

一种适用于空间监视跟踪的递推滤波算法

陈慕羿, 田野, 王洪源

(沈阳理工大学信息科学与工程学院, 沈阳 110159)

摘要: 针对空间监视跟踪环境中对于包含角变量的状态向量估计存在精度较低的缺点, 利用 Gauss von Mises (GVM) 多变量概率密度分布, 提出一种基于矩匹配的 GVM 参数估计方法, 并在此基础上改进 GVM 分布的确定性采样方法, 建立针对 GVM 分布的递推滤波算法, 该算法充分考虑了流形的内蕴结构, 克服了传统滤波方法假设状态向量定义于欧氏空间及采用欧氏空间中高斯分布模型的局限性。仿真结果表明, 该滤波算法能有效估计状态变量的后验概率分布, 对角变量的估计精度明显优于扩展卡尔曼滤波方法 (EKF)。

关键词: 空间态势感知; 空间监视; Gauss von Mises (GVM) 分布; 参数估计; GVM 滤波

中图分类号: V488.21

文献标识码: A

文章编号: 1000-1328(2016)07-0862-07

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2016.07.013

Recursive Filtering Algorithm for Space Surveillance Tracking Applications

CHEN Mu-yi, TIAN Ye, WANG Hong-yuan

(School of Information Science and Engineering, Shenyang Ligong University, Shenyang 110159, China)

Abstract: In space surveillance tracking environment, in order to improve the estimation accuracy for the state of a space object which includes an angular variable, the Gauss von Mises (GVM) distribution defined on $S \times \mathbf{R}^n$ is employed, a GVM parameter estimation method is proposed, the deterministic sampling algorithm for GVM distribution is improved, and finally the GVM recursive filtering algorithm is developed. The algorithm takes into consideration the intrinsic structure of the manifold, instead of adopting the traditional Gaussian distribution assumption which the state variable is defined on \mathbf{R}^n . Results demonstrate that the proposed GVM filtering algorithm can estimate the posterior probability distribution of the state vector effectively, and more accurate results can be achieved compared to the traditional extended Kalman filter (EKF) especially for angular variable.

Key words: Space situational awareness; Space surveillance; Gauss von Mises (GVM) distribution; Parameter estimation; Gauss von Mises (GVM) filtering

0 引 言

空间态势感知 (Space situational awareness, SSA) 的主要研究目标是近地空间环境中的轨道空间对象 (如侦察监视情报卫星、预警探测卫星、导航定位卫星、空间碎片、战略导弹、反导导弹等目标), 对其进行搜索跟踪、测轨编目、识别评估等。在许多 SSA 应用中, 例如跟踪、数据关联、相交分析、碰撞概率、传感器资源管理和异常检测等, 需要尽可能精确

地估计空间物体轨道状态的不确定性特征^[1]。尽管在某些情况下, 例如在导弹防御中, 大多采用高斯模型和局部线性假设, 但空间监视跟踪环境具有本质的不同, 具有测量更新的时间间隔长, 高误检测率, 非线性和不守恒动力学和非高斯现象等特点, 在这种情况下, 均值和协方差无法准确地表示出空间目标状态的不确定性特征, 基于高斯模型和局部线性假设的扩展卡尔曼滤波器 (Extended Kalman filter, EKF)、无迹卡尔曼滤波器 (Unscented Kalman

filter, UKF)、积分卡尔曼滤波器(Quadrature Kalman filter, QKF)等均是基于 \mathbf{R}^n 空间中的高斯分布模型所设计的,当状态向量中包含角变量时,难以达到理想的效果,不能准确预测出空间目标状态的不确定性。文献[2]提出的带渐消因子的积分卡尔曼滤波能够提高QKF算法的稳定性,且具有适中的计算量,但依然是基于卡尔曼线性滤波框架的方法。除此以外,高斯和滤波器^[3]及粒子滤波器^[4]虽能够较好地处理非线性问题,但依然要求状态空间定义于 n 维欧氏空间 \mathbf{R}^n 中。

在对目标的状态不确定性进行估计时,若要得到更精确的结果,必须考虑到系统状态定义于其上的流形的内蕴结构,采用定义于该流形上的概率密度函数。例如,在空间监视跟踪问题中,系统状态经常采用轨道参数坐标^[5]来表示,其状态向量中包含6个分量,其中5个可以用定义于 \mathbf{R}^5 上的无界笛卡尔坐标进行近似,而另一个分量是角变量,定义于单位圆周 S 上,此时 θ 和 $\theta + 2\pi k$ 是等价的,位于轨道上的相同位置。因此,轨道参数状态空间是定义于六维柱体 $S \times \mathbf{R}^5$ 之上的。若将角坐标视为无界笛卡尔坐标,会引起许多问题。

