第 三 章

随机变量及其分布

——习题课

第二章作业题

1 ⇒ 随机变量及边缘分布　作业 – 83页 – 2,3,5,7,9

2 ⇒ 相互独立的随机变量　作业 – 83页 – 17,18

3 ⇒ 关于条件分布　作业 – 86页 – 14,15,20

4 ⇒ 两个随机变量函数的分布

作业 – 86页 – 22,24,29,30,34,36

第三章 多维随机变量及其分布

重点与难点

1.重点

二维随机变量的联合分布与边缘分布

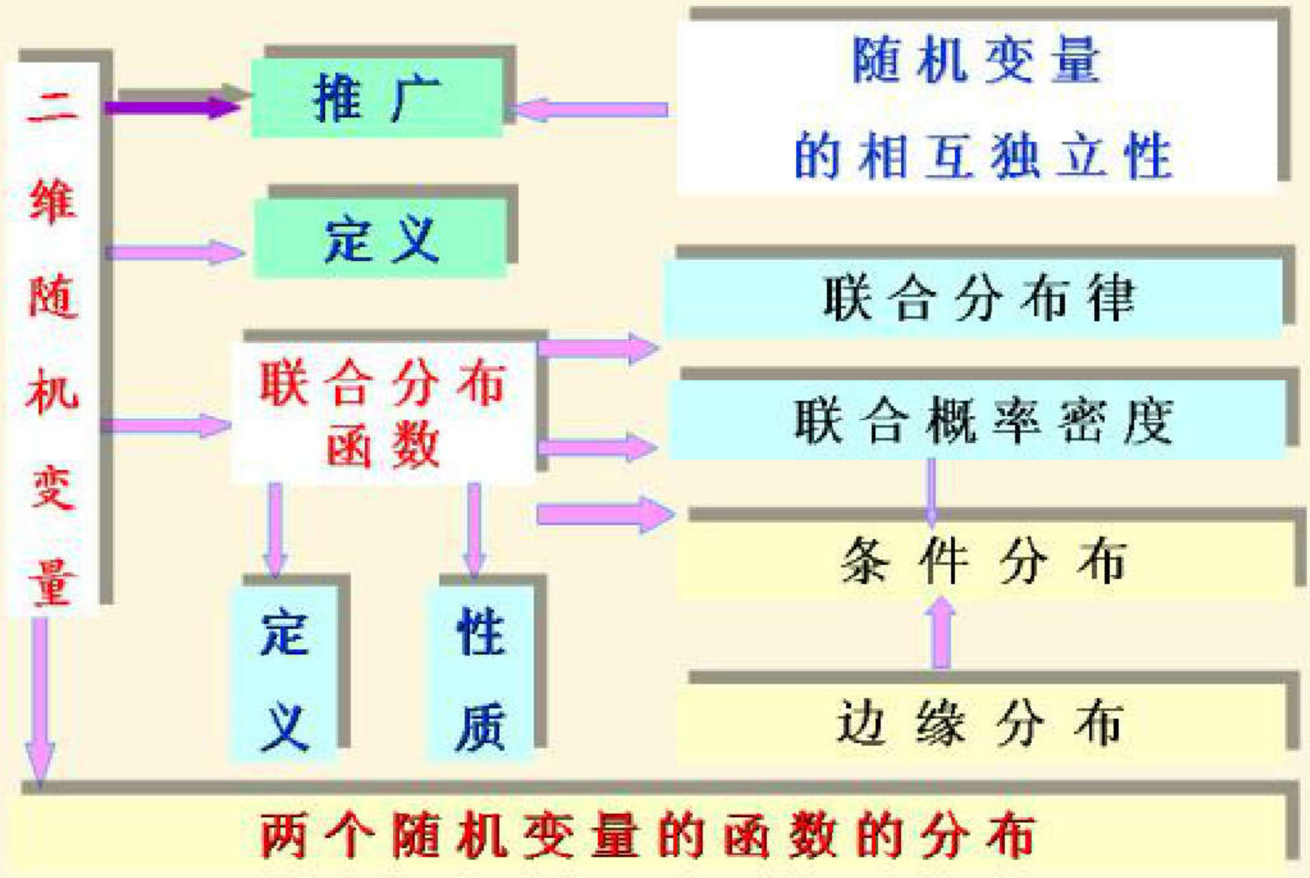
有关概率的计算和随机变量的独立性

2.难点

条件概率分布

随机变量函数的分布

知识点回顾


二维随机变量
推 广
随机变量
的相互独立性
定 义
联合分布函数
联合分布律
联合概率密度
条 件 分 布
定
义
性
质
边 缘 分 布
两个随机变量的函数的分布

一、多维随机变量及其分布

内容	一 维	二 维
一般概念	分布函数	联合分布与边缘分布
$D.R.v.$	分布律	联合分布律
$C.R.v.$	概率密度	联合概率密度
常见分布	$b(n,p)$, $\pi(\lambda)$	均匀，正态
$N(\mu,\sigma^2)$	指数，均匀，	

1、二维联合分布函数与边缘分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y).\qquad F_X(x)=F(x,\infty).$$

分布函数的性质

(1) 单调性　(2) 规范性 $0<F(x,y)<1,$

(3) 右连续性　(4) 对于任意 $x_1<x_2, y_1<y_2,$

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\ge 0.$$

2、离散型联合分布律与边缘分布律

X 的分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
x_1				$p_{1\bullet}$
x_2				$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$p_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	

由联合分布列可直接得到边缘分布律

Y 的分布律

边缘分布列

3、连续性联合概率密度与边缘概率密度

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\underline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}y,$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

X 的边缘概率密度.　　Y 的边缘概率密度.

联合分布 $\underset{\nleftarrow}{\rightarrow}$ 边缘分布

联合密度函数及性质

