

文章编号: 1000-4750(2016)08-0185-09

层间滑移对摩擦型叠梁弯曲特性的影响

甄晓霞¹, 张卓杰², 王荣辉¹, 李 周³

(1. 华南理工大学土木与交通学院, 广州 510640; 2. 中国建设基础设施有限公司, 北京 100044; 3. 中建钢构有限公司, 深圳 518000)

摘 要: 对叠梁滑移问题的计算, 通常假定粘结层的滑移应变与剪应力成线性关系; 但对于库仑摩擦型叠梁来说, 只有当层间剪力超过层间最大抵抗摩擦力后, 才发生层间滑移。为了更精确研究摩擦型叠梁的力学特性, 该文首先推导了考虑层间摩擦力影响的截面剪应力计算公式, 进而确定了摩擦型叠梁层间滑移展开的力学条件和路径; 最后借助传递矩阵法求解了叠梁滑移展开的长度以及对叠梁构件力学特性的影响; 与 ANSYS 的计算结果对比表明该文提出的算法准确高效; 滑移效应会破坏截面的整体性, 增大局部弯曲应力, 结构计算时应根据实际滑移情况考虑滑移效应对结构受力的影响。

关键词: 滑移效应; 层间摩擦; 叠梁; 传递矩阵法; 弯曲应力

中图分类号: TU311 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2015.12.0952

INFLUENCE OF SLIP EFFECT ON BENDING CHARACTERISTICS OF FRICTIONAL LAMINATED BEAMS

ZHEN Xiao-xia¹, ZHANG Zhuo-jie², WANG Rong-hui¹, LI Zhou³

(1. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;

2. China Construction Infrastructure CORP., LTD., Beijing, 100044, China; 3. China Construction Steel Structure CORP., LTD., Shenzhen 518000, China)

Abstract: The slip strain of adhesive layers is usually assumed to be linearly related with the interfacial shear stress in solving problems of slip effect for laminated beams. However, for laminated beams connected by coulomb friction, slippage occurs only when the interfacial shear stress exceeds the resistant friction stress. To study the mechanical characteristics of laminated beams, this paper deduces the shear stress calculation formula of a section considering interfacial friction. The mechanical condition and development path for slippage are determined. At last, the slip length and its influence on laminated beams are solved by means of transfer matrix method. Compared with the results calculated by ANSYS, the proposed algorithm is more accurate and efficient; Slippage destroys the integrity of a section and increases local bending stress. The influence of slip effect on the internal force of structures should be considered based on the slip state.

Key words: slip effect; interfacial friction; laminated beam; transfer matrix method; flexural stress

Timoshenko 梁理论指出剪切变形会增大梁的变形, 特别是对于高跨比较大的梁; 事实上, 梁可以看作由无数条“纤维层”组成的层叠结构, 而梁抗弯的机理在于各纤维层的联合抗剪; 对于摩擦型叠梁, 若由弯曲引起的层间剪力大于纤维层间的抵

抗能力, 则会导致层间发生滑移。实际工程中很多层叠结构的层间滑移现象都可以通过该原理解释。

周东华等^[1]研究了滑移效应对组合梁的弯曲应力和挠曲变形的影响, 假定剪力键变形和层间剪力成正比, 结果表明滑移效应会减小结构的整体刚

收稿日期: 2015-12-01; 修改日期: 2016-05-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(51378220); 中央高校基本科研基金项目(2015ZM108)

通讯作者: 张卓杰(1986—), 男, 河北唐山人, 工程师, 博士, 主要从事大跨度桥梁结构理论研究(E-mail: civilzhangzhuojie@163.com).

作者简介: 甄晓霞(1976—), 女, 山西汾阳人, 讲师, 博士, 主要从事大跨度桥梁结构理论研究(E-mail: xxzhen@scut.edu.cn);

王荣辉(1958—), 男, 湖南常德人, 教授, 博士, 博导, 主要从事桥梁结构理论和桥梁振动研究(E-mail: rhwang2002@163.com);

李 周(1984—), 男, 湖北荆州人, 工程师, 博士, 主要从事桥梁结构理论与桥梁施工技术研究(E-mail: 976112542@qq.com).

度, 增大组合梁的变形和应力, 邹杨等^[2]进一步引入应力增大系数考虑滑移效应对应力的影响; 文献[3-4]基于叠梁理论研究了 FRP 材料在桥梁加固中的应用。文献[5-6]在研究电缆弯曲特性时, 将每个微段看作叠层结构, 由于电缆的扭绞, 在轴力作用下产生层间挤压力, 滑移前层间摩擦力使截面应力保持连续, 当曲率超过滑移曲率后, 电缆发生层间滑移; 桥梁的缆索结构中也存在类似的滑移效应, 严琨等^[7]指出悬索桥主缆弯曲较大的部位会出现钢丝分层滑移的现象, 但并未阐明发生的机理, 文献[8]基于三种方法计算了缆索鞍座出口处主缆的二次应力; 林坤等^[9]研究斜拉索局部弯曲时, 将拉索等效成叠梁, 通过有限元软件计算得出层间滑移效应可使拉索局部弯曲应力增大 5% 以上; 文献[10-11]指出层间摩擦力相当于耗能机制, 对叠梁的振动产生影响。但已有的研究通常假定粘结层的变形与剪力成正相关的关系, 即从受力开始, 粘结层即发生剪切变形, 这种假定与摩擦型叠梁真实的滑移机理存在差异; 使用有限元软件虽然能够模拟叠梁滑移过程, 但计算成本高, 效率低。

本文首先推导了考虑层间摩擦力的截面剪应力计算公式, 根据分层滑移理论确定了叠梁层间滑移的展开条件和路径; 然后基于传递矩阵法提出了求解摩擦型叠梁滑移展开长度的算法, 并与 ANSYS 的计算结果进行对比; 最后借助该算法研究了层间滑移对摩擦型叠梁力学特性的影响。

