

## 采用温控镂空发热网的热像仪与 3D 激光雷达配准

宗 民, 杨 毅, 朱 昊, 付梦印, 汪顺亭

(北京理工大学 复杂系统智能控制与决策国家重点实验室, 北京 100081)

**摘 要:** 在热像仪与 3D 激光雷达组合感知系统上, 对基于特征点的配准问题进行了研究。结合热像仪与 3D 激光雷达的工作特性, 设计制作了温控镂空发热网配准靶, 可同时为热像仪与 3D 激光雷达提供特征点。红外图像特征点使用 Harris 角点探测器进行采集; 为减小混合像素和激光点稀疏的影响, 对配准靶平面进行了拟合并对点云进行了配准平面符合度检查, 确定了深度图边缘; 使用计算角点附近深度边缘均值的方法提取深度特征点坐标, 并对坐标进行了修正; 最后使用 NMSM-EM 优化方法对配准结果进行了优化。基于以上研究成果, 使组合感知系统能够在微光条件下完成对移动机器人行驶环境的感知。

**关键词:** 自动控制技术; 组合感知系统; 热像仪; 激光雷达; 配准

**中图分类号:** TP24 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2014)12-4198-06

## Calibration of IR camera and 3D lidar using thermostat heating hollow net

Zong Min, Yang Yi, Zhu Hao, Fu Mengyin, Wang Shunting

(State Key Laboratory of Complex System Intelligent Control and Decision, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** With the integrated perception system of IR camera and 3D lidar, the calibration based on feature point matching was studied and the thermostat heating hollow net was designed to provide feature points. Infrared image feature points were extracted by Harris corner detector. To decrease the influence from mixed pixels, plane fitting of heating net and plane conformity check of laser points on net were used to locate the edges in depth image. Edges' average value at corner was calculated to extract depth feature point. At last, NMSM-EM method was adopted to optimize the result. The research results show that the integrated perception system can accurately perceive mobile robot's running environment in dim light.

**Key words:** automatic control technology; integrated perception system; IR camera; lidar; calibration

收稿日期: 2014-04-12; 修订日期: 2014-05-08

基金项目: 总装预研项目(404010xxxx3); 国家自然科学基金重点培育项目(91120003); 国家自然科学基金(61173076); 国家自然科学基金青年基金(61105092)

作者简介: 宗民(1989-), 男, 硕士, 主要从事移动机器人方面的研究。Email: zmt1999@126.com

通讯作者: 杨毅(1979-), 男, 副教授, 主要从事无人地面车辆环境感知与智能导航方面的研究。Email: yang\_yi@bit.edu.cn

## 0 引言

多传感器数据融合已成为了移动机器人环境感知技术的重要发展方向。由于图像传感器的纹理色彩信息和距离探测器的距离、轮廓信息互补性较强,将两者进行融合有利于移动机器人的环境感知和智能导航,其中可见光摄像机与 3D 激光雷达的组合尤为常见<sup>[1]</sup>。

在微光环境中,可见光摄像机的感知能力受到很大削弱,但对于某些特殊应用的机器人(如军用巡逻机器人),在此种环境下能够继续保持正常工作是非常重要的,此时热像仪能为移动机器人提供图像信息,是可见光摄像机的有力补充。红外热像仪是一种非接触式的能感知物体散发的热量并显示出物体表面温度分布的传感器,采集红外图像<sup>[2]</sup>并与可见光图像融合<sup>[3]</sup>是其常见的应用方式。

热像仪与 3D 激光雷达的配准是构建组合感知系统的基础。经过多年研究,大量关于可见光摄像机与 3D 激光雷达配准的方法已被提出,大致可分为:基于平面特征的配准<sup>[4]</sup>、基于线特征的配准<sup>[5]</sup>以及基于特征点的配准<sup>[6]</sup>。将这些方法应用于热像仪与 3D 激光雷达配准时,要解决的首要问题是如何获得较为清晰的红外特征。若采用基于平面特征的配准,需提供一平整连续的平面,且其表面温度须成阶梯状分布以利于提取红外特征,比较困难;红外图像中的边缘通常比较模糊,不利于使用基于线特征的配准方法。基于特征点的配准方法计算量小,实验简便易行,被文中采用,但特征点的准确提取十分关键。