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$$

(1) $f(x,y)\geq 0$ 非负

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=F(+\infty,+\infty)=1$ 规范

(3) $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$ 分布与密度关系

(4) $P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$ 计算公式

4、相互独立的随机变量

1. 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

2. 设连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$f(x,y)$, 边缘概率密度分别为$f_X(x),f_Y(y)$, 则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$

3. X 和 Y 相互独立，则 $f(X)$ 和 $g(Y)$也相互独立.

4. 设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，

X 和 Y 相互独立，

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

推广 n个相互独立的随机变量。

典型题分析 设二维随机变量的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & 0<x<1,\ -x<y<x\\ 0 & 其它\end{cases}$$

求边缘概率密度

判断独立性

解: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$\therefore\ f_X(x)=\begin{cases}3x^2 & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

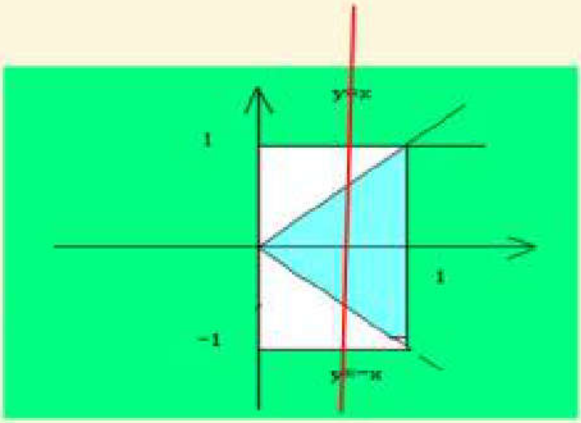
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

当$-1<y<1$时

$$f_Y(y)=\int_{|y|}^{1}\frac{3}{2}xdx=\frac{3}{4}[1-y^2]$$

$$\therefore\ f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-y^2) & -1<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$$



作业讲评

例1 P83，2（1）盒子里装有3只黑球,2只红球,2只白球.在其中任取4只球,以X表示取到黑球的只数,以Y表示取到红球的只数.

