第 一 章

概率论基础

——习题课

第一章　概率论基础

重点内容小结

1、 基本概念

随机试验，样本空间，随机事件，样本点，概率，条件概率；事件的互不相容，事件的独立性

A与B互不相容 $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$

A与B相互独立 $\Leftrightarrow$ $P(AB) = P(A)P(B)$

基本公式

$$A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

1、 重要性质

(1) $P(\Phi)=0.$ $A_iA_j=\Phi,$

(2) $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$

(3) $P(A)=1-P(\overline{A})$

(4) $A\subset B\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$$

(5) (加法公式) 对于任意两事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

推广　三个事件和的情况　重要结论

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

一个很有用的公式　设$A_1, A_2, \cdots A_n$相互独立

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

$$= 1 - P\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}\right)$$

$$= 1 - P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)\cdots P\left(\overline{A_n}\right)$$

3、古典概率的计算

基本方法

设试验 E 的样本空间由 n 个样本点构成, A 为 E 的任意一个事件,且包含 m 个样本点, 则事件 A 出现的概率记为:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{所包含样本点的个数}}{\text{样本点总数}}.$$

称此为概率的古典定义.

4、概率的三大公式

条件概率 $\boxed{P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}}$ $\longrightarrow$ 乘法公式 $P(AB)=P(B|A)P(A)$

全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},\ i=1,2,\cdots,n$$

5、事件的独立性

1. A, B 两事件独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)\,P(B)$

A, B, C 三个事件相互独立

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

2. 重要结论

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

关于独立性-小结

设事件A,B,C相互独立

(1) $P(AB)=P(A)P(B)$

(2) $P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B})=P(A)$

$\boxed{P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B})\Rightarrow}$

(3) $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1\Rightarrow$

独立的充要条件 $P(AB)=P(A)P(B)$

$\boxed{P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid B)=1(\text{条件概率性质})}$

(4) $P(A\cup B\cup C)=1-P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)$

$$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$$

第一章作业题

1 ⇒ 事件间的关系与运算　作业－－24页－2

2 ⇒ 概率重要性质　作业－－24页－3,4 (4题的结论自己验证)

3 ⇒ 古典概率的计算　作业－－25页－6,10,11

4 ⇒ 概率的三大公式　作业－25页－14,18,21,22,26

5 ⇒ 事件的独立性　作业－27页－28,32,35,37

其他习题: 8,9,13,16,17,19,25,27,30,31

二、典型题分析

一个小孩用 13个字母 *AAACEHI IMMNTT* 做组字游戏，如果字母的各种排法是 随意的，问恰好组成"*MATHEMATIC IAN*"一词的概率有多大？ 例1

分析： MATHEMATICIAN

样本点总数13! ，

有利事件数包含3! 2! 2! 2! 个样本点。

古典概率

$$P(A)=\frac{3!2!2!2!}{13!}=\frac{48}{13!}$$

二、典型题分析

1-10题

一个小孩用 11个字母 *PR0BABILITY* 做组字游戏，从中任意连抽 7张，求恰好组成 *ability* 的概率有多大？

分析：样本点总数 A_{11}^7

有利事件数包含的样本点

（将b与i看成可分辨的，各有两种取法）

$$P(A)=\frac{4}{A_{11}^7}$$

本题还可用乘法公式

$$P(A)=\frac{1}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}$$

作业点评

1-9题

从5双不同的鞋子中任取4只，这4只鞋子中

（1）“至少有两只配成一双” 的概率是多少？

（2） “没有两只配成一双” 的概率是多少？

例2

分析:

解一

将鞋子一只只取出，编成号（排列问题）

样本点总数 $N = A_{10}^4$

没有两双配对的样本点数：10·8·6·4

设A=“4只中至少有两只配对”

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}{A_{10}^4} = \frac{13}{21}$$

古典概率

$$p(\overline{A}) = \frac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}{A_{10}^4} = \frac{8}{21}$$