为了对空间目标的状态进行更精确地估计,许多学者利用方向统计学中的相关理论及研究成果,针对一些特殊流形建立了概率分布模型。文献[6-7]提出了圆-线性相关系数,将 von Mises 分布推广到了柱面,并给出了多变量 von Mises 分布及其参数估计方法。文献[8]也提出了定义于刚体运动群 SE(2) 上的部分缠绕正态分布(Partially wrapped normal, PWN) 概率分布,但这些研究中都没有提出相应的滤波算法。此外,多传感器角融合滤波器^[9],四元数 Bingham 滤波器^[10-11]给出了基于 Bingham 分布或圆分布的滤波方法,文献[12]针对纯方位目标跟踪问题,提出了改进高斯混合粒子滤波方法,文献[13]提出了将粒子滤波和预测滤波相结合的姿态确定算法。但这些研究中,状态向量中只包含角变量或四元数表示的三维旋转量,不包含任何线性变量,无法解决定义于柱体 $S \times \mathbf{R}^n$ 上的状态变量估计问题。

文献[14]针对空间监视领域的应用特点,提出了定义于柱体 $S \times \mathbf{R}^n$ 上的 Gauss von Mises(GVM)分布模型,该模型不但考虑到了角变量的周期性,而且

还考虑到了在 SSA 应用中,轨道状态的概率密度函数的水平集呈现“香蕉”形状的特点,在分布模型中引入了 $n \times n$ 阶矩阵 Γ 来更精确地量化不确定性,但文中只考虑了某时间段内的不确定性传播问题,并没有给出利用测量数据进行量测更新的方法,没有提出完整的滤波算法。

本文针对定义于 $S \times \mathbf{R}^n$ 上的 GVM 分布,改进了 GVM 确定性采样方法,使其具有更高的稳定性,提出了基于矩匹配的 GVM 参数估计方法,并在此基础上,设计了完整的递推滤波算法,可以在空间监视跟踪应用中,例如多目标跟踪中,对来自雷达、光电传感器或 IR 传感器等测量设备的测量数据进行融合,对目标的轨道状态进行后验估计。

1 GVM 分布模型描述

GVM 分布建立在多元高斯分布和 von Mises 分布的基础之上。定义于单位圆上的角变量 θ 的 von Mises 分布 VM(μ, κ) 具有概率密度函数:

$$\text{VM}(\theta; \mu, \kappa) = \frac{e^{\kappa \cos(\theta - \mu)}}{2\pi I_0(\kappa)} \quad (1)$$

式中: $\mu \in [0, 2\pi)$, $\kappa > 0$, I_0 表示零阶第一类修正贝塞尔函数,其定义为:

$$I_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\kappa \cos \theta} d\theta \quad (2)$$

对于一个定义在圆周上的随机变量 θ ,其 k 阶圆周矩可由下式给出:

$$m_k = \text{E}[e^{ik\theta}] = \text{E}[\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)] \in \mathbf{C} \quad (3)$$

1.1 GVM 分布的定义

定义 1. GVM 分布^[14]: 随机变量 $(\theta, x) \in S \times \mathbf{R}^n$ 的联合分布满足 GVM 分布,当且仅当它们的联合概率密度函数具有形式:

$$p(\theta, x) = \text{GVM}(\theta, x; \mu, \mathbf{P}, \alpha, \beta, \Gamma, \kappa) = N(x; \mu, \mathbf{P}) \text{VM}(\theta; \Theta(x), \kappa) \quad (4)$$

记为: $(\theta, x) \sim \text{GVM}(\mu, \mathbf{P}, \alpha, \beta, \Gamma, \kappa)$ 。式中:

$$N(x; \mu, \mathbf{P}) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\mathbf{P})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \mathbf{P}^{-1}(x - \mu)\right) \quad (5)$$

$$\text{VM}(\theta; \Theta(x), \kappa) = \frac{\exp(\kappa \cos(\theta - \Theta(x)))}{2\pi I_0(\kappa)} \quad (6)$$

式中:

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{x}) &= \alpha + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z} + (1/2) \mathbf{z}^T \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z} \quad (7) \\ \mathbf{z} &= \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}), \mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \end{aligned}$$

式中: $\det(\mathbf{P})$ 表示矩阵 \mathbf{P} 的行列式, 参数集 $(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}, \alpha, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Gamma}, \kappa)$ 必须满足下列限制: $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^n$, \mathbf{P} 是 $n \times n$ 对称正定矩阵, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{\Gamma}$ 是 $n \times n$ 对称矩阵, $\kappa \geq 0$ 。 \mathbf{L} 是参数矩阵 \mathbf{P} 的下三角 Cholesky 因子。参数 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}$ 用于对 \mathbf{x} 和 θ 的相关性进行建模。

1.2 GVM 分布的特征函数

GVM 分布的特征函数为:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, m; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}, \alpha, \boldsymbol{\beta}, \kappa) &= \frac{I_{|m|}(\kappa)}{I_0(\kappa)} \exp(i(\boldsymbol{\mu}^T \xi + m\alpha) - \\ &\frac{1}{2}(\mathbf{L}^T \xi + m\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{L}^T \xi + m\boldsymbol{\beta})) \quad (8) \end{aligned}$$