1 考虑滑移效应的叠梁横截面上的剪应力分布

对于传统的剪弯梁, 材料力学已给出横截面上剪应力 τ 的计算公式; 对于摩擦型叠梁, 当发生层间滑移后, 还要考虑层间摩擦力对剪应力的影响。

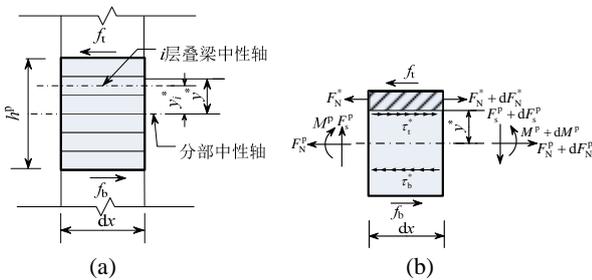


图 1 分部微元受力平衡

Fig.1 Force balance of a beam element part

取如图 1 所示的一段长为 dx 的叠梁微元, 当发生层间滑移后, 假设该叠梁横截面上具有高度 h^p

的叠梁分部保持为整体, 分部顶、底面单位长度受到相邻层的摩擦力分别为 f_t 和 f_b , 并假设:

- 1) 横截面上各点处的剪应力均与侧边平行;
- 2) 横截面上距离中性轴为同一高度处的剪应力大小相等。

分部微元受力平衡:

$$dF_N^p = (f_t - f_b)dx \tag{1a}$$

$$dM^p = F_s^p dx - (f_t + f_b) \frac{h^p}{2} dx = E^p I^p dk^p \tag{1b}$$

其中: F_N^p 、 M^p 、 F_s^p 分别为分部微元上的轴力、弯矩和剪力; E^p 为分部的弹性模量; I^p 为分部相对于自身中性轴的惯性矩; k^p 为分部绕自身中性轴弯曲的曲率。

对于 $y^* > 0$ 的阴影部分, 水平方向受力平衡:

$$dF_N^* = (f_t - \tau_t^* b^*) dx \tag{2}$$

其中, b^* 为所求位置处的截面宽度。

F_N^* 沿截面高度均匀分布, F_N^* 可以通过截面上的应力积分得到:

$$F_N^* = \int \sigma^* dA = \int_{y^*}^{h^p/2} \left(-E^p k^p y + \frac{F_N^p}{A^p} \right) dA \tag{3a}$$

$$dF_N^* = \int_{y^*}^{h^p/2} \left[-E^p (dk^p) y + \frac{dF_N^p}{A^p} \right] dA \tag{3b}$$

将式(3b)代入式(2), 可得:

$$\tau_t^* b^* - f_t = \int_{y^*}^{h^p/2} \left(E^p \frac{dk^p}{dx} y - \frac{1}{A^p} \frac{dF_N^p}{dx} \right) dA \tag{4}$$

令 $S^* = \int_{y^*}^{h^p/2} y dA$, 并将式(1a)代入式(4)可得:

$$\tau_t^* = \frac{1}{b^*} \left[E^p S^* \frac{dk^p}{dx} - (f_t - f_b) \frac{A^*}{A^p} + f_t \right] \tag{5a}$$

其中: A^* 为距离分部中性轴为 y^* 的横线以外部分的面积(图 1(b)中阴影所示); S^* 为 A^* 对分部中性轴的静矩。

仿照上述推导过程, 对于 $y^* < 0$ 的部分, 剪应力 τ_b^* 的计算公式为:

$$\tau_b^* = \frac{1}{b^*} \left[E^p S^* \frac{dk^p}{dx} + (f_t - f_b) \frac{A^*}{A^p} + f_b \right] \tag{5b}$$

当叠梁截面为 $b^* \times h^p$ 的矩形时, 式(5)还可以写成无量纲形式:

$$\begin{cases} \tau_t^* = \frac{E^p (h^p)^2}{8} \frac{dk}{dx} (1 - \xi^2) - \frac{f_t - f_b}{2b^*} (1 - \xi) + \frac{f_t}{b^*} & (6a) \\ \tau_b^* = \frac{E^p (h^p)^2}{8} \frac{dk}{dx} (1 - \xi^2) + \frac{f_t - f_b}{2b^*} (1 + \xi) + \frac{f_b}{b^*} & (6b) \end{cases}$$

其中, $\xi = \frac{2y^*}{h^p}$ 。

2 叠梁滑移展开的过程及判别

设叠梁微段第 i 层梁和相邻层单位长度上的最大静摩擦力为 F_{fi} , 且滑动摩擦力等于最大静摩擦力, 外力引起微段两端的轴力差为 dF_{Ni} , 第 i 层叠梁的粘结-滑移状态判别条件如下^[12]:

$$\begin{cases} F_{fi}dx > dF_{Ni}, & \text{粘结状态} \\ F_{fi}dx = dF_{Ni}, & \text{临界状态} \\ F_{fi}dx < dF_{Ni}, & \text{滑移状态} \end{cases} \quad (7)$$

2.1 滑移的展开过程

图 2(a)所示的叠梁截面尺寸为 $b \times Nh$, 截面承受逐渐增加的剪力 V , 各层间单位长度的极限摩擦力均为 F_f 。起初 V 较小, 层间无相对滑移, 叠梁截面保持一整体, 此时梁高 $h_0 = Nh$, 由式(6)可得截面上剪应力 τ_0 的计算公式为:

$$\tau_0 = \frac{E^p h_0^2}{8} \frac{dk}{dx} (1 - \xi_0^2) \quad (8a)$$

式中, ξ_0 表示式(6)中 h^p 取 h_0 ; 该式说明, 此阶段叠梁截面和等效的实心矩形截面的剪应力分布相同, 为二次抛物线形式, 且在 $\xi_0 = 0$ 处取极值(图 2(b))。

随着 V 增大, 当 $\xi_0 = 0$ 处的剪力达到极限摩擦力 F_f 时, 此处截面处于临界滑移状态; 当 V 继续增大, 截面发生一次滑移, 原来的截面分成两个分部 ①和②, 每个分部梁高 $h_1 = Nh/2$, 由式(6)可知, 发生首次滑移后, 截面上剪应力 τ_1 与曲率关系如下:

$$\begin{cases} \tau_1^{①} = \frac{F_f}{2b} (1 - \xi_1) + \frac{E^p h_1^2}{8} \frac{dk}{dx} (1 - \xi_1^2), & \text{分部1} \\ \tau_1^{②} = \frac{F_f}{2b} (1 + \xi_1) + \frac{E^p h_1^2}{8} \frac{dk}{dx} (1 - \xi_1^2), & \text{分部2} \end{cases} \quad (8b)$$

