

# 基于 TVD 思想的高阶迎风紧致格式\*

王文龙, 李桦, 刘枫, 田正雨

(国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 紧致格式具有模板紧凑、精度高的特点, 然而直接应用该格式捕捉激波会产生虚假振荡。解决该问题有多种思路, 本文着重研究基于 TVD 思想的紧致方法。推导了两种 5 阶迎风紧致格式, 并采用 Fourier 分析比较其耗散与色散特性。采用保单调保精度方法和限制器两种不同的 TVD 方法, 进行算例验证。计算结果表明, 应用 TVD 方法后, 格式对激波、接触间断分辨率好且鲁棒性增强, 但不同的 TVD 方法仍存在精度降低、耗散不足等问题。

**关键词:** 紧致格式; 激波捕捉; TVD 方法

中图分类号: TP316 文献标志码: A 文章编号: 1001-2486(2013)06-0009-06

## High order upwind compact schemes based on TVD algorithm

WANG Wenlong, LI Hua, LIU Feng, TIAN Zhengyu

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Using the same stencils, the compact schemes can get higher accuracy and resolution compared with the traditional ones. But it will bring about spurious oscillations if the compact schemes are used directly. There are several methods to settle this problem. The TVD algorithm was selected in our study. Firstly, two five-order upwind compact schemes were introduced and Fourier analysis was used to compare their dissipation and dispersion characteristics. Secondly, two different TVD methods were applied to Euler equations. The performance of the numerical algorithm was assessed by performing preliminary simulations on some problems, such as the oblique shock reflection problem. The algorithm applied here is proven to have good resolution properties and robust of capturing shock waves and contacts, but it still has the problems of accuracy degree and lack of dissipation.

**Key words:** compact scheme; shock capture; TVD algorithm

实际流体运动的复杂性和刻画流场细节的需求推动了高(阶)精度格式的不断发展<sup>[1]</sup>。通常只考虑空间尺度的影响, 把 3 阶及以上的格式称为空间高阶精度格式或简称为高精度格式。目前, 高精度数值格式的研究主要包括: 高阶有限差分格式、ENO/WENO 格式、间断迎辽金(DG)方法和谱体积(SV)方法等<sup>[2]</sup>。本文主要介绍有限差分方法中的高阶紧致格式。

紧致格式因其可以在较少的模板点下得到较高的精度, 即所谓的紧致特点, 且边界处理较谱方法简单, 同时具有谱方法的分辨率, 而得到广为关注。20 世纪 90 年代, Lele<sup>[3]</sup>系统地发展了中心型紧致格式, 他将 Fourier 分析引入紧致格式, 分析了其耗散和色散特性, 推导了直至 10 阶的紧致格式。但中心型紧致格式本身无耗散, 对非线性问题直接应用会产生虚假波动。随后, 围绕着如何解决在取得高精度的同时又

能够光滑捕捉激波这一基本矛盾, 国内外学者做了大量研究工作。

一种思路是迎风型格式。迎风紧致格式本身内含耗散机制不含人为参数, 相较中心型紧致格式而言鲁棒性更好, 但对一些弱间断和强间断问题仍显不足。Rai 和 Moin<sup>[4]</sup>应用高阶迎风紧致格式进行直接数值模拟, 克服了中心型紧致格式的一些问题, 得到了有意义的结果。Zhong<sup>[5]</sup>通过在中心型紧致格式中添加人工粘性项, 推导了一种导数型的 5 阶迎风型紧致格式, 并与激波装配方法相结合对高超声速边界层转捩问题进行了研究。A. K. De, V. Eswaran<sup>[6]</sup>详细比较了 4 种迎风紧致格式的特性, 提出了一种高分辨且稳定的 5 对角迎风紧致格式。傅德薰等从 1989 年开始相继发展了 3 阶和 5 阶迎风紧致格式<sup>[7-8]</sup>。李新亮<sup>[9-10]</sup>运用高精度迎风差分方法及 8 阶精度群速度控制型差分格式对可压衰减湍流的流场及被

\* 收稿日期: 2013-04-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(91016010, 91216117)

作者简介: 王文龙(1984—), 男, 山东安丘人, 博士研究生, E-mail: wwlndt@163.com;

李桦(通信作者), 男, 教授, 博士, 博士生导师, E-mail: lihuakd@tom.com

动标量场进行了直接数值模拟。

另一种思路是混合方法。该方法通过引入一个混合格式开关,在激波附近使用无振荡的激波捕捉格式,在光滑区使用紧致格式。Adams 和 Shariff<sup>[11]</sup>提出了一种高分辨率的混合 Compact-ENO 格式并应用于激波湍流干扰问题。其后, Priozoli<sup>[12]</sup>提出了一种守恒型的迎风紧致格式并与 WENO 方法相结合,任玉新等<sup>[13]</sup>改进了格式开关函数,使 5 阶守恒型紧致格式和 WENO 两个亚格式的转换更加平滑。