目前,关于热像仪与 3D 激光雷达直接进行配准的研究成果较少,相关的研究主要集中于热像仪与双目立体摄像机的配准方面:参考文献[7]设计了由两个可见光摄像机与一个热像仪组成的三目视觉系统,使用嵌入了发热小灯泡阵列的配准靶,基于特征点方法进行配准;参考文献[8]使用置于热源与传感器之间的镂空挡板来提供特征点;参考文献[9]设计了一种覆盖着有孔挡板的发热面作为配准靶;参考文献[10]介绍了一种在泛光灯照射后明暗相间的吸热棋盘格配准靶。

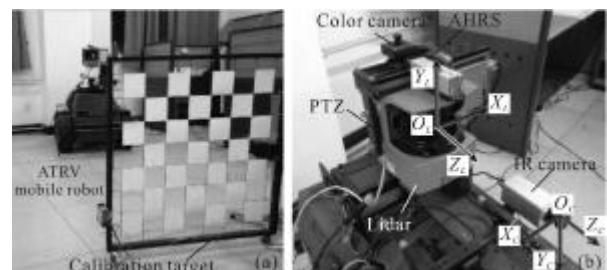
若将上述配准靶用于热像仪与 3D 激光雷达配准,存在一些问题:(1) 温度很难调节,不能改变红外

特征强度;(2) 体积太小,无法提供足够数量激光点;(3) 小灯泡的发热强度仅适合近距离观测;(4) “热源+挡板”的配准靶自身不是一个整体,使用不便。

针对这些问题,文中设计制作了温控镂空发热网配准靶。同时,使用配准平面拟合等方法确定深度特征点,并对配准结果进行了优化,使组合感知系统能够准确地微光条件下对机器人行驶环境进行感知。

## 1 组合感知系统

将最大水平扫描角  $-180^{\circ} \sim 180^{\circ}$  的 SICK LMS 200 二维激光测距仪与 Amtec Powercube Wrist 两自由度云台结合起来,通过云台的俯仰实现了 3D 激光雷达的扫描效果,使用姿态航向参考系统(AHRS)得到准确的俯仰角。如图 1 所示,文中将热像仪(GUIDEIR, IR112)和可见光摄像机加入,组成了 3D 激光雷达、可见光摄像机及热像仪的组合感知系统。文中仅对热像仪与 3D 激光雷达的配准进行讨论。热像仪坐标系原点  $O_c$  在热像仪光心, $X_c, Y_c$  位于图像平面;激光雷达坐标系的原点  $O_l$  位于激光雷达光心, $X_l, Y_l$  分别指向水平和垂直方向; $O_l$  与云台转轴重合,安装误差可通过激光雷达原点配准<sup>[1]</sup>得到修正。



(a) 配准实验系统

(b) 可见光摄像机、3D 激光雷达及热像仪组合感知系统

(a) Calibration system (b) Integrated perception system of color camera, 3D lidar and IR camera

图 1 配准实验

Fig.1 Calibration experiment

## 2 温控镂空发热网配准靶

温控镂空发热网配准靶(见图 2)主要由碳纤维发热网、温控器、激光挡片及框架组成。其中每个方格长宽 100 mm;碳纤维发热网通电后会散发焦耳热,产生能被热像仪识别的红外特征;温控器可使发热网温度稳定在目标值;激光挡片间隔地嵌在碳纤

维发热网中,拆卸方便,可提供 3D 点云中的深度特征角点。设定目标温度为 50 °C,此时热像仪图像如图 2(c)、(d)所示。当环境中红外噪声比较大时,可通过提高发热网温度来提高图像识别度,图 2(e)中温度为 70 °C。文中使用该配准靶的十字交叉点作为特征点。