分组配对问题

从5双不同的鞋子中任取4只，这4只鞋子中

（1）“至少有两只配成一双” 的概率是多少？

（2）“没有两只配成一双” 的概率是多少？

例2

分析: 解二 样本点总数 $N = C_{10}^{4}$

5双中取4双，4双中每双各取一只（组合问题）

设A=“4只中至少有两只配对” $n = C_5^4 2^4$

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{C_5^4 2^4}{C_{10}^4} = \frac{13}{21}$$

古典概率

分组配对问题

从5双不同的鞋子中任取4只，这4只鞋子中

1-8题

（1）“至少有两只配成一双” 的概率是多少？

（2）“没有两只配成一双” 的概率是多少？

例2

分析: 解三 样本点总数 $N = C_{10}^4$

设A=“4只中至少有两只配对” （组合问题）

古典概率

事件A: 4只恰成1双或恰成2双.

$$n = C_5^2 + C_5^1 C_4^2 C_2^1 C_2^1$$

$$\therefore P(A) = \frac{C_5^1 C_4^2 C_2^1 C_2^1 + C_5^2}{C_{10}^4} = \frac{13}{21}$$

分组配对问题

11、将3只球随机的放入4个杯子中，求杯子中球的最大个数分别为1，2，3的概率。

1-11题

解：杯中最多有一个球时 $\dfrac{A_4^3}{4^3} = \dfrac{6}{16}$

杯中最多有三个球时，$\dfrac{C_4^1}{4^3} = \dfrac{1}{16}$

杯中最多有两个球时，$\dfrac{C_3^2 C_4^1 C_3^1}{4^3} = \dfrac{9}{16}$

$$P(A_2) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{3}{8} = \frac{9}{16}$$

16、一家三口，患某传染病的概率有以下规律

$P(\text{孩子病}) = 0.6, P(\text{母亲得病}|\text{孩子得病}) = 0.5,$

$P(\text{父亲病}/\text{孩子及母亲得病}) = 0.4.$

求母亲及孩子得病而父亲未得病的概率

1-16题

解：设A="孩子得病"，B="母亲得病"，

C="父亲得病". 则：

$$P(A) = 0.6, P(B|A) = 0.5, P(C/AB) = 0.4.$$

$$P(AB\overline{C}) = P(A)P(B|A)P(\overline{C}|AB)$$

$$= 0.6 \times 0.5 \times (1 - 0.4) = 0.18.$$

18 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号. 求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率.

1-18题

解：设A_i为"第i次拨号接通"，i=1, 2, 3

所求为事件 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 的概率

$$P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$$

$$= P(\overline{A_3} \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2})P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})P(\overline{A_1}) = \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\therefore \quad P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \frac{3}{10}$$

共计10个数,3次中正确次

$$\therefore \quad P(A) = \frac{3\text{个数选1个}}{10}$$

加法公式——利用对立

还有其它方法吗？

19 设有甲、乙两袋，甲袋中装有n只白球、 m只红球；乙袋中装有N只白球、M只红球。今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中，再从乙袋中任意取一只球。求从乙袋中取到白球的概率。

1-19(1)题

解 设A=“从甲袋中取出白球一只”，

B=“从乙袋中取到白球”.

用全概率斯公式

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$$

$$= P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$= \frac{C_n^1}{C_{n+m}^1} \cdot \frac{C_{N+1}^1}{C_{N+M+1}^1} + \frac{C_m^1}{C_{n+m}^1} \cdot \frac{C_N^1}{C_{N+M+1}^1}$$

$$= \frac{n(N+1) + mN}{(m+n)(N+M+1)}$$

21、已知男人中有5%是色盲患者，女人中有0.25%是色盲患者．今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，求此人是男性的概率．

解：设A="抽出的是男性"，　B="抽出的是色盲"．

$P(A|B)$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(AB\cup\bar{A}B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}}{P(AB)+P(\bar{A}B)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}}{\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}+\frac{1}{2}\times\frac{0.25}{100}}=\frac{20}{21}=0.95$$

