

任意多面体的快速非结构网格生成算法*

刘枫, 李桦, 田正雨, 潘沙

(国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:对于包含复杂气动外形的 CFD 数值模拟, 网格生成是其中的关键, 快速稳定的网格生成技术是其中的重要组成部分。建立了基于可视面的适用于任意多面体的快速初始化算法; 改进了 Delaunay 生成算法后使用 Delaunay 改进生成算法细化网格, 讨论了网格质量判定依据对网格生成的影响, 通过开发 Delaunay 面交换技术优化网格生成过程; 建立了基于顶点弹簧理论的网格优化方法, 以提高网格生成的质量。结果表明, 本文建立的算法效率较高。

关键词:任意多面体; 非结构网格; 阵面推进; Delaunay; 网格细化

中图分类号: O35; O43 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-2486(2013)06-0020-05

Fast unstructured mesh generation based on arbitrary polyhedron

LIU Feng, LI Hua, TIAN Zhengyu, PAN Sha

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Mesh generation is the key to the numerical simulation in CFD with complex aerodynamic shapes. The algorithm of mesh generation is required to be fast and robust. First, this framework established efficient initial tetrahedron arithmetic based on viewed-able face which is fit to the arbitrary polyhedron. Then, Delaunay generation method was improved to refine meshes and the effect of different mesh quality criterion was discussed and the divergence with Delaunay face swapping was developed to optimize the mesh generation process. Finally, a vertex spring model for mesh optimization was established. The results indicate that the method established in the research is efficient and stable.

Key words: arbitrary polyhedron; unstructured mesh; advancing-front; Delaunay; grid refine

复杂外形的 CFD 数值模拟是计算流体力学的前沿和难点问题。运用数值方法求解气动外形复杂流场, 如临近空间飞行器, 成为目前计算流体力学研究的热点之一。对外形特殊、结构网格生成困难的飞行器进行模拟, 高效、高质量的网格生成是关键。

网格生成是计算流体力学(CFD)中的关键环节, 其中非结构网格由于适合含复杂外形流场的数值模拟, 而得到了广泛的应用。尽管组合对接和搭接网格以及重叠网格技术在求解复杂三维外形绕流方面取得了较大的成功, 但它们也存在诸多不足之处^[1]。阵面推进法(Advancing Front Method)和 Delaunay 方法是目前非结构网格生成的两种主要方法。阵面推进法的特点是搜索量大, 每次搜索只能完成一个网格的生成, 网格生成效率较低, 生成网格不一定能满足外接球准则, 即 Delaunay 准则; 而 Delaunay 方法因其生成网格的效率较高, 而且网格质量高, 天然满足 Delaunay 准则, 得到了广泛的应用。然而, 传统的非结构网

格生成算法往往伴随着较高的计算复杂度, 且对于复杂外形的网格生成耗时长、网格质量不高, 因而有必要发展快速网格生成算法。本文基于计算几何的基本原理, 建立了基于可视面的快速四面体初始化算法, 然后建立了阵面推进 - Delaunay 网格细化算法, 并结合网格优化算法, 发展了一套任意多面体的快速非结构网格生成算法。该算法一方面克服了阵面推进法网格生成效率低的缺点, 另一方面克服了 Delaunay 方法在边界恢复中不保形的缺陷。

1 基于可视面的任意多面体初始化算法

1.1 基本概念

定义 1 边界面和边界环。边界面是指包围任意多面体区域相邻点的有序连接, 记为 $\overline{p_a p_b p_c}$ 。边界环是边界面的集合。一般地, 外边界面 f_o 以逆时针为正, 内边界面 f_i 以顺时针为正。

定义 2^[2] 可视。已知面 $p_m p_n p_l$ 的两端点与

* 收稿日期: 2013-04-11

基金项目: 国家自然科学基金项目(91016010, 91216117)

作者简介: 刘枫(1984—), 男, 重庆万州人, 博士研究生, E-mail: liufengmaple.33@gmail.com;