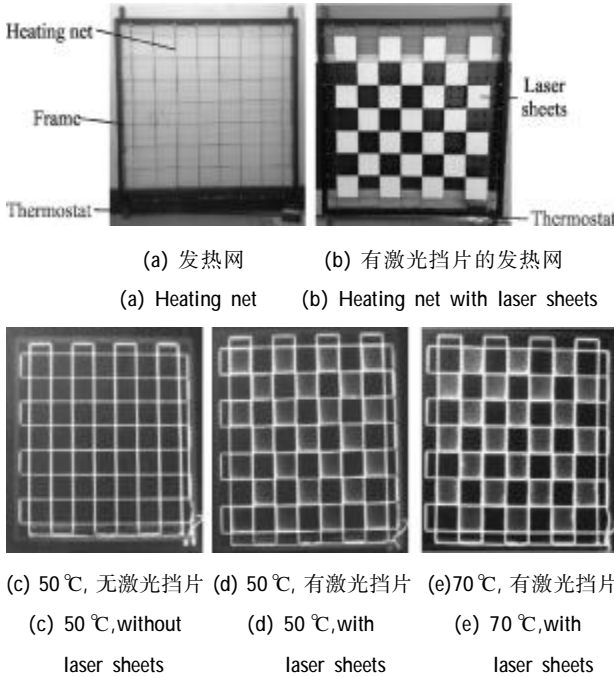


图 2 温控镂空发热网

Fig.2 Thermostat heating hollow net

### 3 配准过程

#### 3.1 配准方法

激光点云的原始数据包括深度  $\rho_1$ 、水平扫描角  $\theta_1$  和云台俯仰角  $\varphi_1$ ,在激光雷达坐标系中直角坐标为:

$$\begin{cases} x_1 = \rho_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = \rho_1 \cos \theta_1 \sin \varphi_1 \\ z_1 = \rho_1 \cos \theta_1 \cos \varphi_1 \end{cases} \quad (1)$$

热像仪数学模型可采用针孔模型,如公式(2)所示,完成了三维空间到二维空间的映射。其投影矩阵  $K$  可通过摄像机配准算法<sup>[12]</sup>得到。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_u & 0 & u_0 \\ 0 & a_v & v_0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c/z_c \\ y_c/z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

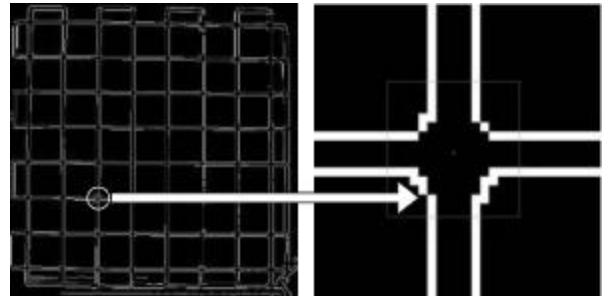
$$K^{-1}U = \begin{bmatrix} x_c/z_c \\ y_c/z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - at \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中:  $(x_c, y_c, z_c)$  为摄像机坐标系中的点坐标;  $U=(u,$

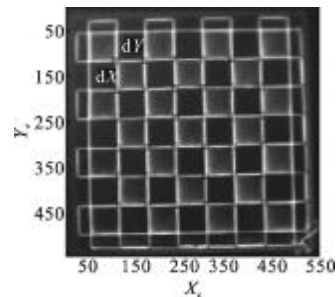
$v, 1)$ 为像素点齐次坐标。由前述温控镂空发热网提供  $N(N \geq 8)$ <sup>[11]</sup>对特征点,分别来自激光雷达和热像仪图像,联立特征点可得到本质矩阵  $E$ ,然后对  $E$  进行 SVD 分解<sup>[6]</sup>,可得到热像仪坐标系和激光雷达坐标系的旋转关系矩阵  $R$  和不带尺度的平移向量  $t$ 。设带尺度的平移向量为  $T=-at$  ( $a$  为尺度因子), $T$  可由特征点代入公式(3)得到。

#### 3.2 热像仪图像特征点提取方法

为尽可能提高精度,热像仪进行自配准时使用没有加激光挡片的发热网。使用半自动的提取方法,首先使用 Canny 算子提取发热网边缘特征,如图 3(a)所示。之后在选取的各局部窗口中,使用纵向边缘点的横坐标均值和横向边缘点的纵坐标均值分别作为特征点的纵横坐标,如图 3(b)所示,从而确定了图像特征点坐标。进行热像仪与 3D 激光雷达的联合配准时,需装入激光挡片,此时配准靶在热像仪中的图像特征类似常见的黑白棋盘格,在网格十字交叉点附近,4 个方块的对比较为明显,文中采用 Harris 角点探测器<sup>[4]</sup>寻找特征点,如图 3(c)所示。



(a) 边缘提取结果 (b) 使用局部窗口提取特征点  
(a) Result of edge detection (b) Using local window to calculate feature point



