

## 圆环孔径衍射高斯光束远场发散角研究

王超<sup>1,2</sup>, 董科研<sup>1,2</sup>, 江伦<sup>1,2</sup>, 安岩<sup>1,2</sup>

- (1. 长春理工大学 空间光电技术国家地方联合工程研究中心, 吉林 长春 130022;
2. 长春理工大学 空地激光通信技术重点学科实验室, 吉林 长春 130022)

**摘要:** 基于夫琅禾费衍射理论, 通过对衍射积分的核函数进行近似, 推导并得出了简洁的经圆环形孔径衍射的高斯光束远场发散角的近似解析式。在不同衍射孔径外径和不同遮拦比的条件下, 将该解析式与严格的夫琅禾费衍射积分进行比较, 发现二者求出的远场发散角接近一致, 最大误差不超过 2.7%。与传统数值积分求取光束发散角相比, 该近似解析式在避免繁琐的积分运算同时保持了较高的精度。该解析式成立条件为高斯光束的束腰直径大于等于 3.5 倍中心遮拦直径, 且小于等于孔径直径; 在实际工程应用中, 特别是具有大口径、小遮拦比特点的空间激光通信光学天线这一应用场景, 该条件一般能够被满足。

**关键词:** 衍射光学; 高斯光束; 圆环孔径; 远场发散角

**中图分类号:** O436.1; TN929.11 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2015)12-3634-05

## Far-field divergence for Gaussian beam under annular aperture diffraction

Wang Chao<sup>1,2</sup>, Dong Keyan<sup>1,2</sup>, Jiang Lun<sup>1,2</sup>, An Yan<sup>1,2</sup>

- (1. NUERC of Space and Optoelectronics Technology, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China;
2. Fundamental Science on Space-Ground Laser Communication Technology Laboratory, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China )

**Abstract:** The simple approximated analytic expression for the far-field divergence angle of Gaussian beam diffracted by an annular aperture was derived based on the Fraunhofer diffraction theory and by the approximate of the diffraction integration kernel function. For diffraction aperture with different diameters and obscuration ratios (OR), the analytic expression was compared by strict Fraunhofer diffraction expression, and the far-field divergences solved by these two expressions were nearly identical. The error was no more than 2.7%. Compared with the traditional method of getting the beam divergence by numerical integration, the troublesome integral was avoided, but a relative high precision was kept through this approximated formula. The analytic formula was effective on condition that the Gaussian beam waist diameter was more than or equal to 3.5 times the obscuration diameter, and less than or equal to the aperture diameter. In an actual engineering application, especially the space laser communication optical antenna with the characteristics of large-aperture and small-OR, the establishing conditions generally are satisfied.

收稿日期: 2015-04-13; 修订日期: 2015-05-15

基金项目: 国家自然科学基金重大研究计划(91338116)

作者简介: 王超(1986-), 女, 讲师, 博士, 主要研究方向为光学系统设计和光通信技术。Email: Nicklo19992009@163.com

**Key words:** diffraction optics; Gaussian beam; annular aperture; far-field divergence angle

## 0 引言

在空间激光通信应用中,激光高斯光束的远场发散角大小是系统设计时需要考虑的重要指标。一般而言,光束发散角越小,越能够有效地利用激光能量,从而降低对接收器灵敏度的要求,信号光的捕获也变得更为容易。对于星地或星间激光通信,其发射天线通常设计为大口径卡塞格林反射式结构,这种光学结构有圆形的中心遮拦,使得整个系统具有环形光阑,并使高斯光束发生基于圆环孔径的衍射效应<sup>[1-3]</sup>。因此,如何方便快捷地求取环形孔径限制下高斯光束的远场发散角,判别光束质量,是实际应用中十分关注的问题。