李桦(通信作者), 男, 教授, 博士, 博士生导师, E-mail: lihua_kd@tom.com

线段外的一点 p_k 构成的三条线段 $p_m p_k, p_n p_k, p_l p_k$ 与边界面不相交,称点与面可视。

定义 3 点与面的夹角。已知面 $p_m p_n p_l$ 与面外的一点 p_k, p_k 与 p_m, p_n, p_l 的连线所围成的夹角 α_k 称为点与面的夹角,即三面角 α_k ,且 $\alpha_k = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\alpha$,其中 θ_1, θ_2 分别为 $\angle AOB, \angle COB, \alpha$ 为面 AOB 和面 BOC 之间的二面角(见图 1)。

定义 4 合理四面体。合理四面体是指空间中任意不共面四点连接形成的四面体,且四面体处于网格生成区域内,与网格生成区域边界无交叉。

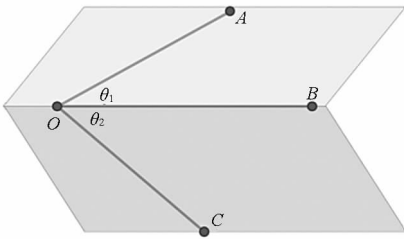


图 1 三面角示意图
Fig. 1 Trihedral corner

1.2 初始四面体算法

定理 1 设外边界面为 $S_o = \cup f_o$,所围成的区域为 V_o ,内边界面 $S_i = \cup f_i$,所围成的区域为 V_i ,则网格生成区域为 $V = V_o \cap V_i$ 。设边界面 $p_m p_n p_l$,任取一点 $p_k (k \neq m, n, l)$,与边界面 $p_m p_n p_l$ 组成一个四面体。若 p_k 在网格生成区域内,且点 m, n, l 对点 k 可视,则 $p_m p_n p_l p_k$ 是一个合理四面体。

证明 (1) 若 p_k 不在 V 内部,四面体 $p_m p_n p_l p_k$ 显然不能成为网格剖分的一部分;

(2) 若点 m, n, l 中的任意一点对点 k 不可视,不妨设点 m 对点 k 不可视,则线段 mk 必与某边界边分列,四面体 $p_m p_n p_l p_k$ 不是合理四面体。证毕。

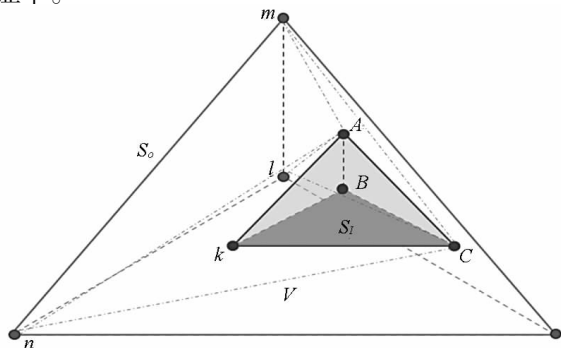


图 2 合理四面体示意图
Fig. 2 Reasonable tetrahedron

从合理四面体的定义中,可以推论:与当前面不可视的点与当前面组成的四面体显然不属于合理四面体。本文提出基于可视面的任意多面体剖分初始算法是:首先根据合理四面体的定义,判断当前多面体中的任意一点 p 与当前面是否构成合理四面体。如果构成,则取出合理四面体,添加到合理四面体初始队列中,并更新边界面,否则继续在多面体的点中搜索,直到找到一个合理四面体为止。如此循环,直到边界面队列中的所有边界面都找到一个合理四面体。为了使得初始算法得到的初始四面体序列具有更好的质量,在每一个边界面搜索合理四面体时对当前边界面建立合理四面体候选队列,然后选择候选队列中三面角最小的那个四面体添加进合理四面体初始队列中。如图 2 所示,点 A, B 对边界面 mnl 可视,点 A 与面 mnl 组成的合理四面体 $Amnl$ 的三面角小于点 B 与面 mnl 组成的合理四面体 $Bmnl$ 的三面角,因此选择四面体 $Amnl$ 添加进初始合理四面体序列。图 3 和图 4 分别给出了单连通域和多连通域的初始化结果。

