

## 平差理论在大口径光学元件轮廓检测中的应用

杨 飞<sup>1,2</sup>, 刘国军<sup>1</sup>, 安其昌<sup>2</sup>

- (1. 长春理工大学 高功率半导体激光国家重点实验室, 吉林 长春 130022;
2. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033)

**摘 要:** 为了更好地进行大口径光学元件轮廓测量, 以激光跟踪仪作为测量的工具, 引入测量平差理论对测量数据进行处理, 以提高光学元件毛坯制作、铣磨加工阶段的轮廓测量精度。首先, 对拟合误差的公式进行了推导, 得出影响拟合精度的因素; 之后, 对于大口径元件轮廓测量的具体检测模型提出了提高拟合精度的方法; 最后, 对于实际的 2 m 量级口径的 SiC 主镜进行了实际的测量与拟合, 并从  $F$  数、拟合残差、结构函数等角度分析了平差结果。所提出的方法对于大口径元件的加工检测具有较好的指导意义。

**关键词:** 轮廓测量; 大口径光学元件; 激光跟踪仪; 测量平差理论; 结构函数

**中图分类号:** TH751    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1007-2276(2015)10-2965-05

## Application of adjustment theory in large aperture mirror surface profile metrology

Yang Fei<sup>1,2</sup>, Liu Guojun<sup>1</sup>, An Qichang<sup>2</sup>

- (1. State Key Laboratory of High Power Semiconductor Laser, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China;

2. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

**Abstract:** With the objective of collecting more accurate results and improving the testing accuracy during the mirror substrate manufacturing and generating phase, the adjustment theory to measure the large aperture mirror profile based on the instrument of laser tracker was adopted. Firstly, the adjustment theory was deduced and the main influence factors for the accuracy of the profile metrology was obtained, then the fitting model of profile of the large aperture mirror was established. And then a method to improve the metrology accuracy for the fitting model was proposed. Lastly, the method was applied to the two meter class in diameter substrate of SiC primary mirror, and the theory was verified from the different aspects of  $F$  number, residual error and structure function. The proposed method could be showed as a guideline to the metrology and manufacture of large aperture mirror.

**Key words:** profile metrology; large aperture mirror; laser tracker; adjustment theory; structure function

收稿日期: 2015-02-05; 修订日期: 2015-03-11

基金项目: 国家自然科学基金(11403022)

作者简介: 杨飞(1982-), 男, 副研究员, 博士生, 主要从事大口径光电望远镜光机系统方面的研究。Email: yangflying@163.com

导师简介: 刘国军(1964-), 男, 教授, 博士, 主要从事光电子器件与技术方面的研究。Email: gjliu626@126.com

## 0 引言

随着大口径光电系统的发展,其面形检测、评价的难度也随之增加。对于大口径反射元件而言,在其粗磨阶段,需要使用一系列接触式测量元件对其面形进行标定,称之为轮廓检测<sup>[1-4]</sup>。

传统的接触式轮廓检测,一般使用的器件有电子水平仪与摆臂轮廓仪:前者的测量点可以任意选取,单点测量精度高,但是对于测量点的定位精度却很难控制,随着测量尺度的增加,测量位置带来的不确定度也随之增加;后者虽然其测量点的位置可以由编码器准确读出,但是其取样位置却由于摆臂本身的限制只能在某段圆弧上取点,由于大口径元件的起伏一般较为复杂,故该方法容易造成欠采样<sup>[5-8]</sup>。

激光跟踪仪是指应用激光干涉仪、精密角度解码器和光束导向伺服跟踪机构来完成动态维坐标测量的仪器。激光跟踪可以连续地瞄准、跟踪并确定由移动或稳定的反射目标返回激光束的位置。Leica(莱卡)公司激光跟踪仪具有动态扫描功能,不仅可以实现单点测量,而且可以在移动过程中进行高频动态采点,实现对空间运动轨迹的测量。在国外的一些大口径望远镜的检测中,已经使用其作为接触式面形检测工具<sup>[9]</sup>。

测量平差理论是针对地貌遥感测量等问题而提出的相关理论,其基本原理是基于测量模型的数学表达与数理统计理论,选取适当的参数以及数据对测量结果中的误差进行抑制,以达到更准确的测量。

文中基于激光跟踪仪的测量过程,对大口径系统面形检测进行研究。具体来说,激光跟踪仪可以根据需要在 1~80 m 的范围内测量任意散点的坐标,并将误差控制在 50 μm 以内。测量平差理论指出,在同样的测量精度条件下,对于不同测量点分布,得出结果的精度也不尽相同。利用自由网平差理论,结合激光跟踪仪获得的镜面轮廓数据,利用四元数方法以及 Gauss-Markov 模型来确定合适的最小二乘拟合策略<sup>[10-11]</sup>。