传统上多通过数值积分法来求出高斯光束的远场光强分布,进而求出光束边缘光强为中心强度  $1/e$  处所对应的发散角<sup>[4-6]</sup>。该方法过于繁琐,必须借助计算机才能完成,因此有许多研究者提出了使用更为方便的发散角近似式,如:E.M.Drege 等人推导了傍轴高斯光束圆孔衍射下的束散角近似解析式<sup>[7]</sup>;刘宏展等人在此基础上得到了圆孔限制下有相位变化的高斯光束远场发散角近似计算式<sup>[8]</sup>;周国泉等人推导了高斯衍射光束 TE 项和 TM 项远场孔径角的有限项级数展开式等<sup>[9]</sup>。但以上研究都是针对圆孔衍射,当孔径形状为圆环形时,以上公式不再适用。因此,仍需进一步寻找计算方便、精确度高的环形孔径受限的高斯光束远场发散角近似表达式。

文中借助于数学处理技巧,得到了简洁的环状孔径受限高斯光束远场发散角的近似解析式。只需知道高斯光束的波长、束腰半径与圆环内外半径的大小,便可依此式求得高斯光束远场发散角。在不同的参量条件下,将该解析式求得的结果与衍射积分求得的发散角进行对比,发现最大误差不超过 2.7%。可见该式具有较高精度,且形式简单,为工程计算带来一定方便。

## 1 高斯光束经环形光阑衍射的远场发散角近似解析式

星间激光通信系统中,准直天线一般为具有中

心遮拦的两反射镜系统,且经天线变换后的光束能量在横截面上仍具有高斯分布。因此,光束在通过光学天线时发生的物理行为等同于一高斯光束在传播过程中受到环形孔径限制而发生衍射。为研究该光束的远场发散特性,首先给出圆环受限情况下的远场复振幅分布。为简化问题,假设高斯光束具有单位振幅,且束腰位于光学系统主面上,则远场复振幅分式为<sup>[10]</sup>:

$$U(r',z) = \frac{\exp(ikz)\exp(i\frac{kr'^2}{2z})}{ikz} \cdot 2\pi \int_{a_2}^{a_1} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) J_0\left(\frac{kr r'}{z}\right) r dr \quad (1)$$

式中: $a_1$ 、 $a_2$ 分别为圆环外半径和内半径; $k=2\pi/\lambda$ ,其余变量含义见图 1。

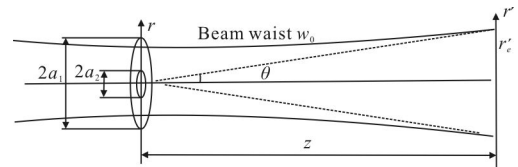


图 1 高斯光束圆环衍射参数

Fig.1 Annular aperture diffraction parameters for Gaussian beam

根据公式(1),对于观察屏轴上点,其复振幅解析式为:

$$U(0,z) = C \cdot 2 \int_{a_2}^{a_1} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) r dr = C \cdot w_0^2 \cdot \left\{ \exp\left[-\left(\frac{a_2^2}{w_0^2}\right)\right] - \exp\left[-\left(\frac{a_1^2}{w_0^2}\right)\right] \right\} \quad (2)$$

式中: $C = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \cdot \pi$ ,则 $|C| = \pi$ 。

高斯光束的发散角定义为光束幅值为最大值的  $1/e$  点所对应的光场径向距离  $r'_e$  与光束传播距离  $z$  的比值<sup>[11]</sup>。即:

$$|U(r'_e, z)| = \frac{U(0, z)}{e} \quad (3)$$

$$\theta_{div} = \frac{r'_e}{z} \quad (4)$$

公式(1)的精确解析解难以求出,导致在求取远

远场发散角时只能进行繁琐的数值积分。为了解决这一问题,将对公式(1)的被积函数进行深入研究。被积函数部分可写为:

$$L(r, r', z) = \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) J_0\left(\frac{kr r'}{z}\right) \quad (5)$$

