黎雅乐, 万水, 张建东. 波形钢腹板箱梁畸变应力分析[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2011, 41(5): 1065—1069.
Yang Bingwen, Li Yale, Wan Shui, Zhang Jiandong. Stress analysis of box girders with corrugated steel webs under distortion [J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2011, 41(5): 1065—1069. (in Chinese)
- [10] 彭鲲. 波形钢腹板组合箱梁剪力滞的理论和试验研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2008: 11—33.
Peng Kun. Theoretical and experimental studies on shear lag effect of composite box girder with corrugated steel webs [D]. Changsha: Hunan University, 2008: 11—33. (in Chinese)
- [11] 向宇. 比拟杆法分析波形钢腹板箱梁桥剪力滞效应[D]. 长沙: 湖南大学, 2011: 13—28.
Xiang Yu. Shear lag analysis of box girder with corrugated steel webs based on the principle of bar-simulation method [D]. Changsha: Hunan University, 2011: 13—28. (in Chinese)
- [12] 陈建兵, 万水, 钱培舒. 波形钢腹板预应力混凝土箱梁足尺模型试验研究[J]. 中外公路, 2007, 27(5): 160—164.
Chen Jianbing, Wan Shui, Qian Peishu. Full scale model test on prestressed concrete box girder with corrugated steel webs [J]. Journal of China and Foreign Highway, 2007, 27(5): 160—164. (in Chinese)
- [13] 聂建国, 李法雄, 樊建生. 波形钢腹板变形计算的有效刚度法[J]. 工程力学, 2012, 29(8): 71—79.
Nie Jianguo, Li Faxiong, Fan Jiansheng. Effective stiffness method for calculating deflection of corrugated web girder [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(8): 71—79. (in Chinese)
- [14] 刘保东, 任红伟, 李鹏飞. 考虑波纹钢腹板箱梁特点的挠度分析[J]. 中国铁道科学, 2011, 32(5): 21—26.
Liu Baodong, Ren Hongwei, Li Pengfei. Deflection analysis considering the characteristics of box girder corrugated steel webs [J]. China Railway Science, 2011, 32(5): 21—26. (in Chinese)
- [15] 冀伟, 刘世忠, 蔺鹏臻. 均布荷载作用下波形钢腹板简支箱梁的挠度[J]. 公路交通科技, 2012, 29(12): 70—73.
Ji Wei, Liu Shizhong, Lin Pengzhen. Deflection of simple-supported box girder with corrugated steel webs under uniform load [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2012, 29(12): 70—73. (in Chinese)
- [16] Johnson R P, Cafolla J. Corrugated webs in plate girders for bridges [J]. Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings, 1997, 123(2): 157—164.
- [17] 钱寅泉, 倪元增. 箱梁剪力滞计算的翘曲函数法[J]. 铁道学报, 1990, 2(6): 57—70.
Qian Yinquan, Ni Yuanzeng. Warping function method in calculating shear lag effect of box girder [J]. Journal of the China Railway Society, 1990, 2(6): 57—70. (in Chinese)