教学内容

§3-4 相互独立的随机变量

本节内容

一、相互独立的随机变量

二、二维随机变量的常见分布

五、例题与思考

教学要求与重点、难点

➢ 会判断相互独立的随机变量

➢ 二维常见分布的相关结论

➢重点:
➢会判断相互独立的随机变量

➢难点：二维正态分布的相关结论

内容回顾

二维随机变量的分布函数

$$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$$

二维随机变量分布函数的性质—4条

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{x,y\to-\infty}F(x,y)=0 \qquad F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{x,y\to+\infty}F(x,y)=1 \qquad F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0$$

$$P(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)$$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$$

联合密度函数必具有的性质

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$$

(1) $f(x,y)\geq 0$ 非负

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=F(+\infty,+\infty)=1$ 规范

(3) $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$ 分布与密度关系

(4) $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy$ 计算公式

内容回顾

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy,\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx.$$

X 的边缘概率密度.　　Y 的边缘概率密度.

联合分布 $\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array}$ 边缘分布

一、相互独立的随机变量

1.定义 设$F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布 函数. 若对于所有x,y有 $P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$,

即
$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量X和Y是相互独立的.

A与B独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.

2. 二维离散型随机变量的独立性

若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P_{ij}$$

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}.$

A 与 B 独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B).$

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

3. 二维连续型随机变量的独立性

设连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$，则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

4. X 和 Y 相互独立，

则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

如果二维随机变量独立

已知 $f_X(x)\cdot f_Y(y)$是(X,Y)的边缘密度函数

随机变量X和Y相互独立

则有 $$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_X(u)f_Y(v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{x}f_X(u)du\cdot\int_{-\infty}^{y}f_Y(v)dv$$

$$=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

二、相互独立的推广

若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_n$有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的.

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n),$$

n维随机变量的推广 $\Rightarrow$ 74页

关于二维随机变量独立性的判定

判定定理

二维随机变量X，Y独立的充要条件是密度函数$f(x,y)$(或分布函数$F(x,y)$)可分离变量,即

$$f(x,y)=g(x)h(y)$$

随机变量X，Y的取值没有关系

例题分析

例 设二维随机变量（X,Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(2x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$\Rightarrow A=2$

判定是否独立

设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6 & x^2\le y<x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

判断86页－－21,24,29,

三、二维随机变量的重要分布

设G是平面上的一个有界区 域，其面积为A

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & 其它\end{cases}$$

则$f(x,y)$是一个密度函数

称二维联合分布$f(x,y)$为区域G上的均匀分布

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy$$

73页-例题

$$=\iint_{(x,y)\in D}\frac{1}{A}dxdy=\frac{1}{A}S_D$$

服从二维均匀分布的事件概率计算?

其中S_D是D的面积.

二维均匀分布

二维正态分布 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

若二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty),$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$均为常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$

则称(X,Y)服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布.记为

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

二维正态分布的概率密度能记住吗!

65页-例3题 $\Leftrightarrow$ 73页 $\rightarrow$ 二维正态分布

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty,$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$都是常数，且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,$ $-1<\rho<1$. 我们称(X,Y)为服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,$ σ_2,ρ的二维正态分布. 记为

$$(\mathrm{X},\mathrm{Y})\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$$

2、二维正态分布与边际分布的关系

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<\infty.$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\quad -\infty<y<\infty.$$

结论--1

二维正态分布的两个边际分布都是一维正态分布，

并且都不依赖于参数 ρ.

分别为$N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$

关于二维正态分布一些结论

结论:

(1) 二维正态分布的两个边际分布都是一维正态分布，

(2) 如果$\rho_1 \neq \rho_2$，则两个二维正态分布 显然不同

$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho_1)$ $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho_2)$

但是他们却有完全相同的边际分布.