利用贝叶斯

22、一学生接连参加同一课 程两次考试，第一次及格率为 p,若第一次及格则第二次 及格的概率也为 p 若第一次不及格则第二 次及格的概率为 $p/2$

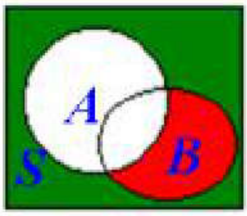
(1)若至少一次及格则他取得某资格，求他取得该资格的概率

(2)若已知他第二次已经及 格，求他第一次及格的 概率

解： 设A=“第一次及格”， B=“第二次及格”. 则:

$$P(A)=p,\ P(B|A)=p,\quad P(B|\overline{A})=p/2.$$

（1） $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$



$$P(B|A)=p,\Rightarrow P(AB)=p^2$$

$$P(B|\overline{A})=p/2.\Rightarrow P(B)=?$$

利用全概率

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=p\times p+\tfrac{p}{2}(1-p)$$

22、一学生接连参加同一课 程两次考试，第一次及格率为p,若第一次及格则第二次 及格的概率也为p若第一次不及格则第二 次及格的概率为$p/2$

(1)若至少一次及格则他取得某资格，求他取得该资格的概率

(2)若已知他第二次已经及 格，求他第一次及格的 概率

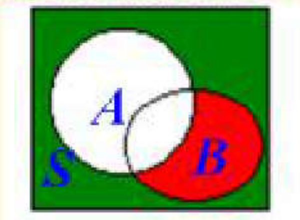
另解: $$P(A)=p,\ P(B|A)=p,\quad P(B|\overline{A})=p/2.$$

（1） $$P(A\cup B)=P(A\cup B\overline{A})=P(A)+P(B\overline{A})$$

$$\because P(B|\overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{1-P(A)}=\frac{p}{2},\therefore P(B\overline{A})=\frac{p}{2}(1-p)$$

$$\therefore P(A\cup B)=p+\frac{p}{2}(1-p)=\frac{3p}{2}-p^2.$$

$$P(A\cup\overline{A}B)=P(A)+P(\overline{A})P(B/\overline{A})$$



22、一学生接连参加同一课 程两次考试，第一次及格率为 p,若第一次及格则第二次 及格的概率也为 p 若第一次不及格则第二 次及格的概率为 $p/2$

(1)若至少一次及格则他取得某资格，求他取得该资格的概率

(2)若已知他第二次已经及 格，求他第一次及格的 概率

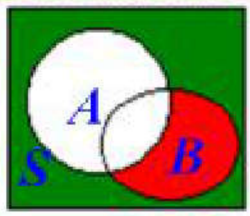
解: $P(A)=p,\ P(B|A)=p,\ \ P(B|\overline{A})=p/2.$

