第三章 多维随机变量及其分布

- 二维随机变量及其分布列
- 边缘分布
- 条件分布
- 相互独立的随机变量
- 两个随机变量函数的分布
- 典型例题分析

内容回顾

1. 若离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X和Y相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

2. 设连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$，边缘概率密度分别为$f_X(x),f_Y(y)$，则有

X和Y相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$

3. X 和 Y 相互独立，则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

4. 设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，

X 和 Y 相互独立，

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

5、*推广* n个相互独立的随机变量。

教学内容

§3-5 两个随机变量函数的分布

本节内容

一、二维离散型随机变量函数的分布

二、二维连续型随机变量函数的分布

(1) $Z = X + Y$型　(2) $Z = X/Y$型

(3) $Z = \max\{X,Y\}$及$Z = \min\{X,Y\}$型

三、典型例题与思考

四、课堂小结

一、问题的提出

有一大群人,令 X 和 Y 分别表示一个人的年龄和体重,Z 表示该人的血压,并且已知 Z 与 X,Y 的函数关系 $z = g(x,y)$,如何通过 X,Y 的分布确定 Z 的分布.

为了解决类似的问题下面我们讨论随机变量函数的分布.

二维随机变量
函数的分布

设（X Y）为二维离散型随机变量，$z=(x,y)$ 为一连续函数，**则$Z=g$（X，Y）是一维离散型随机变量**

Z的所有可能取值由X，Y的取值及 g（x,y）而定

Z取某个值的概率为X，Y取某些值的概率之和

例1 设X，Y的分布律为

X	0	1	2
P	1/2	3/8	1/8

Y	0	1
P	1/3	2/3

且X，Y相互独立　求$Z=X+Y$的分布律

$X+Y$	0	1	2	3
P	1/6	11/24	7/24	1/12

补充例题

一、维离散型随机变量函数的分布

设$f(x,y)$是变量x和y的单值函数，则$z=f(x,y)$为(x,y)的函数，若(X,Y)为离散型的随机变量，则$Z=f(X,Y)$也为离散型的随机变量

联合分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$

则随机变量函数$Z=g(X,Y)$的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=P\{g(X,Y)=z_k\}=\sum_{z_k=g(x_i y_j)} p_{ij} \qquad k=1,2,\cdots.$$

结论 Z的所有可能取值由X，Y的取值及$f(x,y)$而定

Z取某个值的概率为X，Y取某些值的概率之和

二、多维连续型随机变量的函数的分布

前面讨论了一个随机变量的函数的分布，下面讨论多个随机变量的函数的分布.我们重点就下面几个具体的函数来讨论.

1、$Z=X+Y$型　　（和的分布）

2、$Z=\frac{X}{Y}$、$Z=XY$型　（积的分布）

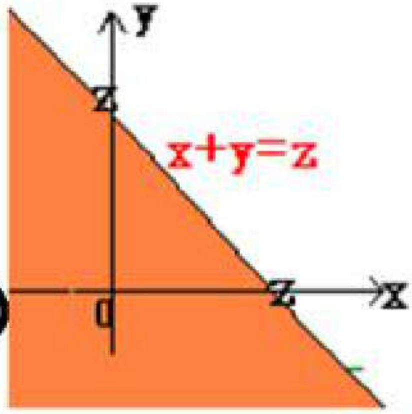
3、$Z=\max(X,Y)$; $Z=\min(X,Y)$型

作业:86页 −−22,24,29,36

连续型分布的情形 (一) 和的分布

例2 设X和Y的联合密度为$f(x,y)$,求$Z=X+Y$的密度函数.

思路: $F'_Z(z)=f_Z(z)$



$Z=X+Y$的分布函数是:

$$F_z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$

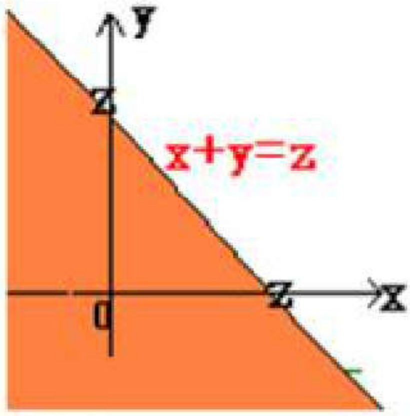
$$=\iint_D f(x,y)dxdy$$

这里积分区域$D=\{(x, y): x+y \leqslant z\}$

是直线$x+y=z$左下方的半平面.