(c) Harris 角点探测器效果  
(c) Result of Harris corner detector

图 3 热像仪图像特征点提取

Fig.3 Image feature points detection of IR camera

### 3.3 3D 激光雷达点云处理及特征点提取方法

由于激光点云较稀疏,在各角点处并不一定正好有对应的激光点,即使有,也很可能是一个混合像素,因此,深度特征点的准确提取很有难度。为精确提取深度特征点,首先进行配准平面拟合。参考文献[13]仅用 3 个点拟合配准面,误差较大,文中采用特征值法<sup>[14]</sup>,首先从点云中选取  $n$  个位于激光挡片的激光点组成点集  $P=\{p_i|p_i=(x_i, y_i, z_i), i=1 \cdots n\}$ ,激光点应来源于尽量多的激光挡片中心处。

设平面方程为:  $Ax+By+Cz-D=0$ , 令优化指标函数为:  $e=\sum_i d_i^2 (Ax_i+By_i+Cz_i-D)^2$ , 其中  $d_i$  为  $P$  中激光点到面的距离,  $d_i=|Ax_i+By_i+Cz_i-D|$ 。由于特征值法要求平面满足约束  $A^2+B^2+C^2=1$ , 因此,可采用拉格朗日乘数法求函数极值,首先得到函数:

$$f = \sum_i d_i^2 - \lambda(A^2+B^2+C^2-1) \quad (4)$$

$f$  对  $D$  求导并令导数为零,可得:

$$D=A(\sum_i x_i)/n+B(\sum_i y_i)/n+C(\sum_i z_i)/n \quad (5)$$

令

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sum_i (\Delta x_i)^2 & \sum_i \Delta x_i \Delta y_i & \sum_i \Delta x_i \Delta z_i \\ \sum_i \Delta x_i \Delta y_i & \sum_i (\Delta y_i)^2 & \sum_i \Delta y_i \Delta z_i \\ \sum_i \Delta x_i \Delta z_i & \sum_i \Delta y_i \Delta z_i & \sum_i (\Delta z_i)^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中:  $\Delta x_i=x_i-\sum_i x_i/n$ ;  $\Delta y_i=y_i-\sum_i y_i/n$ ;  $\Delta z_i=z_i-\sum_i z_i/n$ 。

将公式(5)代入公式(4),然后分别对  $A, B, C$  求偏导,并令导数为零,可以得到特征值方程  $A_1=[A, B, C]^T=\lambda[A, B, C]^T$ 。  $A_1$  为实对称矩阵,  $A_1$  的最小特征值对应的特征向量即为平面方程的参数  $A, B, C$ 。

得到平面方程后,进行平面符合度检查以确定深度图中配准靶的边缘:(1) 计算  $d_i$  的标准偏差  $\sigma$ ;(2) 计算点云中每个点距拟合平面的距离  $d_i'$ , 如果  $d_i'>k_1\sigma$  则认为该点不在平面上,予以滤除,实验中  $k_1$  通常取 2~2.5;(3) 若一点在上一步没有被滤除,且其有相邻点在上一步被滤除,则该点标记为边缘点。

最后根据边缘点计算深度特征点。如图 4 所示,深度特征点的选取方法与前文类似,在交叉交叉点

附近选取局部候选窗口,特征点坐标  $y_{fr}$  由该区域中横向边缘点的  $x_{fr}$  均值确定,由纵向边缘点的  $x$  均值确定,  $z_{fr}$  由横纵边缘点的  $z$  均值确定,可减少激光点稀疏问题的影响。

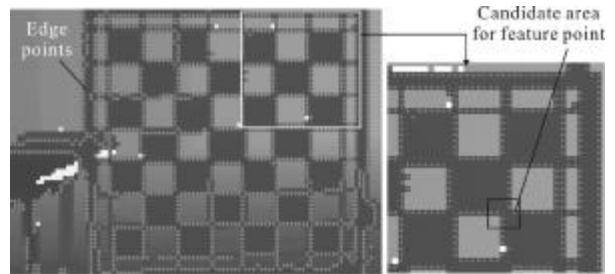


图 4 在深度图中对点云进行平面符合度检查,确认边缘点  
Fig.4 Plane fitting and checking is used to find edges in depth image