由于在  $r' \leq r_e$  情况下,公式(5)中的零阶贝塞尔函数可以使用高斯函数近似<sup>[7-8]</sup>,即

$$J_0\left(\frac{kr r'}{z}\right) \approx \exp\left(-\frac{r^2}{v(r')^2}\right) \quad (6)$$

式中:  $v(r') = Kz/kr'$ ,  $K$  为一个需要确定的常数。

则公式(6)可转换为:

$$L(r, r', z) \approx \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{v(r')^2}\right) = \exp\left(-\frac{r^2}{u(r')^2}\right) \quad (7)$$

式中:  $\frac{1}{u(r')^2} = \frac{1}{w_0^2} + \frac{1}{v(r')^2}$ , 易知  $u(r')$  是一个实数。

将公式(7)代入公式(1)中,得到:

$$U(r', z) = C' \cdot 2 \int_{a_2}^{a_1} \exp\left[-\frac{r^2}{u(r', z)^2}\right] r dr = C' u^2 \left[ \exp\left(-\frac{a_2^2}{u^2}\right) - \exp\left(-\frac{a_1^2}{u^2}\right) \right] \quad (8)$$

式中:  $C' = \frac{\exp(ikz) \exp\left(i \frac{kr'^2}{2z}\right)}{i\lambda z} \cdot \pi$ , 则  $|C'| = \pi = |C|$ 。

令  $D = \frac{|U(0, z)|}{e|C|}$ , 则根据公式(2)可得到:

$$D = w_0^2 \cdot \left[ \exp\left[-\left(\frac{a_2}{w_0}\right)^2\right] - \exp\left[-\left(\frac{a_1}{w_0}\right)^2\right] \right] / e \quad (9)$$

易知对于确定参量的光源与衍射孔径,  $D$  是一个常数。

根据公式(3),有:

$$\left| U(r'_e, z) \right| = |C| \cdot D \quad (10)$$

根据公式(8),有:

$$\left| U(r'_e, z) \right| = |C'| \cdot u^2 \left[ \exp\left(-\frac{a_2^2}{u^2}\right) - \exp\left(-\frac{a_1^2}{u^2}\right) \right] \quad (11)$$

联立公式(10)、(11),并假设圆孔半径远大于光束束腰大小,即  $w_0 \ll a_1$ , 则公式(11)中的  $\exp\left(-\frac{a_2^2}{u^2}\right) \approx 0$ 。

则得到

$$u^2 \exp\left(-\frac{a_1^2}{u^2}\right) = D \quad (12)$$

为尽量减小能量损失,通信用卡式天线的中心

遮拦  $a_2$  一般设计的很小。故有假设  $a_2 \ll u$ , 则  $a_2^2/u^2 \rightarrow 0$ , 可对公式(12)中的指数项作泰勒近似,得到:

$$u^2 \left(1 - \frac{a_2^2}{u^2}\right) = D \quad (13)$$

整理公式(13),得:

$$\frac{1}{w_0^2} + \left\{ \frac{kr'_e}{Kz} \right\}^2 = \frac{1}{a_2^2 + D} \quad (14)$$

整理公式(14),得:

$$\theta_{div} = \frac{r'_e}{z} = \frac{K}{k} \left\{ \frac{1}{a_2^2 + D} - \frac{1}{w_0^2} \right\}^{1/2} \quad (15)$$

为了求得常数  $K$  的值,需要得到  $\theta_{div}$  在极端情况下的值。在光束自由传播情况下,认为衍射孔径外径  $a_1$  无限大,  $a_2 = 0$ , 则公式(9)和(15)可简化为:

$$D = w_0^2 / e \quad (16)$$

$$\theta_{free} = \frac{K\lambda}{2\pi} \left\{ \frac{1}{D} - \frac{1}{w_0^2} \right\}^{1/2} \quad (17)$$

将公式(16)代入公式(17),得到自由传播情况下,光束传播无穷远距离后发散程度:

$$\theta_{free} = \frac{K\sqrt{e-1}}{2} \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (18)$$