（3）两个边际分布都是正态分布的随机变量,

他们的联合分布不一定是二维正态分布

$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

关于二维正态分布一些结论

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

(4) 二维正态分布的随机变　量X与Y相互独立的充要条件是 $\rho = 0$

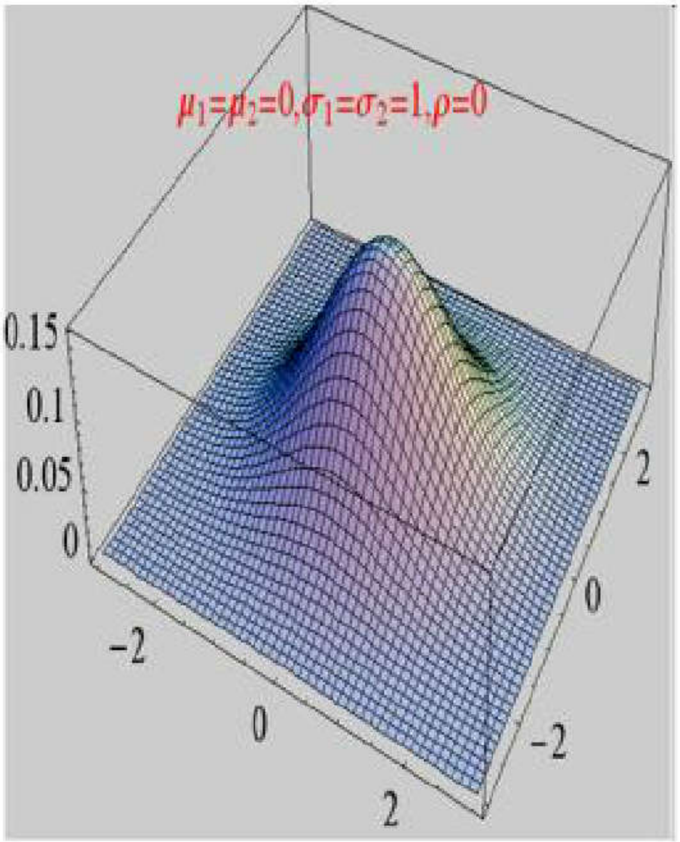
(1) 若$\rho = 0 \Rightarrow X$与Y一定独立

(2) 若X与Y独立$\Rightarrow \rho = 0$

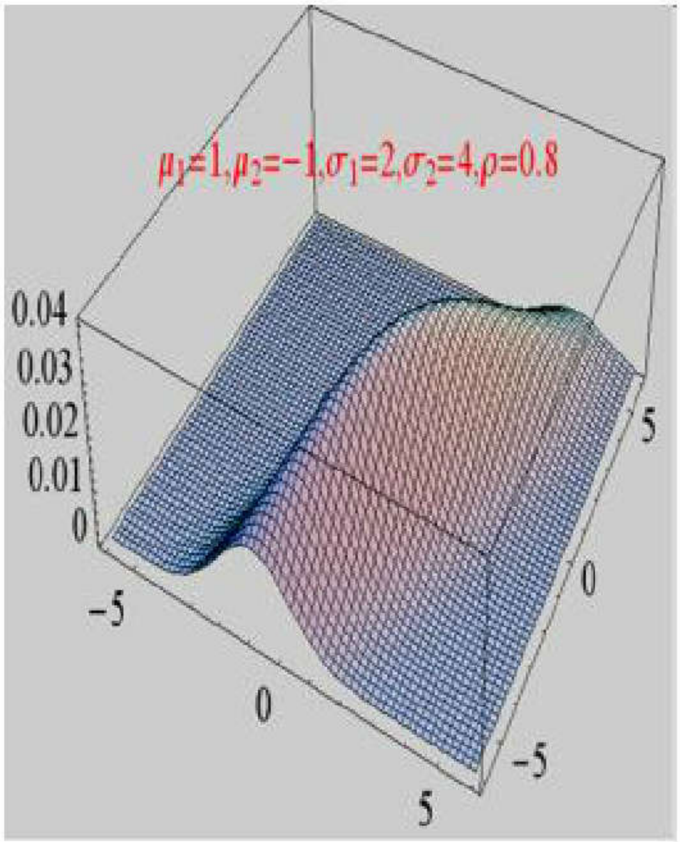
充要条件

$$X\text{与}Y\text{独立} \Leftrightarrow \rho = 0$$

二维正态分布的图形



$\mu_1=\mu_2=0, \sigma_1=\sigma_2=1, \rho=0$
0.15
0.1
0.05
0
−2
0
2
2
0
−2



$\mu_1=1, \mu_2=-1, \sigma_1=2, \sigma_2=4, \rho=0.8$
0.04
0.03
0.02
0.01
0
−5
0
5
5
0
−5

内容小结

1. 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

2. 设连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度分别为 $f_X(x),f_Y(y)$，则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$

3. X 和 Y 相互独立，则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

4. 设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，

X 和 Y 相互独立，

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

5、推广 n个相互独立的随机变量。

二维随机变量的重要分布

二维均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & 其它\end{cases}$$

称二维联合分布 $f(x,y)$为区域 G上的均匀分布

二维正态分布

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

结论: $\boxed{(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)}$

(1) 二维正态分布的两个边际分布都是一维正态分布,

(2) 如果$\rho_1 \neq \rho_2$, 则两个二维正态分布 虽然不同

但是他们却有完全相同的边际分布.