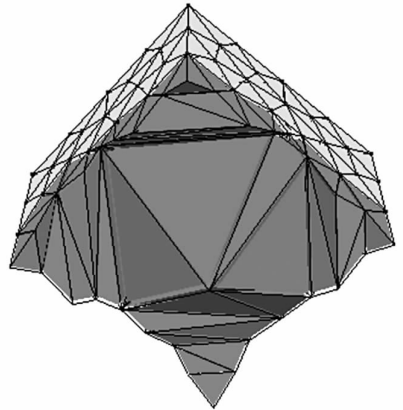


图 3 单连通域的初始四面体剖分
Fig. 3 The initial triangulation of simple connected region

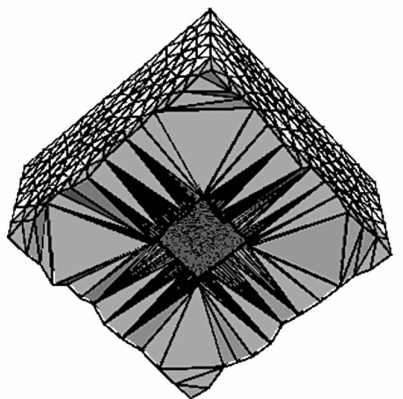


图 4 多连通域的初始四面体剖分
Fig. 4 The initial triangulation of multiply connected region

2 四面体细化准则

在以上初始化四面体算法基础上,给定网格密度,生成内部节点,构建新的四面体单元,在满足网格密度要求的同时,使得网格单元的形状质量尽可能高。文献[3-5]对网格细化技术进行了详尽的阐述,各类网格细化技术对网格整体或者局部加密,使网格更适用于 CFD 计算的要求。

目前主流的网格细化技术主要有: Delaunay 准则插点、阵面推进点插入等等。为了克服单一细化技术的弱点,提高网格生成质量,本文将最差面剖分技术同 Delaunay 面交换算法相结合,建立了基于最差面剖分的 Delaunay 面交换网格生成算法。

2.1 最差面剖分

面剖分是一类广泛使用的网格细化方法。对于初始网格中一个尺寸过大的单元,通过将四面体中形状质量最差的面进行剖分,连接该面中最长边的中点和对顶点,将原四面体剖分为两个新的四面体。往复上述过程,直到网格密度满足要求。

本文通过研究对面剖分技术,发现该方法在一定条件下存在算法不收敛的情形(见图 5)。不适其一般性,为了方便说明,以二维情况证明定理 2,三维情况与二维类似,不再赘述。

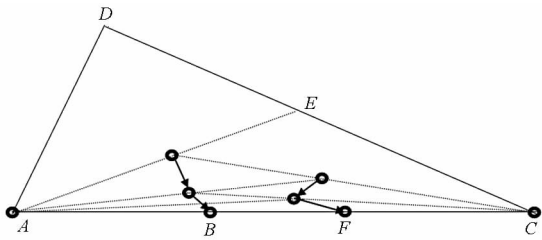


图 5 最差面剖分算法发散分析图

Fig. 5 The analysis of algorithmic divergence

定理 2 当相邻边的最大距离与最小距离之比大于 2 时,最长边剖分算法在局部发散。

证明 不妨设边 AD 和边 AC 是初始三角形 $\triangle ACD$ 的一对相邻边。边 CD 是 $\triangle ACD$ 的最长边,点 B 是线段 AC 的中点。图 5 说明了算法局部发散的过程。

证明过程分为两步:

(1) 不失其一般性,设点 A, C, D 的坐标分别为 $(0,0), (x_c,0)$ 和 (x_d, y_d) 。根据最差面剖分算法,点 E 的坐标容易得到 $(\frac{x_d + x_c}{2}, \frac{y_d}{2})$ 。逐次剖分三角形 $\triangle ACE$,剖分 n 次后得到点 E' 的坐标为:

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_c}{2^{2k-1}} + \frac{x_d}{2^{2n-1}}, \frac{y_d}{2^{2n-1}}\right) (n \text{ 为奇数}), \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_c}{2^{2k}} + \frac{x_d}{2^{2n}}, \frac{y_d}{2^{2n}}\right) (n \text{ 为偶数})$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时,点 E' 的坐标分别收敛到: $(\frac{1}{3}x_c, 0)$ 和 $(\frac{2}{3}x_c, 0)$;

(2) 第一步的证明中,假设了线段 AC 不被剖分。在图 5、图 6 所示的条件下,线段 AC 不会被剖分。当 $|AD|/|AC| < 2$ 时,根据最长边剖分原则,图 5 的剖分方式是唯一的。

综合(1)、(2),最差面剖分算法在图 6、图 7 的条件下发散。证毕。

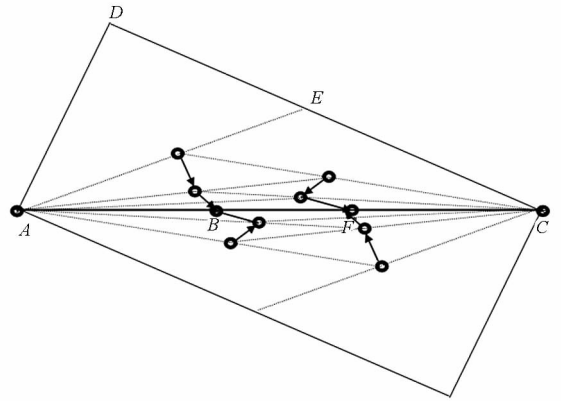


图 6 翻转条件下的算法发散示意图

Fig. 6 Algorithmic divergence under rolling condition

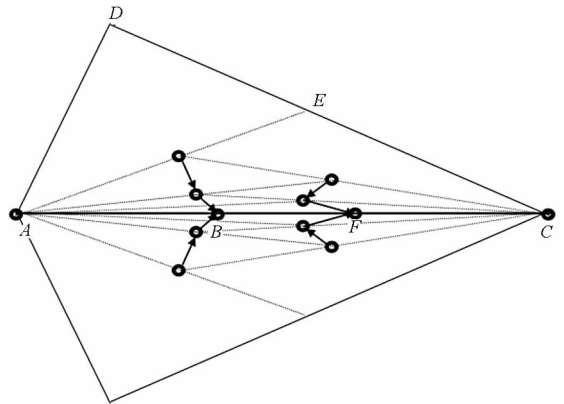


图 7 镜像条件下的算法发散示意图

Fig. 7 Algorithmic divergence under mirror condition

2.2 网格质量判定

对于四面体而言,网格质量判定的方式很多。一般来说,认为四面体越接近正四面体,网格质量越高。本文采用了外接球半径与四面体中的最短边之比来衡量四面体网格的质量^[3],即

$$Q = \frac{R}{L} \tag{1}$$

上式中, Q 为网格质量因子, R 为四面体的外接球半径, L 为四面体中的最短边长度。显然,对于理

想的正四面体而言,有

$$Q = \frac{2}{3} \approx 0.667 \quad (2)$$

图 8 给出了三种质量较好的四面体网格。

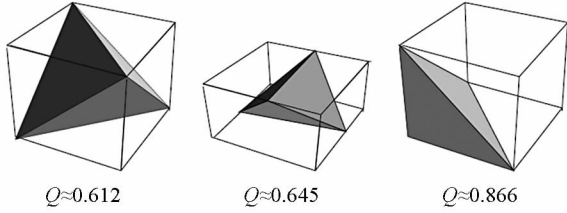


图 8 网格质量较高的四面体网格
Fig. 8 Well-shaped tetrahedron

然而,如图 9 所示,在特殊情况下,通过式(1)计算得到的网格质量系数不能有效反映四面体网格质量。此时,最长边和最短边之比极大 (> 100),因此,式(1)无法正确反映网格质量的好坏。本文采用的网格质量判定公式为