## 1 测量平差理论

对于一般的测量系统来说,系统的测量数据基

本上都是超定的,之后以各种准则为基础,通过拟合得到需要的系统参数。平差理论指出,选取合适的系统参数可以得到更加鲁棒的测量模型,根据不同的测量目标选择合理的参数表达是提高约束测量精度的关键。

平差模型最为常见的是基本的 Gauss-Markov 模型:

$$\begin{cases} L=AX+\Delta \\ E(\Delta)=0; \text{cov}(L)=\sigma_0^2 P^{-1} \end{cases}$$

式中: $L$  为测量矩阵; $A$  为系数矩阵; $X$  为主参数; $\Delta$  为观测误差; $\sigma_0^2$  为母体单位权方差; $P$  为权矩阵。

由该模型可以得到估计值真差向量: $e=\hat{x}-x$ ,估计值均方误差为:

$$\begin{aligned} E(e^T e) &= E[(\hat{x}-x+E(\hat{x})-E(\hat{x}))^T(\hat{x}-x+E(\hat{x})-E(\hat{x}))] = \\ &= E\{[\hat{x}-E(\hat{x})]^T[\hat{x}-E(\hat{x})]\} + E\{[E(\hat{x})-x]^T[E(\hat{x})-x]\} = \\ &= \text{trace}[\text{var}(\hat{x})] + \text{trace}[\text{bias}(\hat{x})]^T[\text{bias}(\hat{x})] \end{aligned}$$

式中: $\text{trace}(\cdot)$  表示取矩阵的迹; $\text{var}(\cdot)$  表示取协方差矩阵; $\text{bias}(\cdot)$  表示偏置量。

由该公式可得,系统的误差来源由统计学意义上的系统测量随机误差  $\text{trace}[\text{var}(\hat{x})]$  以及系统建模误差  $\text{trace}[\text{bias}(\hat{x})]^T[\text{bias}(\hat{x})]$  组成。

考虑最小二乘解  $\hat{x}_{LS}=(A^T P A)^{-1} A^T P L$ , 由于其本身的无偏性  $\text{bias}(\hat{x})=0$ , 其估计值均方误差为:

$$E(e^T e) = \text{trace}[\text{var}(\hat{x}_{LS})]$$

之后考虑最小二乘法的误差特性。设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  为  $A^T P A$  的奇异值,对于  $A^T P A$  进行奇异值分解:

$$Q^T A^T P A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$$

$$E(e^T e) = \sigma_0^2 \text{trace}[(A^T P A)^{-1}] = \sigma_0^2 \sum_{i=0}^t \lambda_i^{-1} \quad (1)$$

由上式可以看出,在母体单位权方差一定的情况下,随着系统矩阵的条件数(即最大、最小奇异值之比)增加,求解模型的病态程度也会随之增加。即使算法本身依旧满足最小方差条件,但是其显著性已经遭到了严重的破坏。

## 2 测量模型

标准 Zernike 多项式是一组在单位圆上的正交

基。对于波像差,一般采用 Zernike 多项式进行拟合。利用 Zernike 多项式作为基底来描述系统轮廓。考虑法方程的求解问题,在此仅考虑 Zernike 多项式中的离焦与两个方向的像散( $Z_4, Z_5, Z_6$ )。对于原始波前信息进行拟合的法方程如公式(2)所示,其中省略了内积符号:

$$\begin{cases} L = \begin{pmatrix} Z_4(1) & Z_5(1) & Z_6(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_4(t) & Z_5(t) & Z_6(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} + \Delta \\ E(\Delta) = 0; \text{cov}(L) = \sigma_0^2 P^{-1} \end{cases} \quad (2)$$

式中: $a_4, a_5, a_6$  表示 Zernike 多项式系数; $\sigma_0^2$  为母体单位权方差,取为激光跟踪仪的仪器精度;权矩阵  $P$  取为单位阵。

在实际检测中,由于散点测量,原来孔径的旋转对称性遭到了破坏,根据公式(1)可以发现,不同的坐标系下,其拟合误差不尽相同。故为了降低拟合误差,对于测量的结果需要进行坐标变换。

四元数作为一种坐标变换的有力数学工具,已经得到了越来越广泛的应用。利用四元数可以将任何形式的坐标变换为统一的矩阵形式表达。四元数具体的表达如公式(3)所示,转化矩阵公式(4)所示:

$$P_{4 \text{ element}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中: $[p_x p_y p_z]$  为平移向量; $T$  为旋转矩阵。文中利用随机方向法,以达到拟合误差  $E(e^T e)$  最小为目标函数进行寻优,选择合理的拟合坐标系。