推导方法讲过

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$



化成累次积分，得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy$$

固定z和y，对方括号内的积分作变量代换，

令：$x=u-y$

换元换限

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du\right]dy$$

交换积分次序

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y,y)dy\right]du$$

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y,y)dy\right]du$$

由概率密度与分布函数的关系， 即得$Z=X+Y$的概率密度为:

$$f_Z(z)=F_z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy$$

由X和Y的对称性，$f_Z(z)$又可写成

$$f_Z(z)=F_z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx$$

以上两式即是两个随机变量和的概率密度的一般公式.

和的分布—卷积公式

当X和Y独立，设(X,Y)关于X,Y的边缘密度分别为$f_X(x)$，$f_Y(y)$，则上述两式化为:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

这两个公式称为卷积公式 .

例3: 设X和Y是两个相互独立的随机变量，

它们都服从$N(0,1)$分布，即有

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty \qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<\infty$$

求 $Z=X+Y$的概率密度.

正态分布可加性

解: 由上述公式

$$\boxed{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx$$

做积分变换

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即Z服从$N(0.2)$分布.

$$\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}(\Phi(b) - \Phi(a))$$

说明

一般,设X,Y相互独立且$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. 由(5.4)式经过计算知$Z = X + Y$仍然服从正态分布,且有$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2,\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

结论推广:

n 个独立正态随机变量之和的情况. 即若 $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right), (i=1,2,\cdots,n)$, 且它们相互独立, 则它们的和 $Z=X_1+X_2+\ldots+X_n$ 仍然服从正态分布, 且 $Z \sim N\left(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n, \sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2\right)$。

更一般地, 可以证明有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

例4 在一简单电路中，两电阻X和Y串联联接，设X, Y相互独立，它们的概率密度均为：

$X+Y$型

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50} & 0\le x\le 10\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

试求总电阻$Z=X+Y$概率密度.

解： 易知仅当 $\begin{cases}0<x<10\\ 0<z-x<10\end{cases}$ 亦即 $\begin{cases}0<x<10\\ x<z<x+10\end{cases}$

$$x\le z\le 10+x \quad \Rightarrow 10\le z\le 20$$

被积函数不等于零.

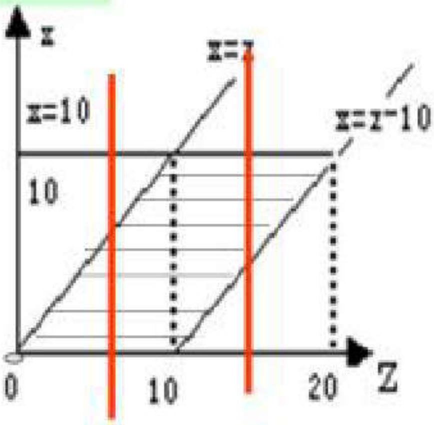
$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

注:z的范围在的范围0~10~20间

（a）讨论 z的范围　（b）画积分区域草图

（c）确定x的积分限　（d）计算变限积分

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}\,x, & 0\le z<10,\\ \int_{z-10}^{10} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}\,x, & 10\le z\le 20,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$



$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{15000}(600z-60z^2+z^3), & 0\le z<10,\\ \dfrac{1}{15000}(20-z)^3, & 10\le z<20,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

重点画积分区域

(二) $Z=\frac{Y}{X}$的分布、$Z=XY$的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量，它具有概率密度 $f(x,y)$. 则$Z=\frac{Y}{X}$,$Z=XY$仍为连续型随机变量其概率密度分别为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)\,\mathrm{d}x,$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

(二) 商的分布 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布

79页

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|y\right|f(yz,y)\,dy.$$

当 X 与 Y 独立时

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|y\right|f_X(yz)f_Y(y)\,dy.$$

$Z=XY$ 的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx.$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx.$$