还有一种思路是非线性格式。Cockburn 和 Shu<sup>[14]</sup>早在 1994 年就发展了一种非线性稳定的紧致格式来捕捉激波,他们通过 TVD 思想引入一个非线性的限制器来抑制振荡,然而数值实验表明,他们所发展的 4 阶格式仍然存在数值振荡。邓小刚和张涵信<sup>[15-16]</sup>发展了一类非线性紧致格式,该紧致格式采用中心型紧致格式和 ENO/WENO 重构方法相结合,该类格式具有捕捉间断的良好特性,对边界层有高分辨率且有好的收敛性,目前该高精度格式已经应用到复杂外形中。涂国华等<sup>[17-19]</sup>采用通量限制的方法来提高紧致格式光滑捕捉间断的能力,利用通量限制的方法构造出 TVD 型的紧致格式。何志伟、李新亮<sup>[20]</sup>等利用傅德薰、马延文提出的导数型 5 阶迎风紧致格式变换得到守恒型紧致格式,使用保单调和保精度技术,得到了一种 TVD 型迎风紧致格式,最后求解 Euler 方程得到了很好的结果。

### 1 数值方法

#### 1.1 标量守恒律

考虑如下双曲守恒系统

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F(Q)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

将式(1)在一系列均匀网格点上离散

$$F_j = F(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$N$  为网格点数,  $x_{j+1/2} - x_{j-1/2} = h$  为网格间距。半离散的守恒形式为

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{1}{h}(H_{j+1/2} - H_{j-1/2}) \tag{2}$$

这里  $H_{j+1/2}$  可以认为是两个相邻单元界面处的数值通量,若

$$\frac{1}{h}(H_{j+1/2} - H_{j-1/2}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j + O(h^k)$$

即要确定数值通量  $H_{j+1/2}$ ,使得在半节点  $i + 1/2$  和  $i - 1/2$  的通量差分产生一个  $K$  阶近似导数。

#### 1.2 推导 5 阶迎风型紧致格式

守恒型紧致格式的通式可以写为

$$\sum_{l=-L_1}^{L_2} \alpha_l \tilde{v}_{i+1/2+l} = \sum_{m=-M_1}^{M_2} a_m v_{i+m} \tag{3}$$

通过泰勒展开,令两边对应系数相等,可以得到所要阶数的相应系数。

$$(n + 1) \sum_{l=-L_1}^{L_2} \alpha_l l^n - \sum_{m=-M_1}^{M_2} a_m [m^{n+1} - (m - 1)^{n+1}] = 0 \tag{4}$$
$$n = 0, \dots, k - 1$$

上式中  $k$  为阶数,  $\alpha_l$ 、 $a_m$  为系数,  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $M_1$ 、 $M_2$  分别为左、右侧模板起止点。

当  $L_1 = 1, L_2 = 0, M_1 = M_2 = 2$  时,经推导可以得到傅德薰等提出的 5 阶迎风紧致格式的守恒形式<sup>[20]</sup>,记为 M\_UCD5:

$$\frac{2}{5}H_{j-\frac{1}{2}}^+ + \frac{3}{5}H_{j+\frac{1}{2}}^+ = \frac{3F_{j-1}^+ + 47F_j^+ + 11F_{j+1}^+ - F_{j+2}^+}{60} \tag{5a}$$

$$\frac{2}{5}H_{j+\frac{3}{2}}^- + \frac{3}{5}H_{j+\frac{1}{2}}^- = \frac{3F_{j+2}^- + 47F_{j+1}^- + 11F_j^- - F_{j-1}^-}{60} \tag{5b}$$

当  $L_1 = L_2 = 1, M_1 = M_2 = 1$  时,可以得到 Pirozzoli<sup>[12]</sup> 提出的 5 阶迎风紧致格式,记为 P\_UCD5:

$$9\hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^+ + 18\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^+ + 3\hat{f}_{j+\frac{3}{2}}^+ = 10f_{j+1}^+ + 19f_j^+ + f_{j-1}^+ \tag{6a}$$

$$3\hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^- + 18\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^- + 9\hat{f}_{j+\frac{3}{2}}^- = f_{j+2}^- + 19f_{j+1}^- + 10f_j^- \tag{6b}$$

#### 1.3 傅里叶分析

为了比较上述两种格式的耗散和色散特性,本节进行傅里叶分析。

习惯上考虑线性对流方程

$$v_t + av_x = 0, \quad a > 0 \tag{7}$$

对上式进行守恒型离散近似

$$\frac{dv_j}{dt} + a \frac{1}{h}(\tilde{v}_{j+1/2} - \tilde{v}_{j-1/2}) = 0 \tag{8}$$