（2）

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})}$$

$$=\frac{p\times p}{p\times p+\frac{p}{2}(1-p)}=\frac{2p}{p+1}.$$

利用 贝叶斯

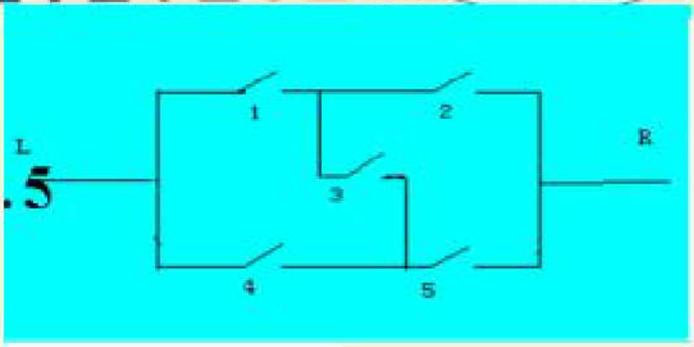


例 如图，1,2,3,4,5表示继电器接点.假设每一继电器接点闭合的概率为p,且设各继电器接点闭合与否相互独立,求L至R是通路的概率.（系统可靠性）

1-34题

解 设A=“L至R是通路”，

B_i=“第i个接点闭合”,i=1,2,…5



方法1－－直接用和事件

$$P(A)=P(B_1B_2\cup B_4B_5\cup B_1B_3B_5\cup B_4B_3B_2)$$

$$=P(B_1B_2)+P(B_4B_5)+P(B_1B_3B_5)+P(B_4B_3B_2)$$

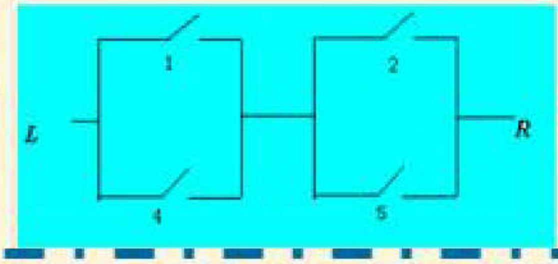
$$-P(B_1B_2B_4B_5)-P(B_1B_2B_3B_5)-P(B_1B_2B_3B_4)$$

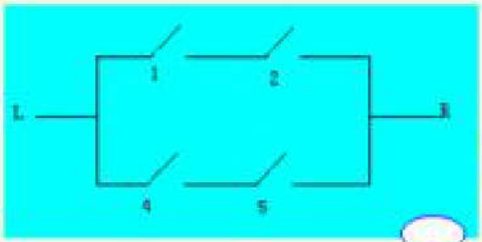
$$\ldots B_3B_4B_5)-P(B_5B_2B_3B_4)-P(B_1B_2B_3B_4B_5)+\cdots$$

$$2p^5-5p^4+2p^3+2p^2$$

常规思路，加法公式,直观,麻烦
共计15个和

所有可能的通路





电路图好眼熟！

方法2——用B_3做样本空间的划分

$$P(A)=P(A|B_3)P(B_3)+P(A|\overline{B_3})P(\overline{B_3})$$

$B_3\cup\overline{B_3}=S$,

且 $B_3\cap\overline{B_3}=\Phi$,

$$P(A|B_3)=P((B_1\cup B_4)(B_2\cup B_5))=[1-P(\overline{B_1}\,\overline{B_4})][1-P(\overline{B_2})P(\overline{B_5})]$$

$$=[1-(1-p)^2]^2=p^2(2-p)^2$$

$$P(A|\overline{B_3})=P((B_1B_2)\cup(B_4B_5))$$

$$=1-P(\overline{B_1B_2})P(\overline{B_4B_5})=1-(1-p^2)^2=2p^2-p^4$$

$$\therefore P(A)=p^3(2-p)^2+(2p^2-p^4)(1-p)$$

$$=2p^5-5p^4+2p^3+2p^2$$

利用全概公式，巧！

作业题 27题-2

已知$P(A|B)=1$证明$P(\overline{B}|\overline{A})=1$

证明: 由$P(A|B)=1\Rightarrow \Rightarrow P(AB)=P(B)$

$$\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{A})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}$$

$$\Rightarrow \frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}=1$$

$$P(\overline{B}|\overline{A})=1$$

放松休息
片刻

25、解：设A="乘地铁回家"，B="乘汽车回家"，C="在5:45-5:49回家"．由于是抛硬币决定，

则所求为：$P(A/C)$ $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$.

$$P(A/C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C\mid A)}{P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times 0.45}{\frac{1}{2}\times 0.45+\frac{1}{2}\times 0.20}=\frac{9}{13}.$$

利用 贝
叶斯

26、 **解：** 设A=“树活着”， B=“浇水”．则：

$$P(B)=0.9, P(\overline{A}/\overline{B})=0.8, P(\overline{A}/B)=0.15.$$

(1)所求为：

$$\begin{aligned}P(A) &= P(BA)+P(B\overline{A}) \\ &= P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B}) \\ &= 0.9\times 0.85+0.1\times 0.2=0.785.\end{aligned}$$