(3) 两个边际分布都是正态分布的随机变量,

他们的联合分布不一定是二维正态分布

(4) X与Y独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$

充要条件

(1) 若$\rho = 0 \Rightarrow X$与Y一定独立

(2) 若X与Y独立 $\Rightarrow \rho = 0$

(ρ叫X与Y的相关系数)

例3 设$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)$，

则 (1) $p(x,y)\geq 0$ $\quad -\infty<x,y<+\infty$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=1$; (3) $p_\xi(x)$与$p_\eta(y)$

分析: (1) $p(x,y)\geq 0$为显然

$$(2)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\sin x\sin ydxdy=1$$

$$=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$$

例3 设 $p(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)$，

则 (1) $p(x,y)\geq 0$ $\quad -\infty<x,y<+\infty$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=1$; (3) $p_\xi(x)$与$p_\eta(y)$

分析:

(3) $p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)dy$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

同理 $\Rightarrow p_\eta(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

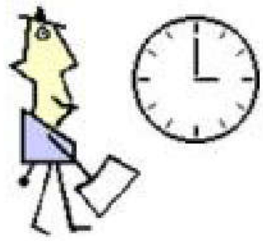
$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$$

结论: 两个边际分布都是正态分布的随机变量,

他们的**联合分布不一定是二维正态分布**

例3 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~12时, 他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7~9时, 设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟 (1/12小时)的概率.

解 设X和Y分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间,



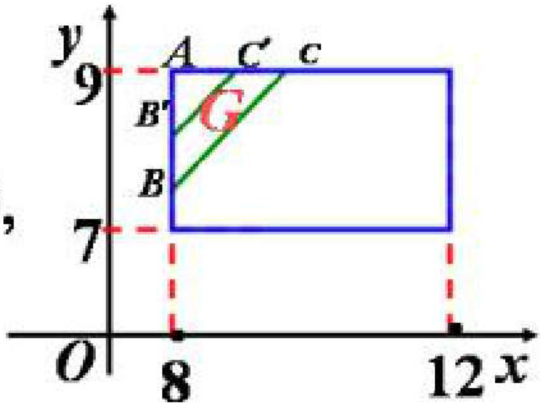
由假设X和Y的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 8<x<12,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 7<x<9,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

因为X,Y相互独立，故(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{8}, & 8<x<12,7<y<9,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



按题意需要求概率$P\{|X-Y|\le 1/12\}$.画出区域:

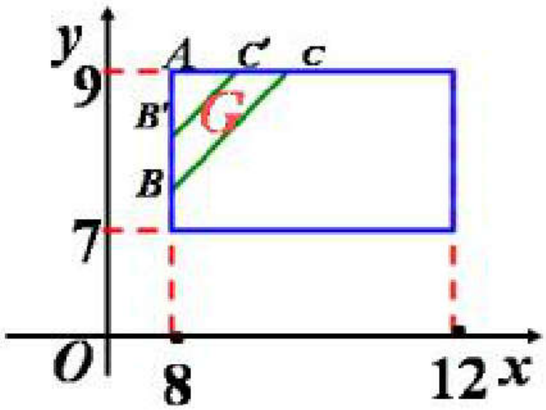
$|x-y| \le 1/12$, 以及长方形 $[8<x<12;7<y<9]$, 它们的公共部分是四边形 $BCC'B'$, 记为 G.

显然仅当 (X,Y) 取值于 G 内，他们两人到达的时间相差才不超过 $1/12$ 小时. 因此, 所求的概率为

$$P\{|X-Y| \le \frac{1}{12}\}$$

$$= \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{8} \times (G\text{ 的面积}).$$



而　G的面积

$=$三角形ABC的面积$-$三角形$AB'C'$的面积

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{1}{6}.$$

于是　$P\{|X-Y| \le \frac{1}{12}\} = \frac{1}{8} \times (G\text{的面积}) = \frac{1}{48}.$

即负责人和他的秘书到达办公室的时间相差不超过5分钟的概率为$\frac{1}{48}$.

补充例题

结论5 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

二维正态分布的两个边际分布都是一维正态分布，

两个边际分布都是正态分布 X与Y未必独立

(1)若$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$\Rightarrow aX+bY$是否服从正态分布？？？

可以证明$aX+bY$服从正态分布！！！

(2)若$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$;$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

$\Rightarrow aX+bY$是否服从正态分布？？？

X与Y不独立时－－不能推出服从正态分布

当X与Y独立时 $\Rightarrow aX+bY$一定服从正态分布！