由于自由传播情况下高斯光束在无穷远处孔径角为<sup>[10]</sup>:

$$\theta_{free} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (19)$$

比较公式(18)、(19),即可得到  $K$  值:  $K = 2 / \sqrt{e-1} \approx 1.5257$ 。依据参考文献[7]中提出对  $K$  值做适当修正,以使近似式与真值更为接近的思想,此处对  $K$  乘以一个经验性的修正因子 1.02,并代入公式(15),即得到了满足远场条件时,高斯光束经准直系统后的束散角的近似解析式:

$$\theta_{div} = \frac{1.5562}{k} \left( \frac{1}{a_2^2 + D} - \frac{1}{w_0^2} \right)^{1/2} \quad (20)$$

其中  $D$  的含义见公式(9)。对于公式(20),其值通过对光束参量进行简单的运算即可得到。

公式(20)的推导中使用了  $a_2 \leq u$ ,  $w_0 \leq a_1$  的假设。实际上,该式的成立条件可简化和放宽至  $3.5a_2 \leq w_0 \leq a$ 。下一节将通过数值计算验证公式(20)的适用范围。

## 2 远场发散角数值仿真计算

下面将讨论公式(20)能否很好地近似利用公式(1)得到的发散角数值及两式的吻合程度。由于光通信中使用的具有中心遮拦的反射式天线通常口径大于 100 mm,且为了减少能量损失,中心遮拦一般不超过 1/10。因此取中心遮拦占整体口径的比例分别为 1/10 和 1/12, 通光半孔径  $a_1$  分别为 50、60、75 mm 的情况来进行验证。光束波长  $\lambda = 790 \text{ nm}$ , 则  $a_1 = 75 \text{ mm}$  时瑞利距离  $L = \pi a_1 / \lambda = 22\,358 \text{ m}$ 。选择远场距离  $z = 100L$ ; 光束束腰的取值为中心遮拦  $a_2$  的 3.5 倍或更大,但小于光学系统的通光口径  $a_1$ 。画出远场发散角随束腰大小的变化曲线,如图 2 所示。

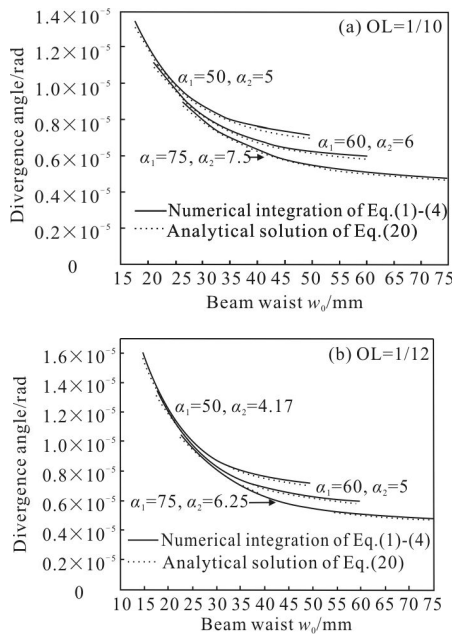


图 2 衍射口径不同时,公式(1)和(20)计算得到的远场发散角随束腰半径大小变化的关系曲线

Fig. 2 Curves of the far-field divergence angles calculated by Eq.(1) and Eq.(20) with the radius of beam waists in different diffraction apertures

由图 2 中可以直观地看出,利用公式(1)和(20)计算得出的数据插值形成的曲线吻合得较好。并可观察到:衍射孔外径不变时,高斯光束衍射后的远场发散角随光束束腰大小增加而减小。在光束束腰大小不变时,远场发散角随衍射孔外径增大而减小。图 3 为两种不同的遮拦比情况下,解析式与真值的