式中: $\xi \in \mathbf{R}^n$, $m \in \mathbf{Z}$, I_p 表示 p 阶第一类修正贝塞尔函数, 后文将记 $A(\kappa) = I_1(\kappa)/I_0(\kappa)$ 。

1.3 GVM 分布的规范形式

通过变换: $\varphi = \theta - \alpha - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z} - (1/2) \mathbf{z}^T \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z}$, $\mathbf{z} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$, 可将 GVM $(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}, \alpha, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Gamma}, \kappa)$ 简化为规范形式:

$$\begin{aligned} p(\varphi, \mathbf{z}) &= \text{GVM}(\varphi, \mathbf{z}; \mathbf{0}, \mathbf{I}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \kappa) \equiv \\ &\text{N}(\mathbf{z}; \mathbf{0}, \mathbf{I}) \text{VM}(\varphi; \mathbf{0}, \kappa) \quad (9) \end{aligned}$$

1.4 低阶矩

若 $(\theta, \mathbf{x}) \sim \text{GVM}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}, \alpha, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Gamma}, \kappa)$, 则各低阶矩为: $E[\mathbf{x}] = \boldsymbol{\mu}$, $E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T] = \mathbf{P}$

$$E[e^{i\theta}] = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{I} - i\boldsymbol{\Gamma})}}.$$

$$A(\kappa) \exp\left(i\alpha - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{I} - i\boldsymbol{\Gamma})^{-1} \boldsymbol{\beta}\right) \quad (10)$$

$$E[e^{i\theta} \mathbf{z}] = i(\mathbf{I} - i\boldsymbol{\Gamma})^{-1} \boldsymbol{\beta} E[e^{i\theta}] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} E[e^{i\theta} \mathbf{z} \mathbf{z}^T] &= [(\mathbf{I} - i\boldsymbol{\Gamma})^{-1} - \\ &(\mathbf{I} - i\boldsymbol{\Gamma})^{-1} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{I} - i\boldsymbol{\Gamma})^{-1}] E[e^{i\theta}] \quad (12) \end{aligned}$$

2 基于 GVM 分布的滤波算法设计

本文将主要考虑定义于 $S \times \mathbf{R}^2$ 上的 GVM 分布, 所用的方法可直接推广到 $S \times \mathbf{R}^n$ 。

记 $\mathbf{X} = [\theta, X_1, X_2]^T$, $\mathbf{x} = [X_1, X_2]^T$, $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{x}) = [\mu_1, \mu_2]^T$ 。

2.1 改进的 GVM 确定性采样方法

文献[14]中介绍的确定性采样方法在实际应

用时, 有时会得到小于 0 的粒子权重, 引进数值不稳定性, 导致算法失败。本节对该方法进行了改进, 利用狄拉克混合 (Dirac mixture, DM) 分布^[15] 来实现对 GVM 分布的确定性采样。

定义 2. 圆-线性狄拉克混合 (DM) 分布。具有 L 项的圆-线性 DM 分布为:

$$f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_L, w_1, \dots, w_L) = \sum_{j=1}^L w_j \delta(\mathbf{X} - \boldsymbol{\chi}_j)$$

式中: δ 为狄拉克 δ 函数, w_j 为权重系数,

$$\sum_{j=1}^L w_j = 1, \boldsymbol{\chi}_j = [\chi_{j,1}, \chi_{j,2}, \chi_{j,3}]^T$$

$$w_1, \dots, w_L > 0, \chi_{j,1} \in [0, 2\pi], \chi_{j,2}, \chi_{j,3} \in \mathbf{R}$$

为简化计算, 只需考虑 GVM 规范形式的确定性采样, 非规范形式的样本点 (θ_i, \mathbf{x}_i) 可在求出规范形式的样本点 $(\varphi_i, \mathbf{z}_i)$ 之后利用变换: $\theta_i = \varphi_i + \alpha + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{z}_i + \frac{1}{2} \mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z}_i$, $\mathbf{x}_i = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L} \mathbf{z}_i$ 得到。

给定 $(\varphi, \mathbf{z}) \sim \text{GVM}(\varphi, \mathbf{z}; \mathbf{0}, \mathbf{I}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \kappa)$, 函数 $f: S \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, 为确定 DM 分布的样本点坐标及权重, 使其满足矩匹配条件, 考虑以下积分式的逼近问题:

$$\begin{aligned} E[f(\varphi, \mathbf{z})] &= \\ &\oint_{\mathbf{R}^2} \int_0^{2\pi} f(\varphi, \mathbf{z}) \text{GVM}(\varphi, \mathbf{z}; \mathbf{0}, \mathbf{I}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \kappa) d\varphi d\mathbf{z} \quad (13) \end{aligned}$$

