教学内容

§2 随机事件概率与频率

本节重点

一、概率的直观定义

二、概率的统计定义

三、概率的公理化定义

重要！

四、概率的重要性质

五、例题与思考题

六、课程小结

作业讲评

1. 设A,B,C表示三个随机事件，将下列事件用A,B,C表示.

(1) A, B都出现, C不出现;

(2) 三个事件至少有两个出现;

(3) A, B, C中恰好有两个出现.

(4) 不多于一个事件出现;（至少有两个事件不出现）

---

(1) $AB\overline{C}$;　或 $AB-C$;或 $AB-ABC$;

(2) $AB\cup AC\cup BC$; 或 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$

(3) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$

对立

(4)$\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$　或 $\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

课堂练习 –补充作业

1. 设A,B,C表示三个随机事件，将下列事件用A,B,C表示.

(5) A 出现 , B, C 不出现;

(6) A, B, C 中恰好有一个出现.

(7) 三个事件至少有一个出现; (对立事件)

(5) $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-(B\cup C)$或 $A-B-C$;

(6) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$

(7) $A\cup B\cup C$

对立 $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$

课堂练习

1. 设A,B,C表示三个随机事件，将下列事件用A,B,C表示.

(8) 三个事件都出现; (对立) (9) 三个事件都不出现;

(10) 三个事件不都出现;

(11) 不多于两个事件出现;

至少有一个不出现

(12) A, B 至少有一个出现, C 不出现;

(8) ABC (9) $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(10) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}$

(11) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}$

(12) $(A\cup B)\overline{C}$

知识点回顾

随机试验、样本空间与随机事件的关系

随机试验 → 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

随机事件
- 基本事件
- 复杂事件(复合事件)
- 必然事件
- 不可能事件

事件间的关系

(1) 包含关系 $\Rightarrow$ A发生必导致 B发生

(2) 和事件 $\Rightarrow$ A与B至少有一个发生

(3) 积事件 $\Rightarrow$ A与B同时发生（且）

(4) 差事件 $\Rightarrow$ A发生且 B不发生

(5) 互不相容事件 $\Rightarrow$ A与B不能同时发生

(6) 对立事件 $\Rightarrow$ A发生 B一定不发生

互斥事件

互逆事件

事件间的运算规律

设 A,B,C 为事件, 则有

(1)交换律 $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$.

(2)结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3)分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4)德.摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对偶原理

$$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

引言

一般来讲，一个随机试验的各种事件出现的可能性大小不一. 研究随机事件不仅要知道它可能出现那些事件，更重要的是要研究**各种随机事件出现可能性的大小**，揭示出现这些事件的内在统计规律. 所以，我们**必须有一个刻划事件发生可能性的数量指标。**

教学内容

§3 随机事件概率与频率

本节重点

一、概率的直观定义

二、概率的统计定义

三、概率的公理化定义

重要！

四、概率的重要性质

五、例题与思考题

六、课程小结

一、概率的直观定义

各种随机事件出现可能性的大小，

必须有一个刻划事件 发生可能性的数量指标。

直观定义

随机事件A发生可能性大小的度量，

称为事件A发生的概率

记为$P(A)$

这个数量指标至少应该满足两个要求:

(1) 它应具有一定的客观性,不能随意改变

理论上可以通过在"相同条件下"大量的重复试验予以识别和检验.

(2) 它必须符合一般常情

例如, 事件发生的可能性大的,它的值就大;事件发生的可能性小,它的值就小;必然事件的值最大,不可能事件的值最小等于零.