### 3.4 深度特征点坐标修正

$(x_{fr}, y_{fr}, z_{fr})$  处于深度变化比较剧烈的角点处,其本身很有可能是一个混合像素,因此,有必要对其深度值  $z_{fr}$  进行修正。文中采用激光射线与配准平面相交的方法,因  $x_{fr}, y_{fr}$  受混合像素影响较小,可恢复出一条由激光雷达光心射出的射线(由水平扫描角  $\theta_{fr}$  和云台俯仰角  $\varphi_{fr}$  描述),  $\theta_{fr}$  和  $\varphi_{fr}$  可使用离  $x_{fr}, y_{fr}$  最近的四个原始数据点通过插值得到,随后与拟合得到的平面方程联立可得修正后的深度特征点坐标如公式(7)所示。

$$\begin{cases} x_{fr}=D\sin\theta_{fr}/(A\sin\theta_{fr}+B\cos\theta_{fr}\sin\varphi_{fr}+C\cos\theta_{fr}\cos\varphi_{fr}) \\ y_{fr}=D\sin\theta_{fr}\sin\varphi_{fr}/(A\sin\theta_{fr}+B\cos\theta_{fr}\sin\varphi_{fr}+C\cos\theta_{fr}\cos\varphi_{fr}) \\ z_{fr}=D\cos\theta_{fr}\cos\varphi_{fr}/(A\sin\theta_{fr}+B\cos\theta_{fr}\sin\varphi_{fr}+C\cos\theta_{fr}\cos\varphi_{fr}) \end{cases} \quad (7)$$

### 3.5 配准结果的优化

激光雷达特征点  $\{(x_{fr,i}, y_{fr,i}, z_{fr,i}), i=1, \dots, N\}$  映射到热像仪坐标系为:

$$m_{cl,i}=[x_{cl,i}, y_{cl,i}, z_{cl,i}]^T=R^{-1}[x_{fr,i}, y_{fr,i}, z_{fr,i}]^T+T \quad (8)$$

将  $m_{cl,i}$  映射到热像仪图像上,以映射误差公式(9)为优化目标函数。文中采用 NMSM-EM<sup>[15]</sup>单纯形优化方法进行优化。优化初始值可由前述配准方法得到。

$$\min_{R, T} \sum_i^N \|K[x_{cl,i}, y_{cl,i}, z_{cl,i}]^T \cdot \frac{1}{z_{cl,i}} - [u_i, v_i, 1]^T\|_2^2 \quad (9)$$

## 4 实验结果

进行热像仪内部参数配准后,以前文所述温控镂空发热网为配准靶,使用组合感知系统对配准靶

进行扫描与拍摄,俯仰角范围 $-25^{\circ}\sim 25^{\circ}$ ,横向扫描角范围 $-50^{\circ}\sim 50^{\circ}$ ,扫描角分辨率为 $0.25^{\circ}$ 。共采集 3 组热像仪图像及激光点云数据,平面符合度检查时取阈值为 $2.35\sigma$ 。

使用前述方法,依靠 1 组数据计算得到的旋转平移矩阵 R/T 如表 1(a)所示,照此 R/T 将深度特征点映射到热像仪图像上,如图 5(a)所示;随后删除映射误差明显较大的特征点,根据剩余点得到的结果如表 1(b)和图 5(b)所示。最后将采集的 3 组数据各自提取特征点并删除映射误差较大点后,以表 1(b)的结果为初始值,根据 3 组特征点的约束,对配准结果进行优化。NMSM-EM 优化结果如表 1(c)和图 5(c)所示。

表 1 激光雷达与热像仪空间转换关系

Tab.1 Conversion between lidar and IR camera

(a) Unoptimized R/T	(b) R/T after bad points being removed
$\begin{bmatrix} -0.9943 & -0.0085 & -0.1063 \\ -0.0001 & -0.9999 & -0.0109 \\ 0.0851 & -0.0099 & 0.9963 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.9943 & -0.0174 & 0.1055 \\ 0.0091 & -0.9968 & -0.0790 \\ 0.1065 & -0.0776 & 0.9913 \end{bmatrix}$
$[-0.4630 \ -15.1287 \ -254.6950]^T$	$[4.2762 \ -14.1702 \ -209.9257]^T$
Pixel error: 2.2923	Pixel error: 2.0761
(c) R/T optimized by NMSM-EM	(d) R/T got by using the method in [4]
$\begin{bmatrix} -0.9963 & -0.0129 & 0.0850 \\ 0.0121 & -0.9999 & -0.0109 \\ 0.0851 & -0.0099 & 0.9963 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.9938 & 0.0001 & 0.1111 \\ -0.0085 & -0.9972 & -0.0748 \\ 0.1108 & -0.0753 & 0.9910 \end{bmatrix}$
$[64.9197 \ -237.4758 \ -268.9357]^T$	$[-15.5317 \ -41.8237 \ -369.2439]^T$
Pixel error: 1.6358	Pixel error: 3.1776