(1)求X,Y的联合分布；　　(2)求(X,Y)的边缘分布律；

解：(1)

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0	0	3/35	2/35
1	0	6/35	12/35	2/35
2	1/35	6/35	3/35	0

总共7只球
任取4只球

(2)

X	0	1	2	3
p_k	1/35	12/35	18/35	4/35

Y	0	1	2
p_k	1/7	4/7	2/7

$P\{X=2\}P\{Y=1\}=72/245 \neq 12/35=84/245$

$\therefore$ X与Y不相互独立.

作业讲评

例1 P83，2（1）盒子里装有3只黑球,2只红球,2只白球.在其中任取4只球,以X表示取到黑球的只数,以Y表示取到红球的只数.

(3) $P(X<3-Y)$

解:
$$P(X<3-Y)=P(X+Y<3)$$
$$=P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=1)$$
$$+P(X=2,Y=0)$$
$$=\frac{1}{35}+\frac{6}{35}+\frac{3}{35}=\frac{2}{7}$$

X与Y不相互独立．在联合分布表中计算概率

习题84页-7 设二维随机变量的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le y\le x\le 1 \\ 0\ , & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求常数c.　(2)求边缘概率密度

解:
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^x cy(2-x)dy\right]dx=5c/24=1$$

$$\Rightarrow c=4.8$$

$$(2)\ f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,$$

习题84页-7 设二维随机变量的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x), & 0\le y\le x\le 1\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

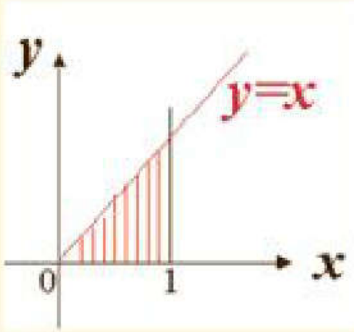
(2)求边缘概率密度

解: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy,$

(2) 当$0\le x\le 1$时， $f_X(x)=\int_0^x \frac{24}{5}y(2-x)dy$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{12}{5}x^2(2-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{24}{5}y(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2}), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

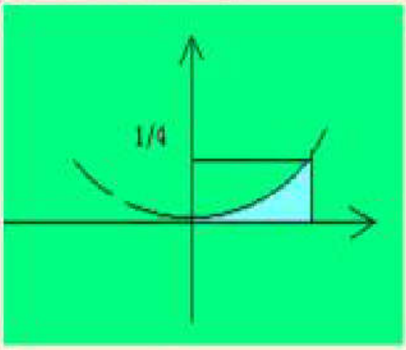


习题85页-18 设X,Y是相互独立的随机变量，X服$(0,1)$上的均匀分布，Y的概率密度为$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

试求方程 $x^2+2Xx+Y=0$有实根的概率.

解: （1） X与Y相互独立

$$f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0<x<1,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$



有实根 $\Leftrightarrow X^2\ge Y$

$$P\{X^2\ge Y\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=1-\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\sqrt{2\pi}(\Phi(1)-\Phi(0))=0.1445$$

二、条件分布

1. 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量 $p_{ij}(i,j=1,2\cdots)$ 为其联合分布律，在给定 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律为

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

在给定 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律为

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

其中 $i,j=1,2,\cdots.$

2、条件分布函数与条件密度函数的关系

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)$$
$$=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}\,x$$
$$=\int_{-\infty}^{x}[f(x,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}\,x.$$

•具体计算条件概率的方法

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}\,y$$
$$=\int_{-\infty}^{y}[f(x,y)/f_X(x)]\,\mathrm{d}\,y.$$

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$$

三、随机变量函数的分布

1、$Z = X + Y$型　　（和的分布）

2、$Z = \frac{X}{Y}$、$Z = XY$ 型（积的分布）

3、$Z = \max(X, Y); Z = \min(X, Y)$型

（最大、最小的分布）

会利用推导法

求函数的分布

连续型分布的情形

(1) 和的分布 $Z = X + Y$型

$$f_Z(z) = F_z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx$$

$$f_Z(z) = F_z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)dy$$

卷积公式-X与Y独立

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy$$

$Z = X + Y$型 $\Rightarrow$ 解题步骤:

（a）讨论 z的范围

（b）画积分区域草图

（c）确定x的积分限

（d）计算变限积分

（e）写出z的密度函数

重点画积分区域

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)dx}$$

(2) 商的分布 $Z=\frac{X}{Y}$的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)dy.$$

当 X 与 Y 独立时

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy.$$

$Z=XY$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx.$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y(\frac{z}{x})dx.$$

(3). $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$,

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z),$$

若X与Y独立同分布$\Rightarrow$ $F_{\max}(z)=[F_X(z)]^2$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

若X与Y独立同分布$\Rightarrow$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)]^2$$

推广 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$

$M = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 及 $N = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数分别为

$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)].$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立同分布函数 $F(x)$

$$F_{\max}(x) = [F(x)]^n,$$

$$F_{\min}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n.$$

四、二维随机变量两个常用的分布

1、二维均匀分布

设D是平面上的有界区域,其面积为S,若二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称(X,Y)在D上服从均匀分布.

2、二维正态分布

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} \quad (-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty)$$

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 为常数，$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1,$ 则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布.

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布.

关于二维正态分布一些结论

结论:

(1) 二维正态分布的两个边际分布都是一维正态分布,

(2) 如果 $\rho_1 \neq \rho_2$, 则两个二维正态分布 显然不同

$$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho_1) \qquad N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho_2)$$

但是他们却有完全相同的边际分布.

（3）两个边际分布都是正态分布的随机变量,

他们的联合分布不一定是二维正态分布

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

关于二维正态分布一些结论

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

(4) 二维正态分布的随机变 量X与Y相互独立的充要条件是 $\rho = 0$

(1) 若$\rho = 0 \Rightarrow X$与Y一定独立

充要条件

(2) 若X与Y独立$\Rightarrow \rho = 0$

$$X与Y独立 \Leftrightarrow \rho = 0$$

典型题分析 设随机变量,(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0\ , & \text{其它} \end{cases}$$

(1)求 X与Y 的边际概率密度，并判断是否 独立

(2)求在$Y=y$的条件下， X的条件概率密度

(3)求概率 $P(X+2Y\le 1)$;

$P(X\ge 2\mid Y<4)$; $P(X\ge 2\mid Y=4)$

分析: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0\ , & x\le 0 \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0 \\ 0\ , & y\le 0 \end{cases}$$

$$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$$

类型题-85页—13，14，15，等

考研题 设随机变量,(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

(1)求 X与Y 的边际概率密度，并判断是否 独立

(2)求在$Y=y$的条件下， X的条件概率密度

(3)求概率$P(X+2Y\le 1)$;

$P(X\ge 2\mid Y<4)$; $P(X\ge 2\mid Y=4)$

分析: 当$y>0$时 $$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-y}}{ye^{-y}}=\frac{1}{y}$$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y} & 0<x<y \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

考研题　设随机变量,(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0\ , & 其它 \end{cases}$$

(1)求 X与Y 的边际概率密度，并判断是否 独立

(2)求在$Y=y$的条件下， X的条件概率密度

(3)求概率$P\,(X+2Y\le 1)$;

$P\,(X\ge 2\mid Y<4)$; $P\,(X\ge 2\mid Y=4)$

分析：求概率$P\,(X+2Y\le 1)$

$$=\iint\limits_{X+2Y\le 1} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{3}}dx\int_x^{\frac{1-x}{2}}e^{-y}dy=1+2e^{-\frac{1}{2}}-3e^{-\frac{1}{3}}$$

考研题 设随机变量,(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0\ , & \text{其它} \end{cases}$$

(1)求 X与Y 的边际概率密度，并判断是否 独立

(2)求在$Y=y$的条件下， X的条件概率密度

(3)求概率$P\ (X+2Y\le 1)$;