与古典高斯积分方法^[14] 相似, 可以用特定点处函数值的加权和逼近该积分式:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathbf{R}^2} \int_0^{2\pi} f(\varphi, \mathbf{z}) \text{N}(\mathbf{z}; \mathbf{0}, \mathbf{I}) \text{VM}(\varphi; \mathbf{0}, \kappa) d\varphi d\mathbf{z} \approx \\ \sum_{i=1}^N w_i f(\varphi_i, \mathbf{z}_i) \quad (14) \end{aligned}$$

可以看出, 对于特定的矩函数, 该式左端表示 GVM 分布的相应矩, 而右端表示 DM 分布的相应矩。令: $\Omega^0 = \{(\varphi, \mathbf{z}) \in S \times \mathbf{R}^2 \mid \varphi = 0, \mathbf{z} = \mathbf{0}\}$

$$\Omega^\eta = \{(\varphi, \mathbf{z}) \in S \times \mathbf{R}^2 \mid \mathbf{z} = \mathbf{0}, |\varphi| = \eta\} \cup$$

$$\{(\varphi, \mathbf{z}) \in S \times \mathbf{R}^2 \mid \mathbf{z} = \mathbf{0}, |\varphi| = \eta + \pi/2\}$$

$$\Omega^\xi = \{(\varphi, \mathbf{z}) \in S \times \mathbf{R}^2 \mid |z_1| = \xi, z_2 = 0, \varphi = 0\} \cup$$

$$\{(\varphi, \mathbf{z}) \in S \times \mathbf{R}^2 \mid |z_2| = \xi, z_1 = 0, \varphi = 0\}$$

为实现矩匹配, 可使集合中的点和权重对于表 1 中的特定函数满足第二列的限制条件 (对于 \mathbf{z} 的奇数阶多项式来说, 式 (14) 恒成立)。

表 1 样本点位置与权重的限制条件

Table 1 Constraints on position and weights of sample points

$f(\varphi, z)$	限制条件
1	$w_0 + 4w_\eta + 4w_\xi = 1$
$z_i^2, i \in \{1, 2\}$	$2\xi^2 w_\xi = 1$
$\cos\varphi$	$w_0 + 2\cos(\eta)w_\eta + 2\cos\left(\eta + \frac{\pi}{2}\right)w_\eta + 4w_\xi = A(\kappa)$

除表 1 中所列条件外,考虑到系统的数值稳定性,增加限制条件: $w_0, w_\eta, w_\xi > 0$ 。若 $A(\kappa) \geq 0.2$, 采用解: $\xi = 2, \eta = \frac{9}{5}, w_\xi = \frac{1}{8}, w_\eta = \frac{5}{32}(1 - A(\kappa))$, $w_0 = \frac{5}{8}A(\kappa) - \frac{1}{8}$ 。若 $A(\kappa) < 0.2$, 则采用解: $\xi = \sqrt{5}, \eta = \frac{5}{4}\pi, w_\xi = 0.1, w_\eta = \frac{1 - A(\kappa)}{4 + 2\sqrt{2}}, w_0 = \frac{3}{5} - \frac{2 - 2A(\kappa)}{2 + \sqrt{2}}$ 。之后可进一步求得原非规范形式的样本点。

该方法稍加修改即可用于一般情况,对定义于 $S \times \mathbf{R}^n$ 上的 GVM 分布,限制条件如表 2 所示。

表 2 $S \times \mathbf{R}^n$ 中样本点位置与权重的限制条件

Table 2 Constraints on position and weights of sample points in $S \times \mathbf{R}^n$

$f(\varphi, z)$	限制条件
1	$w_0 + 4w_\eta + 2nw_\xi = 1$
$z_i^2, i \in \{1, \dots, n\}$	$2\xi^2 w_\xi = 1$
$\cos\varphi$	$w_0 + 2\cos(\eta)w_\eta + 2\cos\left(\eta + \frac{\pi}{2}\right)w_\eta + 2nw_\xi = A(\kappa)$

考虑到系统的数值稳定性,另外增加条件限制: $w_0, w_\eta, w_\xi > 0$ 。后文中将此确定性采样方法用“DMSampleDeterm”表示。

2.2 基于矩匹配的 GVM 参数估计方法

对于给定的 DM 分布,我们需要根据低阶样本矩,估计 GVM 分布的参数集 $(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}, \alpha, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Gamma}, \kappa)$, 由于与角变量相关的各阶矩均为复变量,很难通过样本矩的精确匹配,得到实值参数。因此,首先对线性部分的均值和协方差进行精确匹配,然后利用最小二乘法,求出角变量相关参数的优化解。