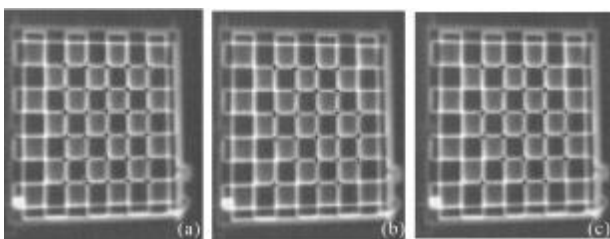


图 5 使用表 1 中的旋转平移矩阵将深度特征点映射到热像仪图像上

Fig.5 Projection of the depth feature points on IR image using R/T in Tab.1

在此基础上,文中进行了 3D 点云染色实验,进一步验证了前述配准方法的有效性,实验结果如图 6 所示,图(a)为场景原图,图(b)为热像仪图像,图(c)、

(d)为使用深灰色将激光点云染色的图像,颜色深度由激光点对应像素点的灰度确定,浅灰色区域是超出了热像仪感知范围的点云。

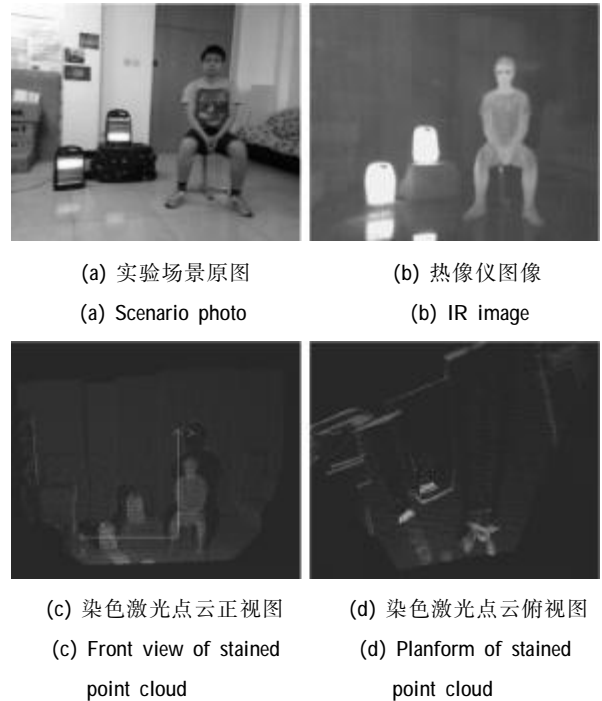
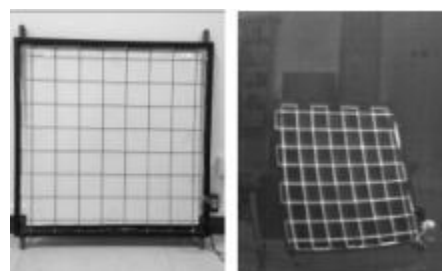


图 6 配准实验结果

Fig.6 Calibration experiment result

将参考文献[4]中所述基于配准面法向量对应性的配准方法作为对比,得到了如表 1(d)的配准结果(统计像素误差使用 3 组数据中的所有特征点计算)。使用表面铺上发热网的配准平面,如图 7(a)所示;图 7(b)为其红外图像;图 7(c)为使用该配准结果得到的染色激光点云。与图 6 比较可知,文中所述方法得到的染色效果要好于参考文献[4]的方法,主要原因在于图 7 中发热网与配准平面没有完全重合,但若完全嵌入配准平面,配准平面会跟随发热网迅速升温而造成无法提取红外特征点。



(a) 铺有发热网的配准平面 (b) 热像仪图像  
(a) Calibration plane with heating net on it (b) IR image