下面将基于上述方法对 2 m 级口径 SiC 主镜进行测量以及拟合分析。

实验中使用的 Leica 激光跟踪仪如图 1 所示,实验现场以及被测的毛坯镜如图 2 所示,对于得到的数据进行若干次寻优的结果如图 3 所示。由图可以得出,对于不同的随机寻优方向基本都会找到收敛解,说明整个寻优问题的收敛性良好。

利用该方法进行  $1 \times 10^7$  步随机方向寻优,最后

得到数据变换矩阵  $\text{Trans} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1000.10 \\ 0 & 1 & 0 & -610.9272 \\ 0 & 0 & 1 & 76.4760 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ 。



图 1 激光跟踪仪  
Fig.1 Laser tracker



图 2 利用激光跟踪仪进行测量  
Fig.2 Metrology with laser tracker

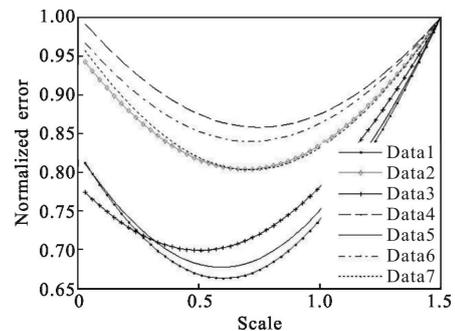


图 3 不同的坐标系下的拟合误差

Fig.3 Fitting error in varied coordination

将该矩阵左乘在数据四元数矩阵左侧,就可以得到处理后的轮廓数据。

利用公式(2)进行拟合,得到的数据如图 4 所示,拟合得到的系统  $F=1.53$ ,与标称(1.5)的误差在 5%以内。同时,得到拟合后残余误差如图 5 所示,得到其 RMS 为  $130 \mu\text{m}$ ,符合下阶段加工要求。从残差图可以看出,面形轮廓的主要变形为周边支撑圈部位的突起,以及在中部区域由于泊松效应产生的变

形,这从另一个角度说明了拟合的准确性。

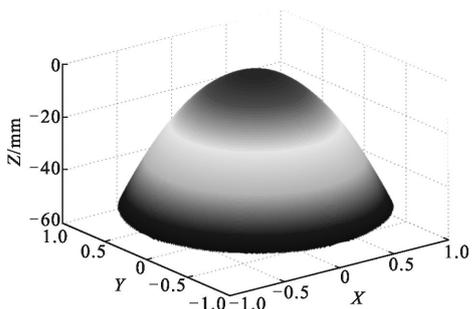


图 4 数据拟合结果

Fig.4 Fitting result

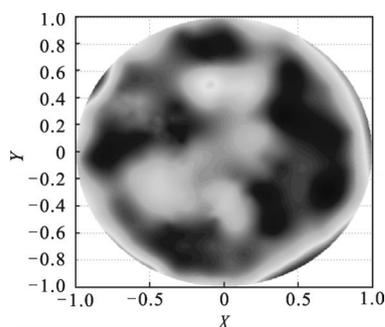


图 5 面形拟合残差

Fig.5 Fitting residual error

结构函数最初是在自适应光学领域提出的数学概念,是对于局部均匀各项同性的大气随机湍流场进行评价的有力工具。具体来说,实际的系统波像差的空间相关函数不只与两点间的空间距离有关,还与其各自的位置有关,故对其取增量相关函数<sup>[9]</sup>:

$$SF(r) = \langle (\phi(x+r) - \phi(x))^2 \rangle_x \quad (5)$$

公式(5)即为国外的一些学者提出的结构函数表达式,通过它可以从不同空间频率上(尤其是中频)研究光学反射镜表面面形。

由图 6 可以看出,检测得到的轮廓结构函数没

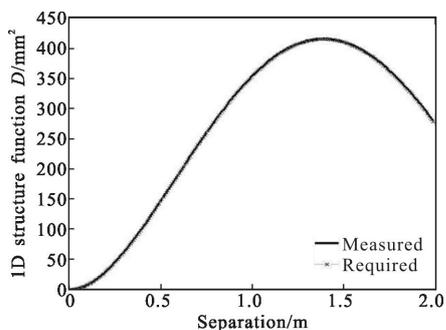


图 6 一维结构函数

Fig.6 1D structure function

有超过要求的结构函数曲线,即满足对于制造所提出的要求。结构函数本质上是在不同的尺度上对于系统轮廓起伏的表征,由于取样的尺度约为 10 mm,故小于该尺度的高频结果可以不纳入考虑;另一方面,不考虑高频的起伏也是轮廓测量的基本原则。