$$Q = \frac{R}{L^{mid}} \quad (3)$$

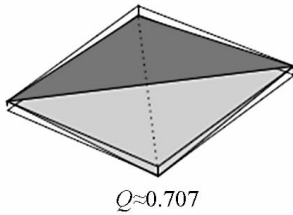


图 9 网格质量差的四面体
Fig. 9 Bad-shaped tetrahedron

上式中 L^{mid} 表示四面体网格中最长边和最短边的平均值。按照式(3)计算,这种特殊四面体的网格质量因子为 $Q = 0.007$,不会被误判为网格质量高的四面体网格。

2.3 Delaunay 面交换技术

Delaunay 面交换算法^[4-5]是一种简单快速的几何交换,通过更改局部的节点连接方式提高网格质量。如图 10 所示,如果两个相邻四面体违反 CP 准则(外接球准则),则把当前对角线 AB 与另一条对角线 CD 交换。

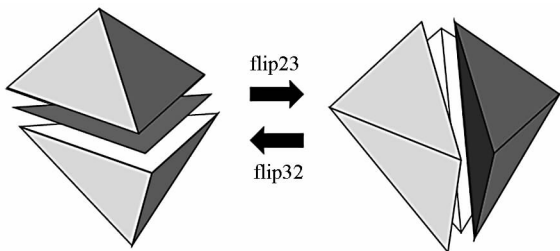


图 10 Delaunay 面交换技术
Fig. 10 Delaunay face swapping

3 基于顶点弹簧模型的网格优化技术

为了提高网格质量,本文将基于顶点弹簧的网格优化技术^[6-7]引入网格生成算法中。其基本描述如下:对于顶点弹簧,节点 i, j 间的弹簧张力为

$$f_i = K_{ij}(x_j - x_i) \quad (4)$$

其中 K_{ij} 为连接节点 i, j 的弹簧的倔强系数, x_i, x_j 分别是节点 i, j 的位置矢量。节点 i 所受的合力可以表示为

$$f_i = \sum_{j=1}^{N_i} f_{ij} \quad (5)$$

推广后的顶点弹簧方法认为网格点的受力始终等于初始状态所受的合力,则当边界上的点移动后,其它网格点的新位置坐标可以通过迭代求解如下的线性系统得到

$$\begin{bmatrix} \sum_j K_{ij} & & & & b_{mn} \\ & \sum_j K_{2j} & & & \\ & & \dots & & \\ b_{mn} & & & \sum_j K_{node_numj} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{node_num} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{node_num} \end{bmatrix} \quad (6)$$

上式中

$$b_{mn} = \begin{cases} -K_{mn} & \text{if } (m \text{ connect to } n) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (7)$$

线性系统(6)系数矩阵是对角占优的,可以用 Jacobi 迭代求解。

$$x_i^{n+1} = \sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}^n \quad (8)$$

4 算法流程和算例验证

本文首先在已知表面网格的基础上,通过建立的初始化四面体算法,将网格剖分区域进行初始化,形成初始四面体阵列,然后通过运用改进的最差面细化算法将网格细化,其间运用 Delaunay 面交换算法优化网格质量,最后再求解基于顶点弹簧的线性系统进一步提高网格质量,并通过进行单连通域和多连通域的多个算例来验证算法的正确性,同时将该算法的计算时间同阵面推进法和 Delaunay 算法相比较(如表 1),并在表 2 中对比了分别用三种算法生成网格的网格质量,网格