(c) 点云染色效果

(c) Stained points using result of Tab.1(d)

图 7 使用参考文献[4]所述基于面特征对应性的配准结果  
Fig.7 Calibration using the method introduced in reference[4]

## 5 结 论

通过实验发现,影响配准精度的首要因素是深度特征点的提取,虽然使用了平面拟合和平面符合度检查等方法提高深度特征点的提取精度,但从图 5 中也能看出,图像特征点仍比深度特征点整齐,激光挡片安装精度和激光点稀疏的影响是首要原因。下一步可使用金属制激光挡片改善其平整度和导热性。从图 6 的点云染色实验来看,文中配准结果的精度能够满足移动机器人导航的要求,从而达到了文中的目标。

## 参考文献:

- [1] Fu Mengyin, Yang Yi, Zhu Hao, et al. Integrated perception system for mobile robot and its improved registration [J]. *Acta Armamentaria*, 2011, 32(6): 712-718. (in Chinese)  
付梦印, 杨毅, 朱昊, 等. 移动机器人组合感知系统及其配准方法改进[J]. *兵工学报*, 2011, 32(6): 712-718.
- [2] Zhang Changjiang, Fu Mengyin, Jin Mei, et al. Approach to enhance contrast of infrared image based on wavelet transform [J]. *Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 2004, 23(2): 119-124. (in Chinese)  
张长江, 付梦印, 金梅, 等. 一种红外图像对比度增强的小波变换法[J]. *红外与毫米波学报*, 2004, 23(2): 119-124.
- [3] Fu Mengyin, Zhao Cheng. Fusion of infrared and visible images based on the second generation curvelet transform[J]. *Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 2009, 28(4): 254-258. (in Chinese)  
付梦印, 赵诚. 基于二代 Curvelet 变换的红外与可见光图像融合[J]. *红外与毫米波学报*, 2009, 28(4): 254-258.
- [4] Ranjith Unnikrishnan, Martial Hebert. Fast extrinsic calibration of a laser rangefinder to a camera [D]. Pittsburgh: Carnegie Mellon University, 2005.
- [5] Ganhua Li, Yunhui Liu, Li Dong, et al. An algorithm for extrinsic parameters calibration of a camera and a laser range finder Using line features[C]//*Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2007: 3854-3859.
- [6] Fu Mengyin, Liu Mingyang. Space alignment of vision sensor and LMS [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2009, 38(1): 74-78. (in Chinese)  
付梦印, 刘明阳. 视觉传感器与激光测距雷达空间对准方法[J]. *红外与激光工程*, 2009, 38(1): 74-78.
- [7] Rongqian Yang, Wei Yang, Yazhu Chen, et al. Geometric calibration of IR camera using trinocular vision [J]. *Lightwave Technology*, 2011, 29(24): 3797-3803.
- [8] Lakemond Vidas S, Denman R, Fookes S C, et al. A mask-based approach for the geometric calibration of thermal infrared cameras [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2012, 61(6): 1625-1635.
- [9] Polikovskiy S, Kameda Y, Ohta Y. Infrared and visible spectrum camera calibration [C]//*IEICE General Conference*, 2011: 104.
- [10] Dariusz Rzeszutarski, Boguslaw Wiecek. Calibration for 3D reconstruction of thermal images [C]//*9th International Conference on Quantitative Infrared Thermography*, 2008: 563-566.
- [11] Hartley R I. In defense of the eight-point algorithm[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, 19(6): 580-593.
- [12] Zhang Zhengyou. Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations [C]//*Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on Computer Vision* 1999: 666-673.
- [13] Deng Zhihong, Liu Mingyang, Fu Mengyin. A improved method of matching point extracting for vision sensor and LMS space alignment [J]. *Optical Technique*, 2010, 36(1): 43-47. (in Chinese)  
邓志红, 刘明阳, 付梦印. 一种改进的视觉传感器与激光测距雷达特征匹配点提取算法[J]. *光学技术*, 2010, 36(1): 43-47.
- [14] Prabhat K Acharya, Thomas C Henderson. Parameter estimation and error analysis of range data [C]//*Proceedings of International Conference on Robotics and Automation*, 1988: 1709-1714.
- [15] Xiao Hongfeng. Large scale evolution optimization algorithm based on simplex multi-direction search [D]. Changsha: Central South University, 2009. (in Chinese)