<1> <2>

式(8b)描述的剪应力分布如图 2(c)所示, 由式(8b)<1>描述的斜线和式(8b)<2>描述的二次抛物线叠加而成, ξ_1 表示式(6)中 $h^p = Nh/2$; 显然, 分部①和②的剪应力分布关于 τ 轴对称, 在每个分部内, τ_1 沿梁高呈二次抛物线分布, 在滑移位置处其值为 F_f 且保持不变, 在两个分部的外侧剪应力均为 0。

由于首次滑移发生于中性轴处, 中性轴附近的初始剪应力较大; 随着荷载 V 继续增加, 位于中性轴两侧的层间剪力达到极限摩擦力, 第二次滑移将发生于中性轴两侧的叠层; 如图 2(d)所示, 发生二

次滑移后, 叠梁截面分成四个分部。对于分部①和④, 只有单侧承受滑动摩擦力, 其剪应力分布可以按照式(8b)计算; 对于分部②和③, 双侧承受滑动摩擦力, 根据式(6)可得分部②和③中剪应力 τ_2 为:

$$\tau_2^{②,③} = \frac{F_f}{b} + \frac{E^p h^2}{8} \frac{dk}{dx} (1 - \xi_2^2) \quad (8c)$$

ξ_2 表示式(6)中梁高取 h 。类似地, 后续的层间滑移将从中性轴向外侧逐层对称展开, 每当层间剪力达到层间极限摩擦力时, 该处发生层间滑移。如图 2(e)~图 2(f)所示, 随着滑移的展开, 剪应力在横截面上呈锯齿形状分布且满足连续性。

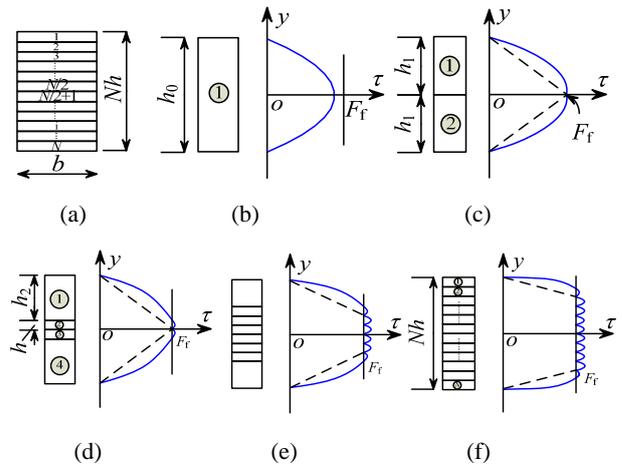


图 2 N 层叠梁滑移展开过程

Fig.2 Slippage development of laminated beams with N layers

2.2 滑移状态的判别

由 2.1 节可见, 随着梁端竖向力的增加, 叠梁层间滑移逐层展开。当中性轴处的剪力达到极限摩擦力 F_f 时, 发生首次滑移, 由此得到首次滑移的发生条件:

$$\left. \frac{dk}{dx} \right|_{1\text{-slip}} = \frac{8F_f}{E^p b h^2 N^2} \quad (9a)$$

即当截面的曲率变化率达到 $\frac{8F_f}{E^p b h^2 N^2}$ 时, 发生第一次层间滑移; 第二次滑移发生在当中性轴两侧的叠层, 此时, 此时 $|\xi| = \frac{N-4}{N}$, 将其代入式(8)并令此处层间剪力等于极限摩擦力可得第二次层间滑移的发生条件:

$$\left. \frac{dk}{dx} \right|_{2\text{-slip}} = \frac{8F_f}{E^p b h^2 N(N-2)} \quad (9b)$$

按照上述分析步骤, 可得发生第 j 次滑移的统一曲率公式:

$$\frac{dk}{dx}\Big|_{j\text{-slip}} = \begin{cases} \frac{8F_f}{E^p b h^2 N^2}, & j=1 \\ \frac{8F_f}{E^p b h^2 [N-2(j-2)](N-2j+2)}, & j=2,3,\dots,\frac{N}{2} \end{cases} \quad (9c)$$

此外，通过式(6)，还可以建立发生第 j 次滑移后第 i 分部的曲率变化率与剪力之间的关系：

$$F_s^{i-p} = (f_t + f_b) \frac{h_i}{2} + EI_i^p \frac{dk}{dx} \quad (\text{第}j\text{次滑移后}) \quad (9d)$$

其中， F_s^{i-p} 、 h_i 、 I_i^p 分别表示第 i 分部端截面的剪力、梁高、对自身中性轴的惯性矩。

发生滑移的层间摩擦力 $f_t=f_b=F_f$ ， j 次滑移后截面整体受到的总剪力为各分部截面剪力之和：

$$F_s = \sum_{i=1}^{2j} F_s^{i-p} = EI_0 \frac{dk}{dx} \left[2(j-1) + \frac{[N-2(j-1)]^2}{4} \right] + \frac{N+2(j-1)}{2} F_f h, \quad j=1,2,\dots,\frac{N}{2} \quad (9e)$$

其中， I_0 为单层叠梁绕其自身中性轴的惯性矩。

令式(9e)中 $\frac{dk}{dx}$ 取第 j 次滑移条件 $\frac{dk}{dx}\Big|_{j\text{-slip}}$ ，可得

发生第 j 次滑移的剪力条件。

2.3 滑移对抗弯刚度的影响

对于叠梁来说，截面上的弯矩由层间摩擦力和叠梁各分部绕自身中性轴弯曲的弯矩组成；在每个滑移状态内，滑移长度一定，摩擦力产生的弯矩保持不变，则弯矩-曲率的斜率为叠梁的抗弯刚度。