由 DM 分布 $f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_L, w_1, \dots, w_L)$, 可计算出线性部分的样本均值与协方差:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{j=1}^9 w_j \begin{bmatrix} \chi_{j,2} \\ \chi_{j,3} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{j=1}^9 w_j \left(\begin{bmatrix} \chi_{j,2} \\ \chi_{j,3} \end{bmatrix} - \hat{\boldsymbol{\mu}} \right) \left(\begin{bmatrix} \chi_{j,2} \\ \chi_{j,3} \end{bmatrix} - \hat{\boldsymbol{\mu}} \right)^T \quad (16)$$

$$\text{令: } \hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^T, c_1 = \sum_{j=1}^9 w_j e^{i\chi_{j,1}}$$

$$c_2 = \sum_{j=1}^9 w_j e^{i\chi_{j,1}} \hat{\mathbf{L}}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \chi_{j,2} \\ \chi_{j,3} \end{bmatrix} - \hat{\boldsymbol{\mu}} \right), \text{记:}$$

$c_{1r} = \text{Re}(c_1), c_{1m} = \text{Im}(c_1); c_{2r} = \text{Re}(c_2), c_{2m} = \text{Im}(c_2)$ 。其中, $\text{Re}(\cdot)$ 和 $\text{Im}(\cdot)$ 表示对向量 \mathbf{c}_2 的各分量分别取实部和虚部。由式(10)、(11)及矩匹配要求,可将参数估计问题转化为优化问题的解,如下所示

$$(\hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\Gamma}}) = \underset{\alpha, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Gamma}}{\text{argmine}}(\alpha, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Gamma}) \quad (17)$$

式中:

$$e(\alpha, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Gamma}) = (c_{1r} - \text{Re}(E[e^{i\theta}]))^2 + (c_{1m} - \text{Im}(E[e^{i\theta}]))^2 + \lambda |((c_{2r} - \text{Re}(E[e^{i\theta}\mathbf{z}])))|^2 + |(c_{2m} - \text{Im}(E[e^{i\theta}\mathbf{z}])))|^2 \quad (18)$$

当 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的 Frobenius 范数 $\|\boldsymbol{\Gamma}\|_F$ 较小时,对于初值的选取,可先假设 $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{0}_{2 \times 2}$, 令一阶圆矩与样本矩精确匹配,令参数值满足:

$$\begin{cases} A(\kappa_0) \cos\alpha_0 \exp(- (1/2)\boldsymbol{\beta}_0^T \boldsymbol{\beta}_0) = c_{1r} \\ A(\kappa_0) \sin\alpha_0 \exp(- (1/2)\boldsymbol{\beta}_0^T \boldsymbol{\beta}_0) = c_{1m} \end{cases} \quad (19)$$

可解得:

$$\alpha_0 = \arctan(c_{1m}/c_{1r}) \quad (20)$$

$$A(\kappa_0) \exp(- (1/2)\boldsymbol{\beta}_0^T \boldsymbol{\beta}_0) = \sqrt{c_{1r}^2 + c_{1m}^2} \quad (21)$$

对于圆-线性相关部分,只需考虑低阶矩 $E[\mathbf{x}e^{i\theta}]$ 即可,由给定 DM 分布,令:

$$\mathbf{c}_3 = \sum_{j=1}^9 w_j e^{i\chi_{j,1}} \begin{bmatrix} \chi_{j,2} \\ \chi_{j,3} \end{bmatrix} \quad (22)$$

记 $\mathbf{c}_{3r} = \text{Re}(\mathbf{c}_3), \mathbf{c}_{3m} = \text{Im}(\mathbf{c}_3)$, 由矩匹配条件,应满足:

$$\begin{cases} A(\kappa_0) \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_0^T \boldsymbol{\beta}_0\right) (\hat{\boldsymbol{\mu}} \cos\alpha_0 - \hat{\mathbf{L}}\boldsymbol{\beta}_0 \sin\alpha_0) = \mathbf{c}_{3r} \\ A(\kappa_0) \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_0^T \boldsymbol{\beta}_0\right) (\hat{\boldsymbol{\mu}} \sin\alpha_0 + \hat{\mathbf{L}}\boldsymbol{\beta}_0 \cos\alpha_0) = \mathbf{c}_{3m} \end{cases} \quad (23)$$

显然式(23)中的两个式子右边有函数依赖关系,对于样本混合矩,一般无法精确满足式(23),需要寻找最小二乘解,解得:

$$\boldsymbol{\beta}_0 = \hat{\mathbf{L}}^{-1} \left[\left(\hat{\boldsymbol{\mu}} \cos\alpha_0 - \frac{\mathbf{c}_{3r}}{\sqrt{c_{1r}^2 + c_{1m}^2}} \right) \sin\alpha_0 + \right.$$

$$\left[\frac{c_{3m}}{\sqrt{c_{1r}^2 + c_{1m}^2}} - \hat{\boldsymbol{\mu}} \sin \alpha_0 \right] \cos \alpha_0 \quad (24)$$