$P\ (X\ge 2\,|\,Y<4)$; $P\ (X\ge 2\,|\,Y=4)$

分析: 求概率$P\ (X\ge 2\,|\,Y<4)$

$$=\frac{P(X>2,Y<4)}{P(Y<4)}=\frac{\int_2^4 dy\int_2^y e^{-y}dx}{\int_0^4 ye^{-y}dy}$$

考研题 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

(1)求 X与Y 的边际概率密度，并判断是否 独立

(2)求在$Y=y$ 的条件下， X的条件概率密度

(3)求概率 $P(X+2Y\le 1)$;

$P(X\ge 2\mid Y<4)$; $P(X\ge 2\mid Y=4)$

分析: 求概率 $P(X\ge 2\mid Y=4)$ $P(Y=4)=0$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases} \frac{1}{y} & 0<x<y \\ 0 & 其它 \end{cases} \Rightarrow f_{X|Y}(x\mid 4)=\begin{cases} \frac{1}{4} & 0<x<4 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

$$P(X\ge 2\mid Y=4)=\int_2^4 \frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}$$

作业讲评 设随机变量,(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$的分布

求 $Z=XY$的分布

习题86页21

分析: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ x\le z\le 1+x\end{cases}$$

注:z的范围在0~1~2之间

$0\le z\le 1 \quad f_Z(z)=\int_0^z(x+z-x)dx=z^2$

$1\le z\le 2 \quad f_Z(z)=\int_{z-1}^1(x+z-x)dx=z(2-z)$

其它 $\quad f_Z(z)=0$

同上课例题

习题86页21　设随机变量,(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求　$Z=X+Y$的分布

求　$Z=XY$的分布

分析: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx$.　$\begin{cases}0<x<1\\0<z<x\end{cases}$

注:z的范围在0~1之间　画关于$z-x$图形

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_z^1\frac{1}{x}(x+\frac{z}{x})dx & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}2(1-z) & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

套公式

习题86页28 设X,Y为相互独立的随机变量，它们都服从$N(0,\sigma^2)$分布. 证明 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-z^2/2\sigma^2} & z\geq 0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

分析:

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$$

$$F_Z(z)=\mathrm{P}\{Z\leq z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\leq z\}$$

$z<0$, $F_Z(z)=0$

讨论$z\geq 0$的情况

习题86页28 设X,Y为相互独立的随机变量，它们都服从$N(0,\sigma^2)$分布. 证明 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-z^2/2\sigma^2} & z\ge 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

分析：当$z\ge 0$时 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}$

$$F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}$$

$$=\iint_G f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-r^2/2\sigma^2}rdr$$

$$=1-e^{-z^2/2\sigma^2}$$

$$\therefore\quad f_Z(z)=\frac{z}{\sigma^2}e^{-z^2/2\sigma^2}$$

练习 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律，且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

习题87页36

试求：$Z = \max(X, Y)$ 的分布律.

解 因为X与Y相互独立，

所以 $P\{X=i, Y=j\} = P\{X=i\}P\{Y=j\}$,

于是

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$P\{\max(X,Y)=i\}$$

$$=P\{X=i,Y\le i\}$$

$$+P\{X\le i,Y=i\}$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

(1) $\Rightarrow P\{\max(X,Y)=0\}$

$$=P\{0,0\}=\frac{1}{2^2},$$

(2) $P\{\max(X,Y)=1\}$

$$=P\{1,0\}+P\{0,1\}+P\{1,1\}$$

$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{2^2}.$$

故 $Z=\max(X,Y)$ 的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

综合练习题

设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cxe^{-y}, & 0<x<y<+\infty, \\ 0. & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) X 与 Y 是否独立？为什么?

(3) 求 $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 求 $P\{X<1|Y<2\}, P\{X<1|Y=2\}$;

(5) 求 (X,Y) 的联合分布函数 ;

(6) 求 $Z=X+Y$ 的密度函数 ;

(7) 求 $P\{X+Y<1\}$; (8) 求 $P\{\min(X,Y)<1\}$.