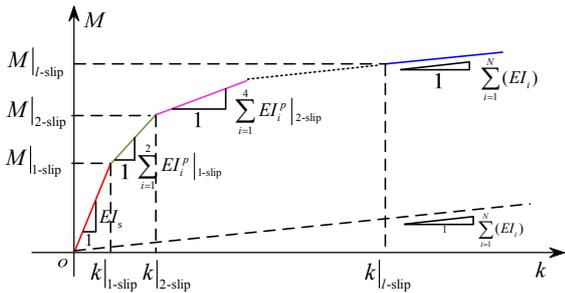


图3 N 层叠梁加载过程中 $M-k$ 关系图

Fig.3 $M-k$ relationship for N layers of laminated beams during loading

依前述分析可知，当叠梁无层间滑移时， $I_i^p\Big|_{j\text{-slip}}$ 退化为 I_s ，此时弯矩-曲率斜率为 EI_s ，当剪力超过首次滑移值 $F_s\Big|_{1\text{-slip}}$ 后，叠梁每个分部的抗弯惯性矩为 $I_i^p\Big|_{1\text{-slip}}$ ，弯矩-曲率斜率变为 $\sum_{i=1}^2 EI_i^p\Big|_{1\text{-slip}}$ ；

以此类推，当加载到 $F_s\Big|_{j\text{-slip}}$ 时，梁截面惯性矩为叠梁发生第 j 次滑移时各个分部截面对自身中性轴的惯性矩之和。当截面各层全部发生滑移时， $I_i^p\Big|_{j\text{-slip}}$ 等于单层叠梁的抗弯惯性矩 I_{i0}^p 。加载过程中叠梁弯矩-曲率关系如图3所示。

3 用传递矩阵法求解叠梁滑移长度

传递矩阵法^[13-14]假定每个离散单元一端的状态向量 S_i 为已知，另一端的状态向量 S_{i+1} 为待求，且可以表示成 S_i 各分量的线性组合：

$$S_{i+1} = U_i S_i \quad (10)$$

传递矩阵法的结构总体刚度矩阵是场矩阵与点矩阵的连乘形式，相乘过程中不改变矩阵的维度，节省计算机内存且便于求解，特别适用于链状结构力学问题的求解。

3.1 考虑轴向力的单元传递矩阵

如图4所示的①单元节点编号为 i 和 $i+1$ ，坐标分别为 (x_i, y_i) 和 (x_{i+1}, y_{i+1}) ，单元水平投影长度为 l_i ，两端的倾角为 θ_i, θ_{i+1} 。两节点别受轴向拉力 N_i, N_{i+1} ，剪力 V_i, V_{i+1} 和弯矩 M_i, M_{i+1} ，各力的正方向如图所示；受力变形后端节点 y 方向的位移分别为 w_i 和 w_{i+1} ，忽略水平位移。假设变形为小量， $\sin\theta_i \approx \theta_i, \cos\theta_i \approx 1$ ，并略去高阶小量，根据平衡关系：

$$\begin{cases} N_{i+1} - V_{i+1}\theta_{i+1} = N_i - V_i\theta_i \\ N_{i+1}\theta_{i+1} + V_{i+1} = N_i\theta_i + V_i \\ M_{i+1} = M_i - N_i l_i \theta_i + N_i (w_{i+1} - w_i) - V_i l_i \end{cases} \quad (11)$$

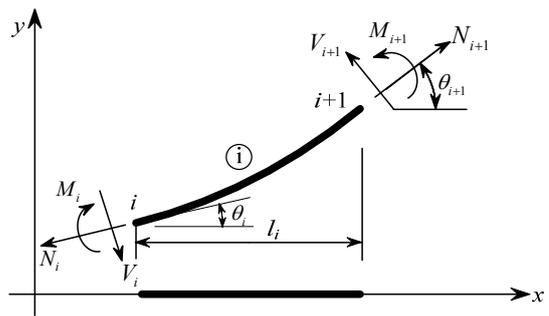


图4 梁单元受力示意图

Fig.4 Force state of a beam element

为方便求解假定轴力为定值，根据梁单元弯矩曲率关系，并代入式(11)，可得①单元上任意一点的变形微分方程：

$$w''(x) - \lambda_i^2 w(x) = a_i - b_i x \quad (12)$$

其中： $\lambda_i^2 = N_i / B_i$ ； $a_i = (-N_i w_i + V_i x_i + N_i x_i \theta_i + B_i k_i) / B_i$ ； $b_i = (N_i \theta_i + V_i) / B_i$ ； B_i 为单元的弯曲刚度。

以 $\{w, \theta, V, k, 1\}$ 作为状态向量，求解微分方程式 (12) 可得传递关系：

$$\begin{Bmatrix} w_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ V_{i+1} \\ k_{i+1} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} & U_{25} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} & U_{35} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} & U_{45} \\ U_{51} & U_{52} & U_{53} & U_{54} & U_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ V_i \\ k_i \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

其中：

$$U_{11} = U_{22} = U_{55} = 1; U_{12} = l_i;$$

$$U_{13} = \frac{l_i}{N_i} \left[1 - \frac{\sinh(\lambda_i l_i)}{\lambda_i l_i} \right];$$

$$U_{14} = \frac{B_i}{N_i} [\cosh(\lambda_i l_i) - 1]; U_{23} = \frac{1}{N_i} [1 - \cosh(\lambda_i l_i)];$$

$$U_{24} = \frac{B_i}{N_i} \sinh(\lambda_i l_i); U_{33} = \cosh(\lambda_i l_i);$$

$$U_{34} = -\lambda_i B_i \sinh(\lambda_i l_i); U_{43} = -\frac{\sinh(\lambda_i l_i)}{\lambda_i B_i} V_i;$$

$$U_{44} = \cosh(\lambda_i l_i); \text{其余元素为 } 0。$$

3.2 求解摩擦型叠梁滑移深度的算法

传递矩阵参数和层间滑移状态有关，而层间滑移随着外荷载的增加逐步展开，实际计算时，可以采用增量叠加法。即将加载过程分为多个荷载增量步，分别计算每个荷载增量步下的状态向量增量，叠加到前一荷载步的计算结果中。求解滑移长度的算法如下：