例5：设X,Y分别表示两只不同型号地灯泡寿命,X,Y相互独立.它们的概率依次为

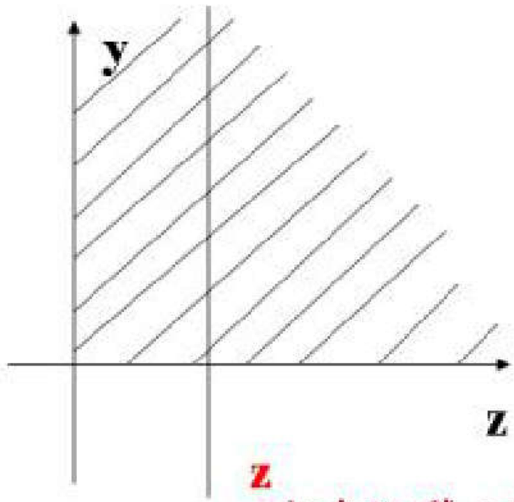
$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0\\ 0,其它,\end{cases}\qquad g(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, y>0\\ 0,其它\end{cases}$$

试求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度函数

分析

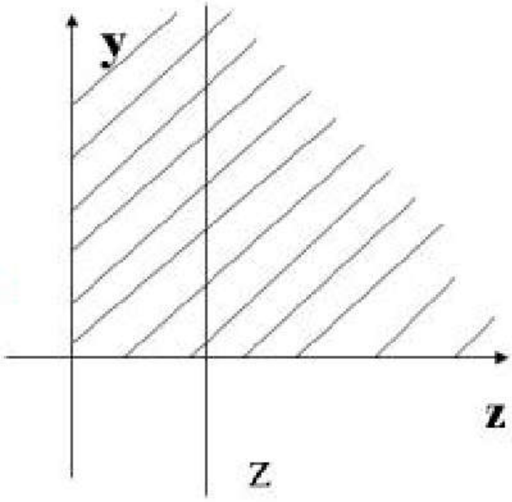
$$f_Z(z)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy.$$



解： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy.$

当 $\begin{cases} yz > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ 时 被积函数不为零。



当 $z>0$ 时 $f_Z(z)$

$$=\int_0^{\infty} ye^{-yz}2e^{-2y}dy$$

$$=\int_0^{\infty}2ye^{-y(2+z)}dy=\frac{2}{(2+z)^2},$$

当 $z\le 0$ 时

$f_Z(z)=0.$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{2}{(2+z)^2}, & z>0\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(三). $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

则有 $F_{\max}(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$

$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z).$$

$$\boxed{F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z),}$$

(三). $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

$$\boxed{F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z),}$$

$$F_{\min}(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}$$

$$=1-[1-P\{X\le z\}]\cdot[1-P\{Y\le z\}]$$

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

故有

$$\boxed{F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].}$$

推广

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 则 $M = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 及 $N = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数分别为

$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)].$$

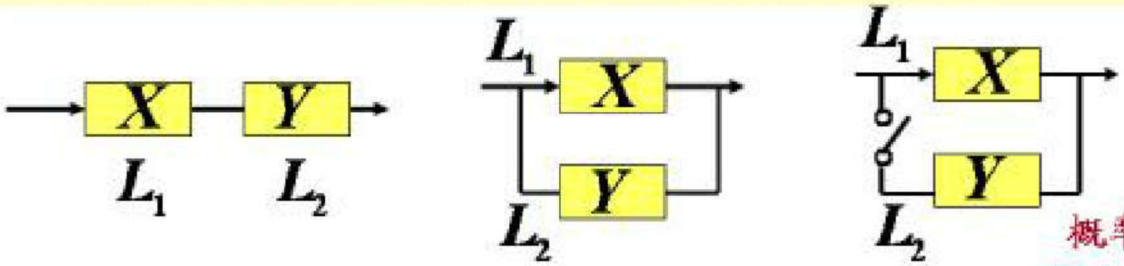
若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且具有相同的分布函数 $F(x)$，则

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n, \quad F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

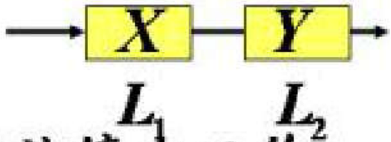
例6　设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成，连接的方式分别为 (i) 串联，(ii) 并联，(iii) 备用（当系统 L_1 损坏时，系统 L_2 开始工作），如图所示．设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y，已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0, \beta>0$ 且 $\alpha\ne\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.