(1) 求常数 c;

(2) X, Y 是否独立?

$$f(x,y)=\begin{cases} cxe^{-y}, & 0<x<y<+\infty \\ 0. & 其他 \end{cases}$$

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$, 得 $\Rightarrow c=1.$

$$1=\int_0^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^{y} cxe^{-y}\,\mathrm{d}x=\frac{c}{2}\int_0^{\infty} y^2 e^{-y}\,\mathrm{d}y=\frac{c}{2}\Gamma(3)=c,$$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^{\infty} xe^{-y}\,\mathrm{d}y, & x>0 \\ 0, & x\le 0.\end{cases}=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}y^2 e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$, 故 X 与 Y 不独立.

(3) 求 $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 求 $P\{X<1|Y<2\}$,

$P\{X<1|Y=2\}$;

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-y}, & 0<x<y<+\infty \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

解

(3) $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} \dfrac{2x}{y^2}, & 0<x<y<\infty, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} e^{x-y}, & 0<x<y<\infty, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(3) 求 $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 求 $P\{X<1|Y<2\}$,

$P\{X<1|Y=2\}$;

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-y}, & 0<x<y<+\infty \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

解 $$P\{X<1|Y<2\}=\frac{P\{X<1,Y<2\}}{P\{Y<2\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{2}f_Y(y)\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2 xe^{-y}\mathrm{d}y}{\int_0^2\frac{1}{2}y^2e^{-y}\mathrm{d}y}=\frac{1-2e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-2}}{1-5e^{-2}}.$$

$$P\{X<1|Y=2\}=\int_{-\infty}^{1}f_{X|Y}(x|2)\mathrm{d}x$$

$$f_{X|Y}(x|2)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$P\{X<1|Y=2\}=\int_0^1\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

(5) 求 (X,Y) 的联合分布函数；

解　由于 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$, 故有:

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时, 有 $F(x,y)=0.$

当 $0\le y<x<\infty$ 时, 有　$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$

$$=\int_0^y \mathrm{d}v\int_0^v u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^y v^2\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v=1-(\frac{y^2}{2}+y+1)\mathrm{e}^{-y}.$$

当 $0\le x<y<\infty$ 时, 有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_0^x \mathrm{d}u\int_u^y u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^x u(\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{d}u=1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-y}.$$

(5) 求 (X,Y) 的联合分布函数 ；

(6) 求 $Z=X+Y$ 的密度函数 ；

解

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ 1-(\frac{y^2}{2}+y+1)\mathrm{e}^{-y}, & 0\le y<x<\infty,\\ 1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-y}, & 0\le x<y<\infty.\end{cases}$$

(6) 根据 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)\,\mathrm{d}\,x,$

由于要被积函数 $f(x,z-x)$ 非零，只有当

$0<x<z-x$, 即 $0<x<\dfrac{z}{2}$ 时，从而有：

(5) 求 (X,Y) 的联合分布函数 ;

(6) 求 $Z=X+Y$ 的密度函数 ;

解 当 $z<0$ 时, $f_Z(z)=0$;

当 $z\ge 0$ 时,

$$f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}} x\mathrm{e}^{-(z-x)}\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{e}^{-z}\int_0^{\frac{z}{2}} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}};$$

因此 $$f_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} & z\ge 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

(7) 求 $P\{X+Y<1\}$；(8) 求 $P\{\min(X,Y)<1\}$.

(7) $P\{X+Y<1\}=\int_{-\infty}^{1} f_Z(z)\,\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1[\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}]\,\mathrm{d}z=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-1}.$$

(8) $P\{\min(X,Y)<1\}=1-P\{\min(X,Y)\geq 1\}$

$$=1-P\{X\geq 1,Y\geq 1\}=1-\int_1^{\infty}\mathrm{d}v\int_0^{v}u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}u$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_1^{\infty}v^2\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v=1-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$