1) 根据滑移条件求解叠梁发生初次滑移的临界外荷载以及对应的内力 and 变形，作为下一荷载步的初始状态向量 S_0 ；

2) 施加第一个荷载增量，此时传递矩阵按照初始状态向量 S_0 的值确定；求解在第一个荷载增量作用下的状态向量增量 ΔS_1 ，并叠加到 S_0 中得到第一荷载步结束时的状态向量 S_1 ；

3) 根据 2) 计算得到的内力判断叠梁的滑移状态分布情况；按照新的滑移状态更新单元的传递矩阵；

4) 按照更新的传递矩阵求解第二个荷载增量作用下的状态向量增量 ΔS_2 ，叠加到 S_1 中进而得到第二荷载步结束时的状态向量 S_2 ；

5) 重复 3)~4) 至加载到目标荷载。因为滑移是逐步展开的，所以选择的荷载增量值应尽量小。

4 算例分析

图 5 所示为一跨度 5 m 由 10 层 70 mm×7 mm 的单层梁叠合而成的叠梁，弹性模量为 195 GPa，两端固结，梁内存在 1000 kN 的初张力，跨中施加逐渐增加的集中力。

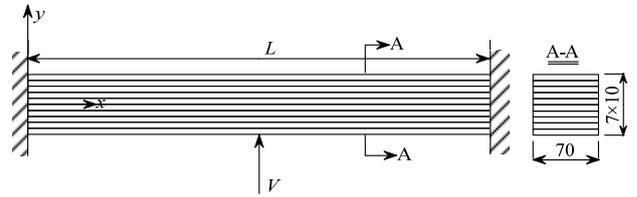


图 5 叠梁结构示意图

Fig.5 Schematic drawing of laminated beam

层间粘结机制为摩擦力，分别研究层间摩擦应力为 0.03 MPa 和 0.3 MPa 两种情况。叠梁的抗弯惯性矩与所处的滑移状态有关，关系如表 1 所示。

表 1 滑移状态对应的叠梁力学参数

Table 1 Mechanical parameters versus slip state

滑移层数	摩擦应力 0.03 MPa	摩擦应力 0.3 MPa	抗弯惯性矩/mm ⁴
	临界剪力/N	临界剪力/N	
0	—	—	2000833
1	98	980	500208.3
2	104.13	1041.25	260108.3
3	114.74	1147.42	116048.3
4	126.58	1265.83	44018.33
5	144.55	1445.5	20008.33

4.1 算法正确性验证

根据 3.2 节所述的算法，使用数学软件 MATHEMATICA 编制计算程序。叠梁共划分为 500 个等长单元；为了验证所提算法的正确性，使用 ANSYS 建立图 6 所示的叠梁模型进行验证。

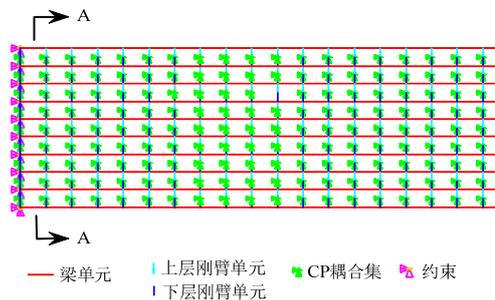


图 6 有限元模型局部结构图

Fig.6 Local structure of FE model

有限元建模时将每一叠层看作一根梁，每根梁单元长度同样划分为 1 cm，相邻层梁单元对应节点通过两刚臂单元连接，刚臂单元末端节点在层中间重合并耦合自由度^[9]。模拟滑移状态时，解除 x 方

向的自由度耦合并将前一状态的层间剪力施加到刚臂单元两端。因为只考虑面内问题，梁单元采用 BEAM3，叠梁内存在的初张力通过实常数 ISTRN 施加，程序计算时设置 SSTIF,ON 以考虑初应力刚度。竖向力 V 按照 5 N 的增量逐步施加。刚臂单元的剪力可以看作单个节间层间剪应力的积分，当层间剪应力为 0.03 MPa 时，每个刚臂能抵抗的最大剪力为 21 N。

通过表 1 可知，当梁单元剪力小于 98 N，即 $V < 196$ N 时，叠梁不发生层间滑移，此时自编程序计算的跨中竖向位移为 0.12697 mm，对应有元模型的计算值为 0.1272 mm，变形示意图如图 7 所示。此时梁端处第一节间(图 6 A-A 截面处)层间刚臂的剪力沿梁高方向呈二次抛物线分布，最大值为 20.61 N，稍小于最大抵抗剪力 21 N，这是因为从固定端向跨中方向，层间剪力逐渐减小。由于轴力的作用，剪力沿梁长也非均匀分布，在锚固端和集中力作用点位置处的剪力大于其他位置。此效应可以从有限元模型梁端刚臂单元剪力分布云图中形象地体现出来。

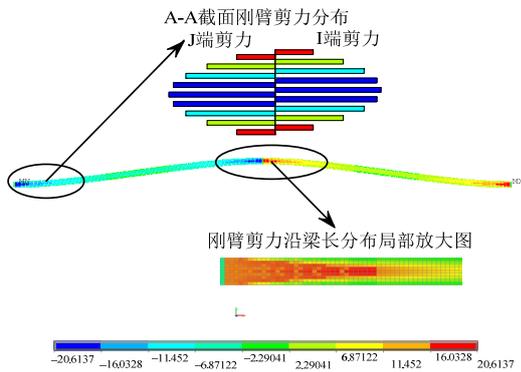


图 7 有限元计算结果

Fig.7 Calculation results of FEM

4.2 滑移计算结果

ANSYS 模拟滑移时，当刚臂单元的剪力大于 21 N，释放 x 方向的自由度耦合，同时将该剪力值施加到释放自由度的节点上以考虑层间摩擦力的效应。两程序的计算结果如表 2、表 3 所示，叠梁层间滑移分布如图 8 所示。