将式(24)代入式(21),可得:

$$A(\boldsymbol{\kappa}_0) = \sqrt{c_{1r}^2 + c_{1m}^2} / \exp(- (1/2) \boldsymbol{\beta}_0^T \boldsymbol{\beta}_0) \quad (25)$$

式中: $A(\boldsymbol{\kappa}) = I_1(\boldsymbol{\kappa}) / I_0(\boldsymbol{\kappa})$ 。

因此,可求出 $\boldsymbol{\kappa}_0$:

$$\boldsymbol{\kappa}_0 = A^{-1}(\sqrt{c_{1r}^2 + c_{1m}^2} / \exp(- (1/2) \boldsymbol{\beta}_0^T \boldsymbol{\beta}_0)) \quad (26)$$

可以利用式(20)、(24)、(26)的计算结果作为迭代的初始值,采用高斯-牛顿、拟牛顿法,结合例如线性搜索、置信域等方法求解非线性最小二乘问题(17),求得 GVM 参数。后文将用“matchGVM”表示本节中的参数估计方法。

2.3 GVM 滤波算法

本节考虑系统模型 $\boldsymbol{x}_{k+1} = f_k(\boldsymbol{x}_k)$, 这里 $f_k: S \times \mathbf{R}^2 \rightarrow S \times \mathbf{R}^2$ 为非线性系统函数。由于系统状态无法直接观察,只能通过包含噪声的测量值进行估计,因此还需要给定测量模型,本文考虑加性测量噪声模型: $\hat{\boldsymbol{z}}_k = h_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k$, 其中 $\hat{\boldsymbol{z}}_k \in M$, 表示测量空间中的测量结果, $h_k: S \times \mathbf{R}^2 \rightarrow M$ 是测量函数, $\boldsymbol{v}_k \in V$ 是噪声空间中的任意测量噪声。

所设计的 GVM 滤波器(GVMF)包括预测和量测更新两个步骤。预测步骤根据上一时刻估计得到的 GVM 状态分布及系统方程,计算出预测状态分布的 GVM 逼近。量测更新步骤利用似然函数 $f(\hat{\boldsymbol{z}}_k | \boldsymbol{x}_k)$, 根据当前时刻的测量结果,计算出后验状态分布。完整的滤波流程如图 1 所示。

3 仿真校验

利用轨道参数坐标表示的空间无扰动二体引力模型^[14]为: $a(t) = a_0$, $h(t) = h_0$, $k(t) = k_0$, $p(t) = p_0$, $q(t) = q_0$, $l(t) = l_0 + n_0(t - t_0)$, 式中 $n_0 = \sqrt{\mu_{\oplus} / a_0^3}$, 该模型定义于 $S \times \mathbf{R}^5$ 之上,状态向量包含 5 个线性变量和一个角变量。不失一般性,我们针对 $S \times \mathbf{R}^2$ 的情况,将该模型做了一定简化,考虑状态变量包含两个线性变量和一个角变量的情况,并令线性变量的值随时间变化。

设空间目标的状态为 $\boldsymbol{X} = [\theta, X_1, X_2]^T$, θ 是角变量, $[X_1, X_2]^T$ 均为线性变量。设该状态空间模型的状态方程为:

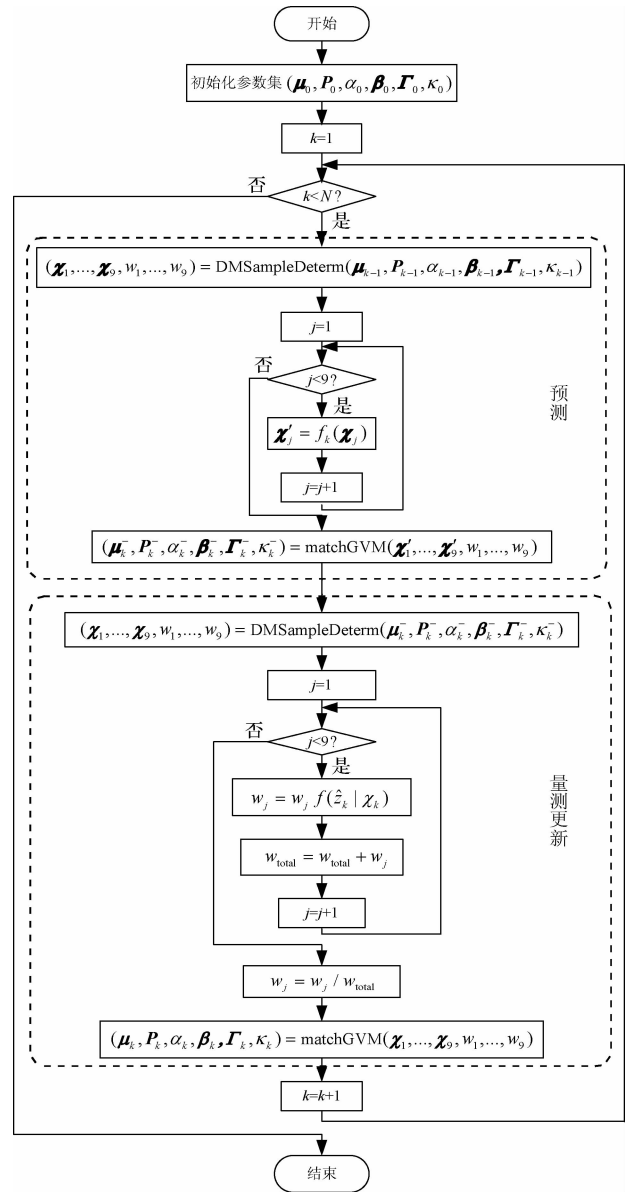


图 1 GVM 滤波器滤波流程图

Fig. 1 Flow chart of GVM filter

$$\begin{cases} \theta_k = \theta_{k-1} + \sqrt{G / (X_{k-1,1}^3)} \Delta t \\ X_{k,1} = X_{k-1,1} + a_1 \Delta t \\ X_{k,2} = X_{k-1,2} + a_2 \Delta t \end{cases} \quad (27)$$

设置量测方程为: $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{n}_k$ 。

利用 MATLAB 2008a, 分别对本文所提出的 GVM 滤波器(GVMF)与扩展卡尔曼滤波器(Extended Kalman filter, EKF)进行仿真。仿真中采用的数据为:真实的初始状态为 $\boldsymbol{X}_0 = [1, 2, 2]^T$, $a_1 = 10$, $a_2 = 20$, $G = 1000$ 。假定对于角变量的初始估计偏差较大,对于 GVMF,设初始状态符合 $\hat{\boldsymbol{X}}_0$ 。

$\sim \text{GVM}(0, \mathbf{I}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 10)$, 对于 EKF, 设初始状态为 $\hat{\mathbf{X}}_0 = [\boldsymbol{\pi}, 0, 0]^T$, 初始状态误差协方差矩阵为 $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$ 。另外, 假定测量噪声为独立同分布, 符合: $\mathbf{n}_k \sim N(\mathbf{0}, 0.1 \times \mathbf{I})$ 。

仿真结果如图 2~4 所示, 可以看出, 在该例中, GVMF、EKF 对于线性变量 X_1, X_2 均能得到准确的估计, 但对于角变量的估计, 随着时间增加, GVMF 估计结果能够较快地收敛于真实值, 而 EKF 最终无法收敛到真实值。

仿真结果表明, 所提出的 GVM 滤波器能够很好地实现滤波, 对角变量的估计精度明显优于 EKF, 并且对某些 EKF 算法发散的情况, 也能得到精度较高的解。

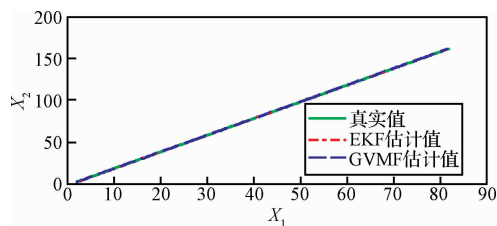


图2 X_1, X_2 的真实值及 EKF/GVM 估计值

Fig.2 Ground truth/EKF/GVM value of X_1, X_2

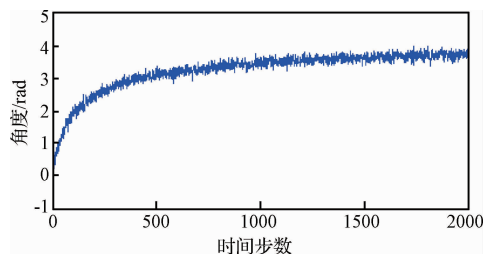


图3 带噪声的角变量测量值

Fig.3 Angle measurements with Gaussian noise

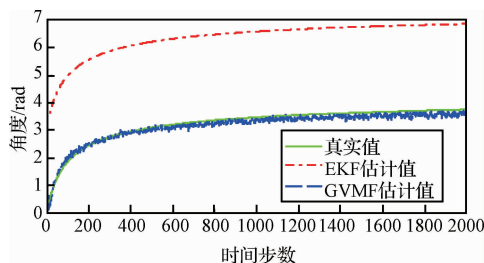


图4 θ 的真实值及 GVM/EKF 滤波后的值

Fig.4 Ground truth/GVM/EKF value of θ

4 结束语

本文针对 GVM 分布, 改进了 GVM 确定性采样

方法, 提出了基于矩匹配的 GVM 参数估计方法, 并设计了完整的 GVM 滤波器, 对非线性状态空间模型进行了仿真, 仿真结果表明, 当状态向量符合 GVM 分布时, 所提出的 GVMF 很好地实现了滤波, 特别是对角变量的估计明显优于 EKF。