最简单的试验

考虑"抛硬币"这个试验，将一枚硬币抛掷5次、50次、500次，各做10遍，得到数据如下（部分）：n_H表示正面朝上

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	f	n_H	f	n_H	f
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	247	0.494
5	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	251	0.502
6	2	0.4	18	0.36	[illegible]	[illegible]
7	4	0.8	27	0.54	258	0.516

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较大

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较小

波动最小

随n的增大，频率 f 呈现出稳定性

实验者	n	n_H	f
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

$$f(H) \xrightarrow{n\text{的增大}} \frac{1}{2}.$$

二、概率的统计定义

用频率来度量概率

1.频率的定义

定义 在相同的条件下，进行了n次试验，在这n次试验中事件A发生的次数n_A称为事件A发生的**频数**.

比值n_A/n称为事件A发生的频率，

记作

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

这样计算的概率称为统计概率

2.频率的性质

设A是随机试验E的任一事件，则

1° $0 \le f_n(A) \le 1$； $\Rightarrow$ 非负性

显然 $\frac{n_A}{n} \ge 0$

2° $f_n(S) = 1$； $\Rightarrow$ 规范性

S必然事件 $\Rightarrow n_A = n \Rightarrow \frac{n_A}{n} = 1$

3° 若A, B是互不相容的事件，

则 $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ $\Rightarrow$ 有限可加性

n次试验中

A发生n_A次，

B发生n_B次，

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n};\ f_n(B) = \frac{n_B}{n}$$

$$\Rightarrow f_n(A \cup B) = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = f_n(A) + f_n(B)$$

概率的统计定义

定义：相同条件下进行大量重复试验，当试验次数充分大时，事件A的频率将在某个常数p附近摆动，这个常数p称为事件A的概率，记为$P(A)$，即$P(A)=p$.

概率为频率的稳定值

频率的特性

(1) 随机波动性:

(2) 稳定性:

三、概率的公理化定义

定义 设E是随机试验，S是它的样本空间.

对于E的每一事件 A赋予一个实数，记为$P(A)$，称为事件A的概率. 需满足下列条件:

(1). 非负性: 即$P(A)\geq 0$，对$\forall A\in \mathrm{E}$

(2). 规范性: $P(S)=1$ S为必然事件

(3). 可列可加性:

$A_i\in E, i=1,2,\cdots$, 且 $A_iA_j=\Phi(i\neq j)$.

则，$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

四、概率的重要性质

性质1 $P(\varnothing)=0.$

证明 $S=S\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\varnothing\cdots$

由概率的规范性得 $P(S)=1$

由概率的可列可加性得

$$P(S)=P(S)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+P(\varnothing)\cdots$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing)=0$$

$$\boxed{P(\varnothing)=0.}$$

性质2 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件

则：$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$.

概率的有限可加性

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

公理化定义

证明 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$,

$$\Rightarrow A_i A_j = \varnothing, \ i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots.$$

由概率的可列可加性得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

有限可加性

$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + 0$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

性质3 设A,B是两个事件，若$A \subset B$，

证明: $P(B-A)=P(B)-P(A)$

$P(B) \geq P(A)$

减法公式

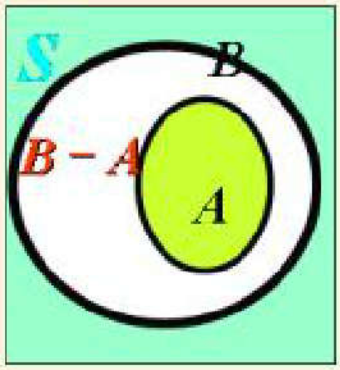
证明 由$A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B-A)$，

且$A(B-A)=\varnothing$，

再由概率的有限可加性，得

$P(B)=P(A)+P(B-A)$

$\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$



性质3 设A,B是两个事件，若$A\subset B$，

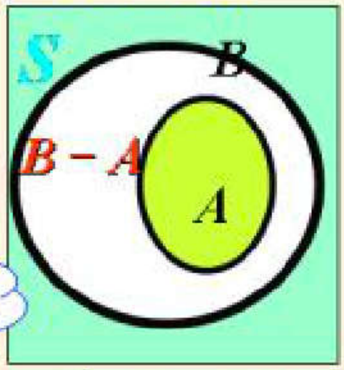
则$P(B-A)=P(B)-P(A)$ $P(B)\geq P(A)$

推广 $P(B-A)\geq 0$知 $\Rightarrow P(B)\geq P(A)$

重要结论：对任意两个事件A、B，有

$$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$$

性质4 对于任一事件A，$P(A)\leq 1$



证 因$A\subset S$，由性质iii得

$P(A)\leq P(S)=1$

规范性

性质5 对任意的事件A有:

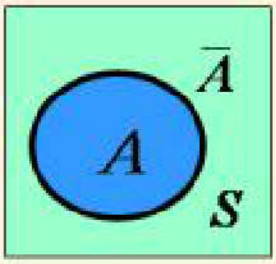
$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

对立事件概率

证明

$$A\cup\overline{A}=S, A\overline{A}=\varnothing$$

$$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$
$$=P(S)=1$$



$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

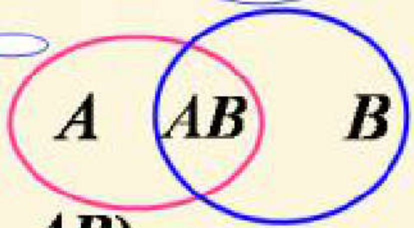
性质6 对于任意两事件A, B有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

加法公式

证明 由图可得

$$A \cup B = A \cup (B - AB),$$



且 $A \cap (B - AB) = \varnothing$,

故 $P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB).$

又由性质 3 得 $P(B - AB) = P(B) - P(AB),$

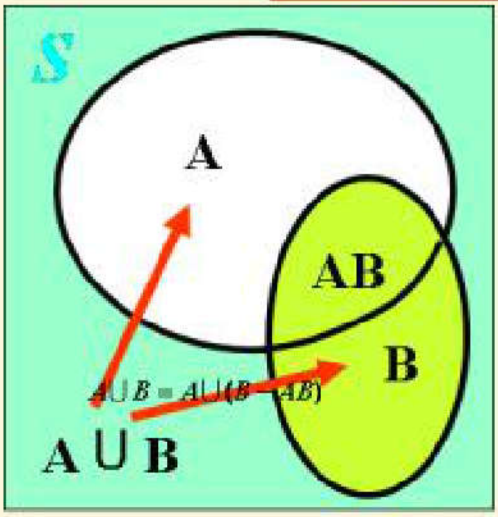
因此得 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

推广 $P(A \cup B) \le P(A) + P(B).$

推广 用面积说明:

①不难看出当A，B互不相容时，

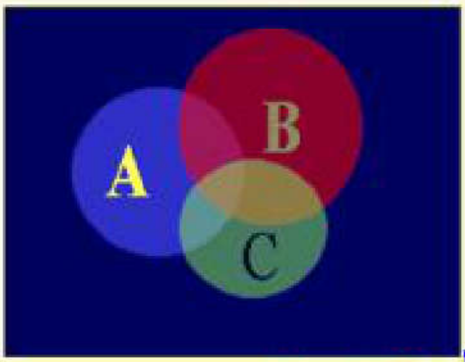
$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$$



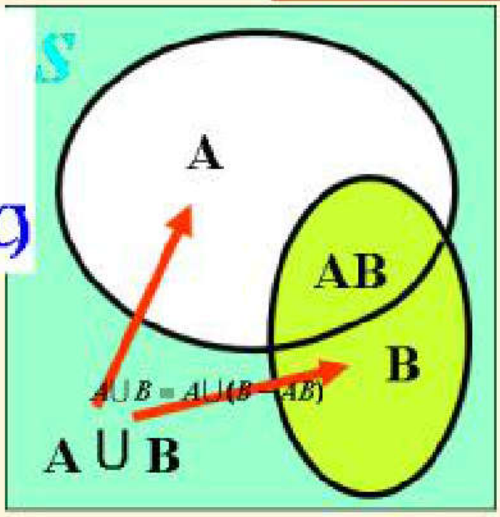
②三个事件和的概率为

$$P(A\cup B\cup C)$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(AB)-P(BC)-P(CA)$$
$$+P(ABC)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