由表 2、表 3 可见，有限元模型和自编程序的计算结果符合得很好，能够彼此验证结果的正确性。ANSYS 模型单元数量多，且迭代过程中需要人工处理，计算费时，而自编程序自动迭代计算，简单高效。

表 2 计算位移值对比

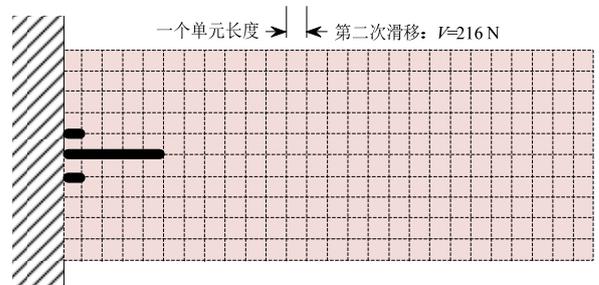
Table 2 Comparison of calculated displacements

集中力/N	ANSYS/ mm	自编程序/ mm	集中力/N	ANSYS/ mm	自编程序/ mm
196	0.1272	0.12697	256	0.1663	0.16738
206	0.1337	0.13345	266	0.1729	0.17485
216	0.1402	0.13995	276	0.1829	0.18270
226	0.1467	0.14653	286	0.1896	0.19099
236	0.1532	0.15326	296	0.1965	0.19968
246	0.1597	0.16019	306	0.2034	0.20869

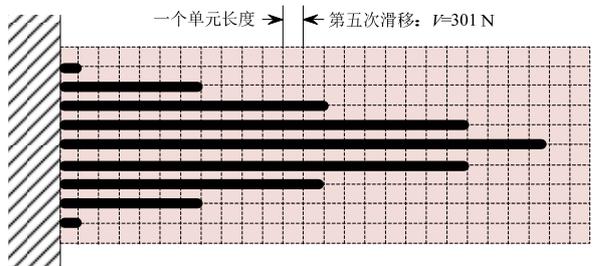
表 3 加载过程滑移展开情况计算结果对比

Table 3 Comparison of slippage development during loading

集中力/N	滑移层数									
	ANSYS 计算					自编程序				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
201						1				
206	1					2				
216	4					5	1			
221	6	2				6	2			
241	12	7				12	8	2		
246	13	9	2			13	9	3		
261	17	13	6			17	13	6	1	
266	18	14	7	1		18	14	8	2	
301	25	22	15	8		24	20	13	7	1
306	26	23	16	9	1	24	20	14	8	2
311	27	24	17	10	2	25	21	15	9	2



(a)



(b)

图 8 滑移展开示意图

Fig.8 Schematic diagram of slippage

由图 8 可见，首次滑移发生在固定端和集中力作用点位置的中性轴处，即当集中力为 201 N 时，第一个单元发生首次滑移，随着竖向力的增加，层间滑移沿梁高向中性轴向两侧对称展开；当集中力为 301 N 时，第一个单元层间滑移全部展开。与此同时，滑移沿梁长方向，从固定端和集中力作用点向两侧逐单元展开，当第一个单元滑移全部展开时，中性轴处滑移已展开 24 个单元长度。

继续加载竖向力至 1 kN，滑移展开情况如图 9 所示。随着竖向力增大，各层滑移展开的速度呈指数下降，这与剪力沿梁长的分布情况是相符的。

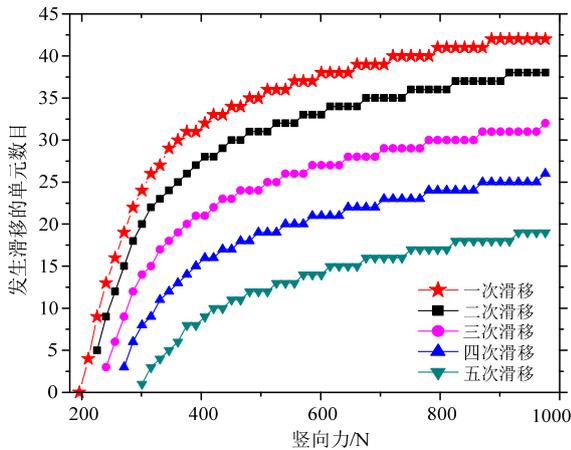


图 9 加载过程中滑移展开情况

Fig.9 Development of slippage during loading

层间滑移使叠梁刚度减小，因此会增大叠梁的竖向位移，且滑移展开的比例越高，对叠梁竖向位移的影响越明显。图 10 为加载过程中考虑滑移和不考虑滑移叠梁的跨中节点竖向位移关系图。

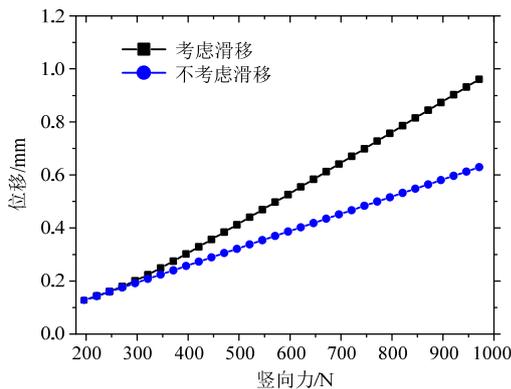


图 10 跨中节点位移变化曲线

Fig.10 Variation curves of displacements for middle node

由图 10 可见，对于不考虑滑移的叠梁来说，因为假定在变形过程中轴向力恒定，位移和力呈线性关系，而对于考虑滑移的梁来说，位移呈非线性增加趋势。

轴力会改变梁的竖向刚度，进而影响叠梁滑移展开的速度与长度，图 11 所示为轴向力分别为 1000 kN 和 500 kN 时前三次滑移的展开情况。

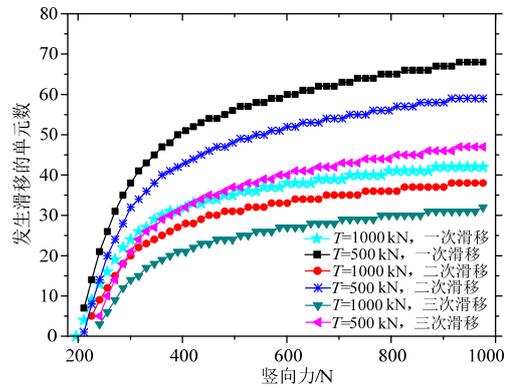


图 11 轴力对滑移展开的影响

Fig.11 Influence of tensile force on development of slippage

由图 11 可见，随着轴力增大，构件逐渐呈现“索”的力学性质，即构件的大部分位置主要承受轴力，剪力和弯矩集中在固定端和集中力作用点附近，随着轴力减小，构件的“梁”特性加强，即力学特性更趋同于双固支梁；所以在相同竖向力作用下，轴力越小，滑移展开长度越长。特别地，当轴力减小至 0，剪力均匀分布，一旦端部超过临界滑移剪力，滑移即传遍全梁。