误差值(公式(1)所得结果与公式(20)所得结果的差值与公式(1)结果相除得到的比值)。可见对于 50、60、75 mm 口径的光学系统,当遮拦比为 1/10 时,文中给出的远场发散角近似解析公式(25)与实际值的误差小于 2.7%;当遮拦比为 1/12 时,公式(20)与实际值误差值的绝对值小于 2.1%。对于某一固定的衍射孔径和遮拦比,误差首先随束腰的增大而减小,这是由于此时  $a_2^2 / u^2$  越来越趋近于 0,满足公式(12)中泰勒级数展开的条件,使得公式(12)过渡为公式(13)时的误差越来越小。随着束腰进一步增大,公式(11)中的  $\exp(-a_1^2 / u^2)$  逐渐不能简单近似为 0,使得误差逐渐增大,但其绝对值仍然不高于 2.7%,且增幅逐渐减小,到束腰与衍射孔径等大时,误差值基本稳定。因此在满足  $3.5a_2 \leq w_0 \leq a_1$  的条件下,用公式(20)来估算圆环孔径衍射的高斯光束远场发散角是合适的。

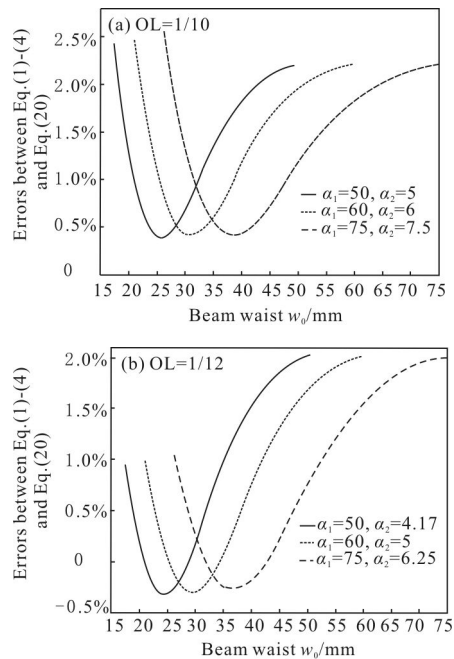


图 3 不同衍射外径条件下,公式(1)与(20)的误差随束腰大小变化的曲线

Fig. 3 Curves of errors between Eq. (1) and Eq. (20) with the radius of beam waists in different diffraction apertures

在实际工程应用中,  $3.5a_2 \leq w_0 \leq a_1$  的情况是十分常见的。以一个通信波长为 790 nm 的反射式光学发射卡式天线为例,假设该系统半口径  $a_1$  为 75 mm,中心遮拦比为 1/10(即  $a_2$  为 7.5 mm), $F$  数为 5,焦距

为 750 mm。激光器采用单模尾纤接入光学系统,模场半径(即初始束腰)为 5.3  $\mu\text{m}$ 。为了得到最好的准直效果,通常将激光器发出的光束束腰定位于光学系统的前焦面上。此时被光学系统变换后的高斯光束有最大的束腰半径,可写作<sup>[10]</sup>:

$$w_0 = f' \lambda / (\pi w_{01}) \quad (21)$$

式中: $w_{01}$  为光纤模场半径; $\lambda$  为光源波长; $f'$  为光学系统焦距; $w_0$  为天线变换后的光束束腰。将各参数代入,得到变换后的光束束腰  $w_0$  为 35.58 mm,满足  $3.5a_2 \leq w_0 \leq a$ 。假设其他参数不变,但光学系统的  $F$  数变为 10,此时  $w_0$  为 71.16 mm,仍然符合公式(20)成立的前提条件。可见文中推导的高斯光束发散角近似解析式虽然只能在一定条件下使用,但在大多数情况下该式成立的条件能够被满足。因此公式(20)具有一定的实际意义。