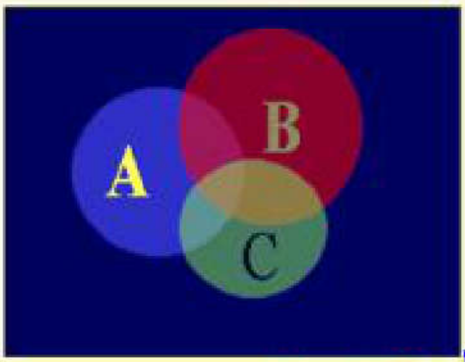


$$P(A\cup B\cup C)$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)$$



一个很有用的公式

$$P(A\cup B\cup C)$$
$$=1-P(\overline{A\cup B\cup C})$$
$$=1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$$



典型例题分析

例1 已知$P(A)=0.3, P(B)=0.6, P(AB)=0.2$

求 $P(\overline{A}\cup\overline{B}); P(A\cup\overline{B})$

解: $P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{AB})$

加法公式

$= 1-P(AB)=0.8$

$P(A\cup\overline{B}) = P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$

$= P(A)+[1-P(B)]-[P(A)-P(AB)]$

$= 1-P(B)+P(AB)=0.6$

例2

设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$,求在下列情况下 $P(B\overline{A})$

(1) A与B互斥；(2) $A\subset B$；(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 (1) 由 $P(B\overline{A})=P(B)-P(BA)$ 故 $P(B\overline{A})=P(B)=\frac{1}{2}$

(2) 由 $P(B\overline{A})=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

(3) $P(B\overline{A})=P[B(S-A)]=P(B-BA)$

$$=P(B)-P(AB)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

课堂小结

1. 频率(波动) $\xrightarrow{n\to\infty}$ 概率(稳定).

2、概率的定义和性质

预习第三、四节 古典概型、条件概率

作业-25页3（1，3），4

课堂小结

概率的重要性质

(1) $P(\Phi)=0.$

$A_iA_j=\Phi,$

(2) $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$

(3) $P(A)=1-P(\overline{A})$

(4) $A\subset B\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$$

(5) (加法公式) 对于任意两事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

思考题 请同学们思考:

医生在检查完病人的时候摇摇头:“你的病很重，在十个得这种病的人中只有一个能救活.”当病人被这个消息吓得够呛时，医生继续说:“但你是幸运的. 因为你找到了我，我已经看过九个病人了，他们都死于此病.”

医生的说法对吗?

医生的说法对吗?

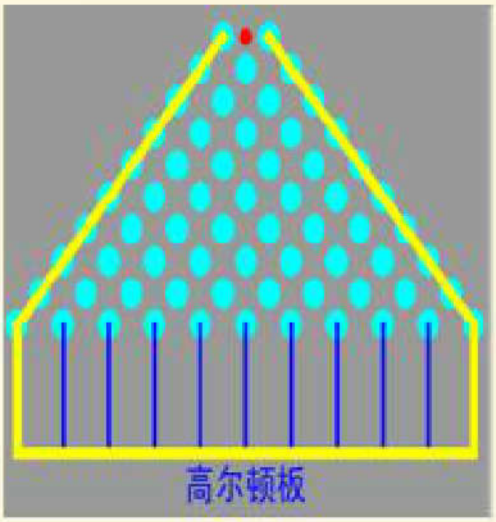
让试验重复大量次数，计算频率$f_n(A)$，以它来表征事件A发生可能性大小是合适的.