4.3 层间滑移对叠梁弯曲的影响

图 12 为发生滑移的叠梁，第一次滑移长度为 L_{s1} ，对应的截止截面为 1-1，第二次滑移长度为 L_{s2} ，对应的截止截面为 2-2。对于 1-1 右侧截面来说，因为其未发生滑移，截面的应力分布满足平截面假定，如图 13(a)所示；1-1 左截面已经发生滑移，发生滑移的每层叠梁在 1-1 处的应力由两部分叠加而成：绕自身中性轴的弯曲应力(图 13(b)中的虚线所示)以及层间摩擦力引起的正应力(图 13(b)中的实线箭头所示)，在二者共同作用下，应力分布图在 1-1 截面两侧相同。

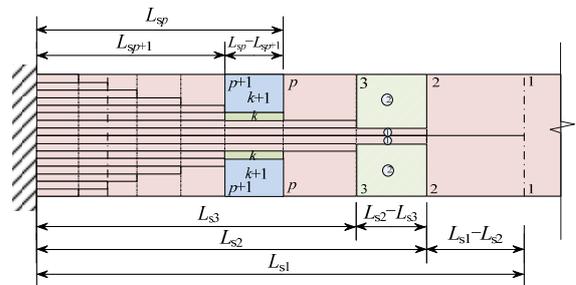


图 12 叠梁滑移分布

Fig.12 Slippage distribution of laminated beams

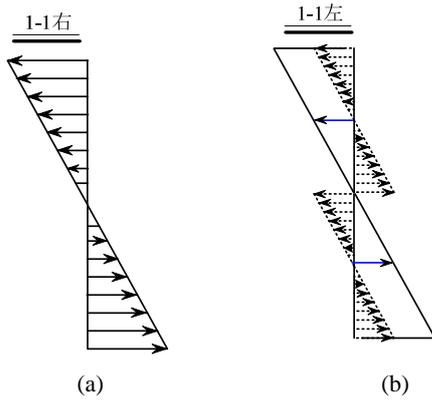


图 13 截面弯曲应力分布

Fig.13 Bending stress distribution of a beam section

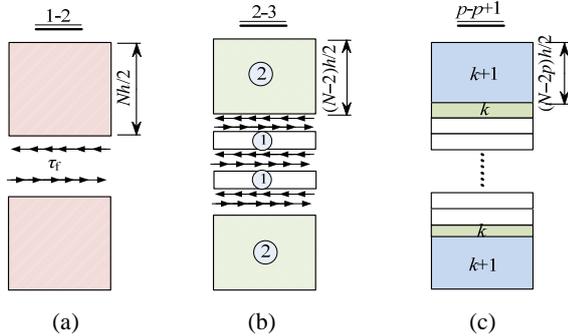


图 14 层间摩擦力分布

Fig.14 Frictional force distribution between layers

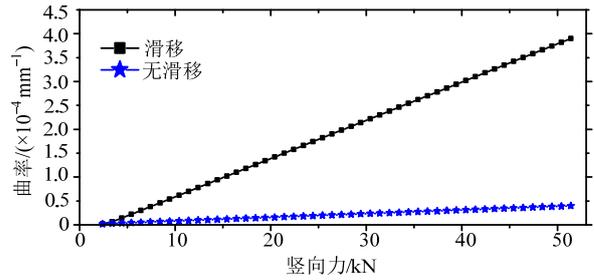
对于发生滑移的叠梁来说，每个分部的应力由绕分部自身中性轴的弯曲应力和层间摩擦力引起的摩擦正应力叠加而成。因此，对于 2-2 右侧截面来说，层间摩擦力导致此处截面的摩擦正应力比 1-1 左截面处的摩擦正应力大 $\frac{\tau_f(L_{s2} - L_{s1})}{Nh/2}$ (图 14(a))；

对于 2-2 到 3-3 之间的叠梁，层间摩擦力示意图如图 14(b)所示，显然对于 3-3 截面处由摩擦引起的正应力，外侧叠层(②号叠层)比内侧叠层(①号叠层)大 $\frac{\tau_f(L_{s2} - L_{s3})}{(N-2)h/2}$ ；类似地，对于 p-p 到 p+1-p+1

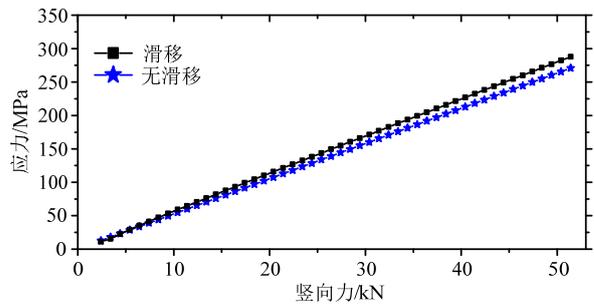
之间的叠层，层间摩擦力在外侧叠层累加，所以 p+1-p+1 处第 k+1 叠层的摩擦正应力比第 k 叠层的摩擦正应力大 $\frac{\tau_f(L_{sp} - L_{sp+1})}{(N-2p)h/2}$ (图 14(c))。可见，层间