质量按照式(3)计算。当网格质量 $Q > 0.2$ 时,网格质量较好;当网格质量 $Q < 0.2$ 时,网格有较大长宽比,网格质量较差。

图 11 ~ 图 12 分别给出了多个几何条件下的剖分算例。算例表明,该算法鲁棒性好,能够快速地对任意多面体进行四面体剖分,且网格质量较高。

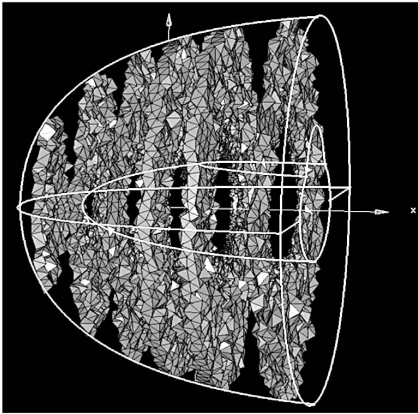


图 11 双椭球外形网格剖分

Fig. 11 The tetrahedron of double ellipsoid

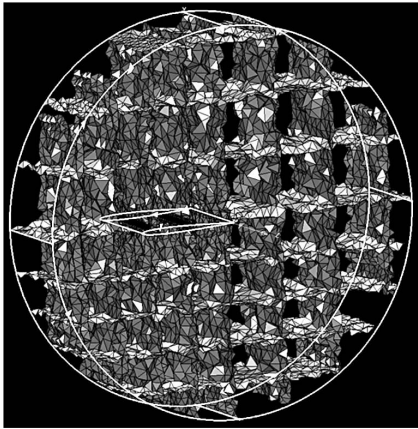


图 12 NACA0006 翼型绕流计算网格剖分

Fig. 12 The tetrahedron of NACA0006

表 1 网格剖分时间对比(单位:s/个)

Tab. 1 Time comparison of grid generation(s/1)

| | 阵面推进 | Delaunay | 本文算法 |
|---------------|------------|------------|-----------|
| 双椭球/网格单元 | 21.6/86045 | 16.5/91003 | 9.2/95314 |
| NACA0006/网格单元 | 8.2/31235 | 5.4/37218 | 3.6/39227 |

表 2 三种算法网格剖分的差质量网格占总网格量的百分比(单位:%)

Tab. 2 Percent of low quality grid in all for three grid generation algorithms(%)

| | 阵面推进 | Delaunay | 本文算法 |
|---------------|------|----------|-------|
| 双椭球/网格单元 | 19.4 | 2.2 | 0.3 |
| NACA0006/网格单元 | 11.6 | 1.5 | 0.047 |

5 结论

(1)最差面剖分算法在一定条件下发散,不能完全适用于任意多面体的四面体剖分。

(2)Delaunay 面交换技术与最差面剖分算法相结合,可以有效地提高算法的效率。

(3)本文提出的基于可视面的任意多面体初始化算法与网格细化算法能够适用于任意多面体的四面体剖分问题中,且快速高效。

参考文献(References)

[1] 张涵信,沈孟育. 计算流体力学-差分方法的原理与应用[M]. 北京:国防工业出版社,2003.
ZHANG Hanxin, SHEN Mengyu. Computational fluid dynamics -fundamentals and applications of finite difference methods[M]. Beijing:National Defence Industry Press, 2003. (in Chinese)

[2] 周培德. 计算几何[M]. 北京:清华大学出版社,2004.
ZHOU Peide. Computation geometry[M]. Beijing: Tsinghua University Press,2004. (in Chinese)

[3] Lawson C L. Software for C1 surface interpolation [C]// Mathematical Software, J. Rice (ed.), Academic Press, New York,1977:161-194.

[4] Rivara M C. New longest-edge algorithms for triangular mesh generation [J]. Computational Geometry: Theory and Application,2002,22:86-95.

[5] Bowyer A. Computing dirichlet tessellations[J]. The Computer Journal,1981,24(2):151-166.

[6] Thompson J F, Weathrill N P. An aspects of numerical grid generation;current science and art[J]. AIAA 93-3539,1993

[7] 陈欣,熊岳山. 复杂平面区域的三角网格生成算法[J]. 国防科技大学学报,2008,30(4):94-97.
CHEN Xin, XIONG Yueshan. Triangular mesh generation over arbitrary two-dimension domain [J]. Journal of National University of Defence Technology, 2008,30(4):94-97. (in Chinese)