总的来说, GVM 分布定义了柱状流形上的概率分布, 与定义于 R^n 上的高斯分布相比, 可以更好地表示出空间目标轨道状态的不确定性信息, 而利用本文提出的基于 GVM 的递推滤波算法, 可以融合来自不同测量设备的测量数据, 更精确地估计空间中目标的轨道状态, 从而对空间监视跟踪、数据融合、数据关联等 SSA 应用中的核心跟踪算法进行扩展和增强, 有利于提高空间目标的跟踪精度、降低数据关联结果的误差、降低多个空间目标之间的碰撞概率、以及提高异常检测的准确度等。

由于所提出 GVM 滤波器是基于样本的, 因此与粒子滤波方法相似, 可能会产生粒子退化问题, 影响滤波精度甚至导致算法失败, 对于这种情况, 可采用渐进式方法, 每次将新测量信息逐步集成到状态估计中, 这将成为下一步的工作内容。

参 考 文 献

- [1] Horwood J T, Poore A B. Orbital state uncertainty realism [C]. Proceedings of the Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference, Wailea, USA, September 11 - 14, 2012.
- [2] 刘玉磊, 冯新喜, 鹿传国, 等. 带渐消因子的 Quadrature 卡尔曼滤波 [J]. 宇航学报, 2013, 34(10): 1370 - 1377. [Liu Yu-lei, Feng Xin-xi, Lu Chuan-guo, et al. A fading quadrature Kalman filter for nonlinear systems [J]. Journal of Astronautics, 2013, 34(10): 1370 - 1377.]
- [3] Horwood J T, Aragon N D, Poore A B. Gaussian sum filters for space surveillance: theory and simulations [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2011, 34(6): 1839 - 1851.
- [4] Ristic B, Arulampalam S, Gordon N. Beyond the Kalman filter: particle filters for tracking applications [M]. Boston, USA: Artech House, 2004.
- [5] Montenbruck O, Gill E. Satellite orbits: models, methods, and applications [M]. Berlin, Germany: Springer, 2000.
- [6] Mardia K V, Sutton T W. A model for cylindrical variables with applications [J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1978, 40(Series B): 229 - 233.
- [7] Mardia K V, Hughes G, Taylor C C, et al. A multivariate von Mises distribution with applications to bioinformatics [J]. Canadian Journal of Statistics, 2008, 36(1): 99 - 109.
- [8] Kurz G, Gilitschenski I, Hanebeck U D. The partially wrapped

- normal distribution for SE(2) estimation[C]. 2014 International Conference on Multisensor Fusion and Information Integration for Intelligent Systems (MFI), Beijing, China, September 28 – 30, 2014.
- [9] Stienne G, Reboul S, Azmani M, et al. A multi-temporal multi-sensor circular fusion filter[J]. Information Fusion, 2014, 18(7): 86 – 100.
- [10] Glover J, Kaelbling L P. Tracking 3-D rotations with the quaternion bingham filter[R]. Cambridge, USA: MIT CSAIL, March 2013.
- [11] Kurz G, Gilitschenski I, Hanebeck U D. Nonlinear measurement update for estimation of angular systems based on circular distributions [C]. Proc. of the 2014 American Control Conference (ACC 2014), Portland, USA, June 4 – 6, 2014.
- [12] 孔云波, 冯新喜, 鹿传国, 等. 改进高斯混合粒子滤波的纯方位目标跟踪算法[J]. 宇航学报, 2012, 33(7): 971 – 977. [Kong Yun-bo, Feng Xin-xi, Lu Chuan-guo, et al. An improved Gaussian mixture particle filter based targets tracking algorithm for bearing-only tracking system[J]. Journal of Astronautics, 2012, 33(7): 971 – 977.]
- [13] 张惟, 林宝军, 张泽明, 等. 矢量观测确定卫星姿态的预测粒子滤波算法[J]. 宇航学报, 2011, 32(5): 1077 – 1085. [Zhang Wei, Lin Bao-jun, Zhang Ze-ming, et al. Particle filtering fusing predictive filter for attitude determination from vector observations[J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(5): 1077 – 1085.]
- [14] Horwood J T, Poore A B. Gauss von Mises distribution for improved uncertainty realism in space situational awareness[J]. SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification, 2014, 2(1): 276 – 304.
- [15] Hanebeck U D, Lindquist A. Moment-based Dirac mixture approximation of circular densities[C]. Proc. of the 19th IFAC World Congress (IFAC 2014), Cape Town, South Africa, August 24 – 29, 2014.

作者简介:

陈慕羿(1981 –),女,博士生,讲师,主要研究方向为目标跟踪、传感器融合。

通信地址:辽宁省沈阳市浑南新区南屏中路6号(110159)

电话:13840120624

E-mail:camchenm@163.com

作者简介:

田野(1977 –),男,博士,教授,主要研究方向为卫星通信与信号处理技术。本文通信作者。

通信地址:辽宁省沈阳市浑南新区南屏中路6号(110159)

电话:13909820698

E-mail:tianyereal@126.com

(编辑:牛苗苗)