### 3 结论

文中通过将平差理论用于大口径光学器件面形轮廓测量之中,基于高精度坐标测量仪器——激光跟踪仪得到了 2 m 级口径 SiC 的测量数据,利用平差理论得到了该元件的拟合面形轮廓,并结合结构函数等评价指标对于拟合结果进行了分析。

分析结果显示,从  $F$  数、拟合残差、结构函数等角度上看,文中方法都可以得到很好的结果。将其应用于包括大口径 SiC 主镜毛坯制作、铣磨加工等轮廓测量的工程实际之中将是下一步工作的重点。

### 参考文献:

- [1] Zhang Jingxu. Overview of structure of technologies of large aperture ground based telescope [J]. *Chinese Optics*, 2012, 5 (4): 327-336. (in Chinese)  
张景旭. 地基大口径望远镜系统结构技术综述[J]. 中国光学, 2012, 5(4): 327-336.
- [2] Yang Fei, An Qichang, Zhang Jingxu. Mirror surface figure evaluation based on power spectral density[J]. *Chinese Optics*, 2014, 7(1): 156-162. (in Chinese)  
杨飞, 安其昌, 张景旭. 基于功率谱的反射镜面形评价[J]. 中国光学, 2014, 7(1): 156-162.
- [3] Shi Tu, Yang Yongying, Zhang Lei, et al. Surface testing methods of aspheric optical elements [J]. *Chinese Optics*, 2014, 7(1): 26-46. (in Chinese)  
师途, 杨甬英, 张磊, 等. 非球面光学元件的面形检测技术[J]. 中国光学, 2014, 7(1): 26-46.
- [4] Wang Xiaokun. Fabrication and testing of large aperture off-axis SiC aspheric mirror [J]. *Laser & Optoelectrics Process*, 2011, 49(1): 011201. (in Chinese)  
王孝坤. 大口径离轴碳化硅非球面反射镜加工与检测技术研究[J]. 激光与光电子学进展, 2011, 49(1): 011201.
- [5] Chen Baogang, Ming Ming, Lv Tianyu. Precise measurement of curvature radius for spherical mirror with large aperture [J]. *Chinese Optics*, 2014, 7(1): 163-168. (in Chinese)

- 陈宝刚, 明名, 吕天宇. 大口径球面反射镜曲率半径的精确测量[J]. 中国光学, 2014, 7(1): 163-168.
- [6] Zhu Shuo, Zhang Xiaohui. Application of error detaching to Ritchey-Common test for flat mirrors [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2014, 22(1): 7-12. (in Chinese)  
朱硕, 张晓辉. 误差分离技术在平面镜瑞奇-康芒法检测中的应用[J]. 光学精密工程, 2014, 22(1): 7-12.
- [7] Xu Yang, Tang Feng, Wang Xiangchao, et al. Measurement error analysis of absolute flatness test [J]. *Chinese Laser*, 2011, 38(10): 1008009. (in Chinese)  
徐洋, 唐锋, 王向朝, 等. 平面面形绝对检验技术测量误差分析[J]. 中国激光, 2011, 38(10): 1008009.
- [8] Sun Hang, Zhang Haibo, Cao Lihua, et al. Error compensation for primary mirror shaking of large aperture optical detection equipment [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2014, 22(1): 85-91. (in Chinese)  
孙航, 张海波, 曹立华, 等. 大口径光电探测设备主镜晃动的误差补偿[J]. 光学精密工程, 2014, 22(1): 85-91.
- [9] Ross Zhelem. Specification of optical surface accuracy using the structure function [C]//SPIE, 2011, 8083: 808310-1-808310-10.
- [10] Wang Qingfeng, Cheng Dewen, Wang Yongtian. Description of free-form optical curved surface using two-variable orthogonal polynomials[J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(9): 092200201-092200210. (in Chinese)  
王庆丰, 程德文, 王涌天. 双变量正交多项式描述光学自由曲面[J]. 光学学报, 2012, 32(9): 092200201-092200210.
- [11] Xu Xinhang, Gao Yunguo, Yang Hongbo, et al. Large-diameter fast steering mirror on rigid support technology for dynamic platform [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2014, 22(1): 117-124. (in Chinese)  
徐新行, 高云国, 杨洪波, 等. 车载大口径刚性支撑式快速反射镜[J]. 光学精密工程, 2014, 22(1): 117-124.