然而在实际中，不可能对每一事件都做大量的试验，而且为了理论研究需要，医生的说法显然不正确。

我们来看一个验证频率稳定性的著名实验

高尔顿(Galton)板试验.

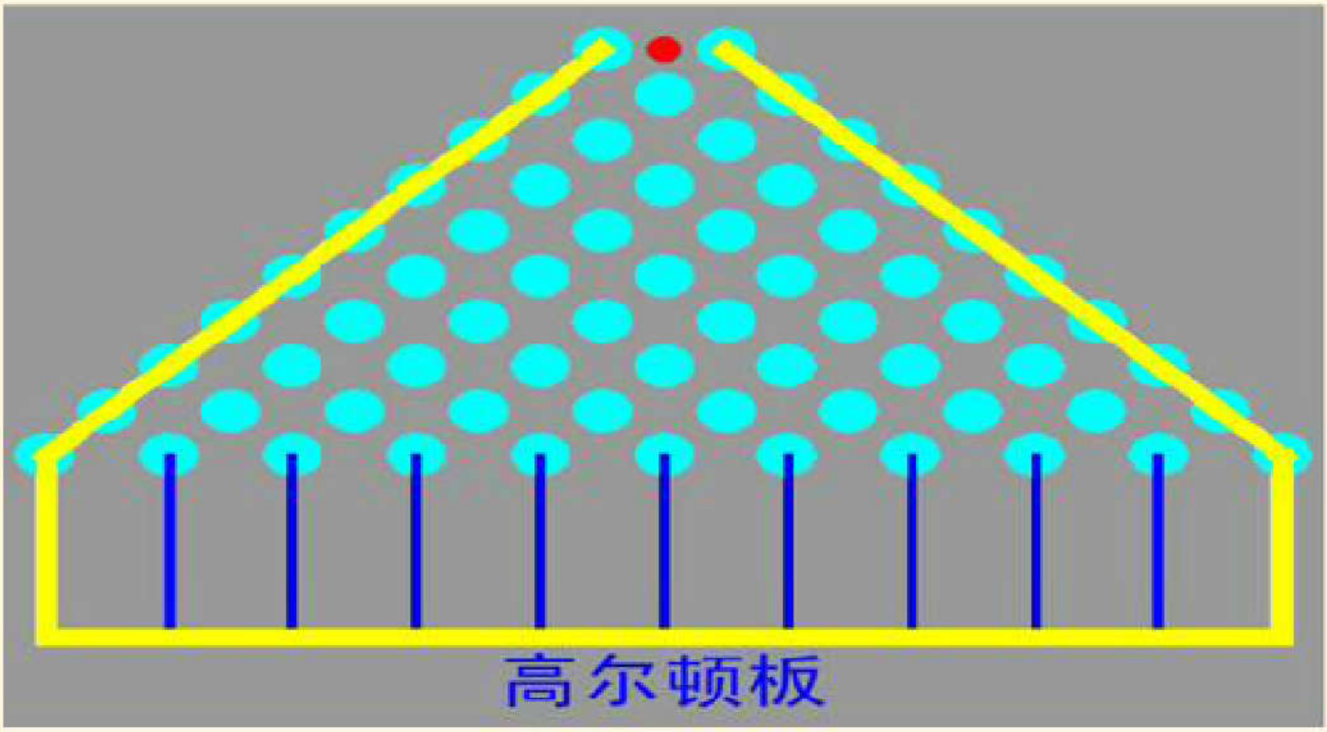
试验模型如下所示:



自上端放入一小球,任其自由下落,在下落过程中当小球碰到钉子时,从左边落下与从右边落下的机会相等.碰到下一排钉子时又是如此.最后落入底板中的某一格子.因此,任意放入一球,则此球落入哪一个格子,预先难以确定.但是如果放入大量小球,则其最后所呈现的曲线,几乎总是一样的.

请看动画演示

单击图形播放/1-3高尔顿板.wmv暂停 ESC键退出




作业-25页3，4