解 (i)串联情况 $Z=\min(X,Y)$.



由于当 L_1, L_2 中有一个损坏时,系统 L 就停止工作,

所以这时 L 的寿命为

由 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases} \Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

由 $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0;\end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

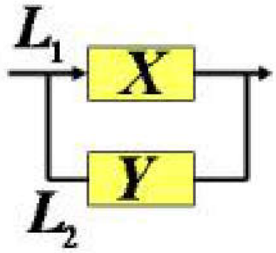
$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(ii)并联情况

由于当且仅当L_1, L_2都损坏时,系统L才停止工作,

所以这时L的寿命为 $Z=\max(X,Y)$.



$Z=\max(X,Y)$的分布函数为

$$F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$f_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(iii)备用的情况 $Z=X+Y$

由于这时当系统 L_1 损坏时,系统 L_2 才开始工作,因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和,即

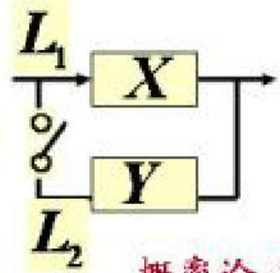
当 $z>0$ 时, $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^z \alpha \mathrm{e}^{-\alpha(z-y)}\beta \mathrm{e}^{-\beta y}dy$$

$$=\alpha\beta \mathrm{e}^{-\alpha z}\int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha)y}dy=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z}-\mathrm{e}^{-\beta z}].$$

当 $z<0$ 时, $f(z)=0$, 于是 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z}-\mathrm{e}^{-\beta z}], & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$



关于随机变量相互独立 的可加性

(1)二项分布 $X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p)$

$$\Rightarrow Z = X + Y \sim B(n+m, p)$$

(2)泊松分布 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$

$$\Rightarrow X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

(3)正态分布 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$

$$\Rightarrow X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2),$$

(5)χ^2分布 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$

$$\Rightarrow X + Y \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

(6)二点分布

$X_1, X_2 \cdots X_n$独立同分布 $\sim B(1,p)$

$$\Rightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim B(n,p)$$

知识点回顾

二、多维连续型随机变量的函数的分布

1、$Z=X+Y$型　（和的分布）

$Z=aX+bY$　型

2、$Z=\dfrac{X}{Y}$、$Z=XY$ 型　（积的分布）

3、$Z=\max(X,Y);Z=\min(X,Y)$型

（最大、最小的分布）

作业:86页－－22,24,29,36

连续型分布的情形

（一）和的分布 $Z = X + Y$型（$Z = aX + bY$）

$$f_Z(z) = F_z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)dx$$

$$f_Z(z) = F_z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y)dy$$

卷积公式–X与Y独立

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x)dx$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y)dy$$

$Z = X + Y$型 $\Rightarrow$ 解题步骤:

(*a*) 讨论 z的范围

(*b*) 画积分区域草图

(*c*) 确定x的积分限

(*d*) 计算变限积分

(*e*) 写出z的密度函数

重点画积分区域

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)dx$$

(二) 商的分布 $Z = \dfrac{X}{Y}$ 的分布

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy .$$

当 X 与 Y 独立时

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y) dy .$$

$Z = XY$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx .$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx .$$

(三). $M = \max(X,Y)$及$N = \min(X,Y)$的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为$F_X(x)$和 $F_Y(y)$,

$$\boxed{F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z),}$$

若X与Y独立同分布$\Rightarrow$ $\boxed{F_{\max}(z) = [F_X(z)]^2}$

$$\boxed{F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].}$$

若X与Y独立同分布$\Rightarrow$

$$\boxed{F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)]^2}$$

推广 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$

$M=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 及 $N=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数分别为

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)].$$

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立同分布函数 $F(x)$

$$F_{\max}(x)=[F(x)]^n,$$

$$F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^n.$$

思考与练习

题1 设随机变量(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1)$X+Y$, (2)$\left|X-Y\right|$的分布律.

求 (1)$X+Y$, (2) $|X-Y|$ 的分布律

解

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

等价于

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$
$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
$\lvert X-Y\rvert$	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3

所以$X+Y,|X-Y|$的分布律分别为

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y\rvert$	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$