摩擦力对滑移后叠梁正应力的影响在外侧叠层逐节间累加，所以对于滑移后处于同一截面的叠层来说，最大应力出现在外侧叠层。

为研究滑移对叠梁弯曲的影响，将极限摩擦应力和 V 各增大 10 倍，即摩擦应力为 0.3 MPa。加载过程中锚固端曲率和应力计算值如图 15 所示。



(a)



(b)

图 15 滑移对叠梁弯曲的影响

Fig.15 Influence of slip to bending of laminated beams

从图 15(a)可以看出，叠梁发生滑移后，截面的整体性遭到破坏，端部曲率随着竖向力的增加呈非线性增大趋势；同时滑移使叠梁分部的梁高不断减小，所以在各次滑移展开阶段，是否考虑滑移对叠梁端部最大弯曲应力影响不明显；而当各次滑移完全发生后，滑移效应明显增大了最大弯曲应力，由图 15(b)可见，当加载至 20.4 kN，滑移效应使最大弯曲应力增幅 7%(不考虑滑移和考虑滑移的最大弯曲应力分别为 107.5 MPa 和 115.8 MPa)，且应力差值呈非线性增长。

5 结论

通过对摩擦型叠梁滑移的展开条件及滑移对叠梁力学特性影响的研究，并结合算例的计算结果，可以得到如下结论：

- (1) 对于摩擦型叠梁，层间滑移展开由梁截面承受的剪力值(或曲率的变化率值)决定；若增大层间摩擦力，会提高叠梁发生滑移的临界条件。
- (2) 层间滑移由中性层向两侧逐层对称展开，滑移展开后，截面上的弯矩由各叠梁分部和层间摩擦力共同承担。
- (3) 对于承受轴力的叠梁构件，轴力的大小使其呈现索或梁的特性；承受竖向力时，叠梁构件受弯，且随着轴力的增大，梁上的剪力值和弯矩值从固定端和集中力作用点向两侧呈指数下降，弯曲增

大了截面的局部应力。

(4) 分层滑移会破坏截面的整体性,减小截面的抗弯刚度,增大最大弯曲应力(算例中增大7%),所以即使对于承受轴力为主的构件,在进行结构强度设计或疲劳计算时,应充分考虑构件承受横向荷载的可能性,若构件承受横向力,需要根据实际滑移情况考虑滑移效应对最大弯曲应力的影响。

参考文献:

- [1] 周东华, 孙丽莉, 樊江, 等. 弹性剪切连接组合梁的应力计算方法[J]. 工程力学, 2011, 28(3): 157—162.
Zhou Donghua, Sun Lili, Fan Jiang, et al. A method for calculation of stresses of composite beams [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(3): 157—162. (in Chinese)
- [2] 邹杨, 周志祥, 唐亮. 考虑滑移效应组合梁弯曲应力和界面剪力分析[J]. 工程力学, 2013, 30(11): 173—179.
Zou Yang, Zhou Zhixiang, Tang Liang. Analysis of flexural stresses and interface shear force of composite beams considering slip effect [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(11): 173—179. (in Chinese)
- [3] Tounsi A, Daouadji T H, Benyoucef S, et al. Interfacial stresses in FRP-plated RC beams: Effect of adherend shear deformations [J]. International Journal of Adhesion & Adhesives, 2009, 29(4): 343—351.
- [4] Kerboua B, Adda Bedia E, Benmoussat A. Strengthening of damaged structures with bonded prestressed FRP composites plates: an improved theoretical solution [J]. Journal of Composite Materials, 2011, 45(5): 499—512.
- [5] Dastous J B. Nonlinear finite-element analysis of stranded conductors with variable bending stiffness using the tangent stiffness method [J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2005, 20(1): 328—338.
- [6] Lanteigne J. Theoretical estimation of the response of helically armored cables to tension, torsion, and bending [J]. Journal of Applied Mechanics, 1985, 52(2): 423—432.
- [7] 严琨, 沈锐利, 王涛, 等. 基于初弯曲梁单元的大跨度悬索桥主缆弯曲刚度分析[J]. 公路交通科技, 2015, 32(3): 89—95.
Yan Kun, Shen Ruili, Wang Tao, et al. Study on bending stiffness of main cable of long-span suspension bridge based on original curvature beam element [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development 2015, 32(3): 89—95. (in Chinese)
- [8] 严琨, 沈锐利, 闫勇. 大跨度悬索桥鞍座出口处主缆的二次应力[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2012, 31(4): 191—194.
Yan Kun, Shen Ruili, Yan Yong. Secondary stress of the first segment main cable near the saddles in long-span suspension bridge [J]. Journal of Chongqing Jiao Tong University (Natural and Science), 2012, 31(4): 191—194. (in Chinese)
- [9] 林坤, 郑罡, 连启滨, 等. 斜拉索剪切分层滑移及其对弯曲应力的影响[J]. 公路交通技术, 2009, 25(3): 104—110.
Lin Kun, Zheng Gang, Lian Qibin, et al. The effect of joint working mode between steel wires on local bending stress of stay-cable [J]. Technology of Highway and Transport, 2009, 25(3): 104—110. (in Chinese)
- [10] Sedighi H M, Shirazi K H, Naderan-Tahan K. Stick-slip analysis in vibrating two-layer beams with frictional interface [J]. Latin American Journal of Solids & Structures, 2013, 10(5): 1025—1042.
- [11] Sedighi H M, Shirazi K H, Naderan-Tahan K. Stick-slip vibrations of layered structures undergoing large deflection and dry friction at the interface [J]. Journal of Vibration & Acoustics, 2013, 135(6): 0610061—06100612.
- [12] Knapp R H, Liu X H. Cable vibration considering interlayer coulomb friction [J]. International Journal of Offshore & Polar Engineering, 2005, 15(3): 229—234.
- [13] Yang B, Tan C A. Transfer functions of one-dimensional distributed parameter systems [J]. Journal of Applied Mechanics, 1992, 59(4): 1009—1014.
- [14] 张杰. 传递矩阵法在钢桥结构分析中的应用研究[D]. 南京: 河海大学, 2005.
Zhang Jie. Research on application of transfer matrix method in structural analysis of steel bridges [D]. Nanjing: Hohai University, 2005. (in Chinese)