(2)所求为：

$$P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{B})P(\overline{A}/\overline{B})}{1-0.785}=\frac{0.1\times 0.8}{0.215}=0.372.$$

28、解：设A="第一颗花籽发芽"， B="第一颗花籽发芽".
且A,B相互独立，则：

$$P(A)=0.8, P(B)=0.9.$$

(1) $P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times 0.9=0.72.$

(2) $P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$

$$=1-0.2\times 0.1=0.98.$$

(3) $P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$

$$=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)$$

$$=0.8\times 0.1+0.2\times 0.9=0.26.$$

35、解：设A_i="第i只开关闭合"，则 $P(A_i)=0.96$,
并且相互独立.

(1)所求为：$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$

$$=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)$$

$$=0.96+0.96-0.96\times 0.96=0.9984.$$

(2)设需要n只这样的开关并联，则：

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)$$

$$=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

$$=1-(0.04)^n\geqslant 0.9999$$

即$(0.04)^n\leqslant 0.0001$.

$$n\geqslant\frac{\lg 0.0001}{\lg 0.04}=2.86.\quad\therefore n=3.$$

36、三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为1/5，1/3，1/4，问三人中至少有一人能将密码译出的概率是多少？

解：将三人编号为1, 2, 3，记A_i={第i个人破译出密码} i=1, 2, 3

已知$(A_1)=1/5, P(A_2)=1/3, P(A_3)=1/4.$

所求为$P(A_1\cup A_2\cup A_3)$

$$=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_n})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$$

$$=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)$$

$$=1-[1-P(A_1)]\,[1-P(A_2)]\,[1-P(A_3)]$$

$$=1-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{5}=0.6$$

37、解: 设A_i="从第i只盒子里取一只蓝球",$i=1,2$,

B_i="从第i只盒子里取一只白球", 且两盒取球独立.

(1)所求为: $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})$

$$= 1 - \frac{4}{7} \times \frac{7}{9} = \frac{5}{9}.$$

(2)所求为: $P(A_1B_2 \cup A_2B_1) = P(A_1B_2) + P(A_2B_1)$

$$= P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_1)$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{16}{63}.$$

(3)所求为: $P[(A_1B_2 \cup A_2B_1)/(A_1 \cup A_2)]$

$$= \frac{P[(A_1B_2 \cup A_2B_1) \cap (A_1 \cup A_2)]}{P(A_1 \cup A_2)}$$

$$= \frac{P(A_1B_2 \cup A_2B_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{16/63}{5/9} = \frac{16}{35}.$$

思考题 甲,乙,丙三人向靶子各射击一次,**结果有2发子弹击中**靶子.已知甲,乙丙击中靶子的概率分别为4/5,3/4,2/3;求丙脱靶的概率.

解: 设甲, 乙, 丙击中靶子事件分别为A,B,C

D为事件"2发子弹击中"

$$P(\overline{C}\mid D)=?$$

$$P(\overline{C}|D)=\frac{P(\overline{C}D)}{P(D)}=\frac{P(D|\overline{C})P(\overline{C})}{P(D|\overline{C})P(\overline{C})+P(D|C)P(C)}$$

$$P(D|\overline{C})=P(AB)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$$

$$P(D|C)=P(\overline{A}B\cup\overline{B}A)=P(\overline{A}B)+P(\overline{B}A)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{20}$$

$$\therefore\quad P(\overline{C}\mid D)=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{7}{20}\times\frac{2}{3}}=\frac{6}{13}$$

证明

已知$P(A|B)>P(A|\overline{B})$证明

$P(B|A)>P(B|\overline{A})$

证明: 由$P(A|B)>P(A|\overline{B})\Rightarrow$

$$\frac{P(AB)}{P(B)}>\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

$\Rightarrow P(AB)>P(A)P(B)$

$\Rightarrow P(AB)-P(A)P(AB)>P(A)P(B)-P(A)P(AB)$

$\Rightarrow P(AB)P(\overline{A})>P(A)P(A\overline{B})$

$P(B|A)>P(B|\overline{A})$