### 3 结论

文中对通过环形光阑发生衍射的高斯光束的远场发散角进行了理论研究。通过对夫琅禾费衍射积分的核函数进行近似,将繁琐的衍射积分转化为简单的近似解析式。在不同的衍射孔径外径和不同遮拦比的条件下,将该解析式求得的结果与衍射积分求得的发散角进行对比,发现二者十分吻合,其误差不大于 2.7%。但该解析式只适用于  $3.5a_2 \leq w_0 \leq a$  的情况,当不满足此条件时,它必须被修正,因此具有一定的局限性。但经第 2 节分析,针对实际工程应用,特别是具有大口径、小遮拦比特点的空间激光通信光学天线这一应用场景,近似解析式(20)成立的条件一般能够被满足。此时该解析式能够较为准确地表征高斯光束远场衍射发散角,且形式简单,在工程计算中有一定应用价值。

### 参考文献:

- [1] Yu Jianjie, Li Xuanjiao, Tan Liying, et al. Off-axis optical telescope for satellite laser communication terminal [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(7): 1890-1895. (in Chinese)  
俞建杰,李宣娇,谭立英,等. 离轴天线在卫星激光通信系统中的应用[J]. 红外与激光工程, 2013, 42(7): 1890-1895.
- [2] Tong Shoufeng, Jiang Huilin, Zhang Lizhong. High data-rate space laser communication system and its application [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2010, 39(4): 649-654. (in Chinese)  
佟首峰,姜会林,张立中. 高速率空间激光通信系统及应用[J]. 红外与激光工程, 2010, 39(4): 649-654.
- [3] Cheng Hongwei, Chen Erhu. Development and enlightenment of data-relay satellite systems using laser links abroad [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(6): 1571-1574. (in Chinese)  
程洪玮,陈二虎. 国外激光链路中继卫星系统的发展与启示[J]. 红外与激光工程, 2012, 41(6): 1571-1574.
- [4] Kauffman J F. The calculated radiation patterns of a truncated Gaussian aperture distribution [J]. *IEEE Trans Antennas Propag*, 1965, AP-13: 473-474.
- [5] Peng Wang, Yuguang Xu, Wei Wang et al. Analytic expression for Fresnel diffraction [J]. *J Opt Soc Am*, 1998, 15: 684-688.
- [6] Zhou Guoquan, Zhao daomu, Wang Shaomin. Characteristics of axial light intensity of planar wave diffracted by small circular aperture [J]. *Acta Optical Sinica*, 2003, 23(1): 22-25. (in Chinese)  
周国泉,赵道木,王绍民. 平面波经小圆孔衍射的轴上光强特性[J]. 光学学报, 2003, 23(1): 22-25.
- [7] Drege E M, Skinner N G, Byrne D M. Analytical far-field divergence angle of a truncated Gaussian beam [J]. *Applied Optics*, 2000, 39: 4918-4925.
- [8] Liu Hongzhan, Huang Xuguang. Analysis of far-field divergence of a Gaussian beam with phase variation under circular aperture diffraction [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2007, 36(11): 2138-2141. (in Chinese)  
刘宏展,黄旭光. 圆孔限制下有相位变化的高斯光束远场发散度的理论分析[J]. 光子学报, 2007, 36(11): 2138-2141.
- [9] Zhou Guoquan, Chu Xiuxiang. Far-field divergent properties of linearly polarized Gaussian beam diffracted at circular aperture [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2012, 24(9): 2047-2052. (in Chinese)  
周国泉,储修祥. 高斯光束经圆形光阑衍射的远场发散特性[J]. 强激光与粒子束, 2012, 24(9): 2047-2052.
- [10] Yu Daoying, Tan Hengying. Engineering Optics [M]. Beijing: China Machine Press, 2005: 165-171. (in Chinese)  
郁道银,谈恒英. 工程光学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005: 165-171.
- [11] Liu Hongzhan, Xu Rongwei, Liu Liren, et al. Far-field approximation and divergence of Gaussian beam with phase aberrations diffracted by a circular aperture [J]. *Acta Optical Sinica*, 2006, 26(1): 131-135. (in Chinese)  
刘宏展,徐荣伟,刘立人,等. 圆孔受限波差高斯光束的远场近似及发散度分析[J]. 光学学报, 2006, 26(1): 131-135.