给定式(8)的特解为

$$v(x, t) = e^{ik(x-at)} \tag{9}$$

在均匀网格上,有

$$v_j(t) = e^{i\hat{k}(j-ah)t} \tag{10}$$

其中  $\hat{k} = kh$ , 将式(9)和式(10)代入式(8)中得到

$$v_j(t) = e^{i\hat{k}(j-\frac{a\pm(\hat{k})}{h}t)} \tag{11}$$

其中

$$Z(\hat{k}) = 2\sin(\hat{k}/2) \frac{\sum_{m=-M_1}^{M_2} a_m e^{i\hat{k}m}}{L_2 \sum_{i=-L_1} \alpha_i e^{i\hat{k}(i+1/2)}} \quad (12)$$

$Z(\hat{k})$  为转化函数,完全描述了数值格式的行为特性。在一定波数 $\hat{k}$ 条件下,当  $\text{Im}(Z) < 0$  时,解的振幅是衰减的,即为耗散格式,是离散格式的稳定性所要求的。 $\text{Re}(Z)/\hat{k}$ 反映了数值近似的相位误差。

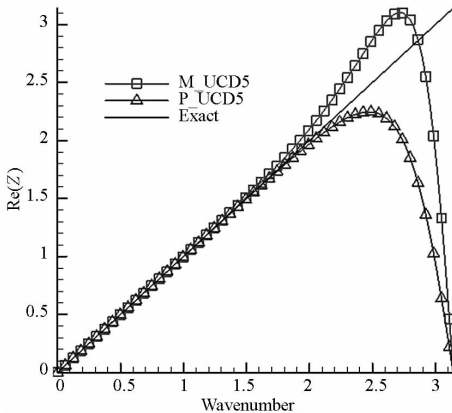
表 1 对应于实部、虚部的最大波数值  
Tab. 1 The maximal values of wavenumber

Reference/Schemes	M_UCD5	P_UCD5
$ \text{Im}(Z)  \leq 5\%$	1.56	1.67
$ \text{Im}(Z)  \leq 2\%$	1.35	1.45
$ 1 - \text{Re}(Z)/\hat{k}  \leq 5\%$	2.01	2.32
$ 1 - \text{Re}(Z)/\hat{k}  \leq 2\%$	1.71	2.08

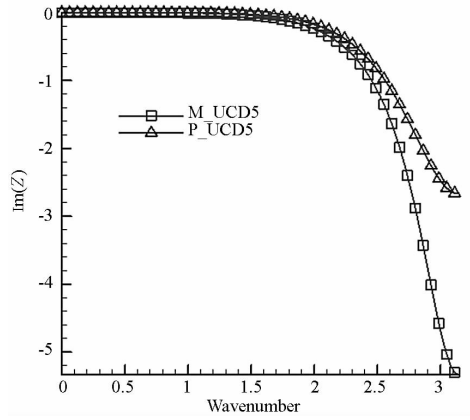
表 1 中给出了对应两种格式的实部、虚部误差不超过 5%、2% 的最大波数值,可以看到在相同误差范围内,M\_UCD5 格式能正确模拟的波数范围小于 P\_UCD5 格式,其耗散误差约占后者的 93%,相位误差占 82%。图 1 中给出了两者的色散和耗散特性曲线,可以看到 P\_UCD5 的色散误差与 M\_UCD5 相仿,但在较高波数范围内 P\_UCD5 更加接近精确值,耗散特性也接近,但在高波数范围 P\_UCD5 耗散明显更小。

### 1.4 TVD 限制方法

直接利用紧致格式模拟含间断的流场会产生非物理振荡<sup>[21]</sup>。若直接使用上述两种格式,不能得到光滑捕捉间断的解,在后面的算例中将可以看到。



(a) 实部(色散特性)  
(a) Real part (dispersion)



(b) 虚部(耗散特性)  
(b) Imaginary part (dissipation)

图 1 两种迎风格式的修正波数

Fig. 1 The modified wavenumber of P\_UCD5 and M\_UCD5

在文献[20]中,运用了保单调限制方法和保精度措施,结合限制器函数构造了一种 5 阶迎风紧致格式。与之类似,涂国华等<sup>[17-19]</sup>借鉴 TVD 格式的构造思想,通过一个限制器来实现通量限制。两种方法在相应的文献中已有详尽的说明,本文在此不再赘述。

### 1.5 边界格式

对于一个双曲型系统,如果内点用  $N$  阶的差分格式,则边界格式至少是  $N-1$  阶,才能保证空间差分离散精度为  $N$  阶。给出 4 阶精度边界条件如下:

$$\hat{f}_{1/2}^+ = \frac{1}{4}f_0^+ + \frac{13}{12}f_1^+ - \frac{5}{12}f_2^+ + \frac{1}{12}f_3^+$$

$$\hat{f}_{N+1/2}^+ = \frac{25}{12}f_N^+ - \frac{23}{12}f_{N-1}^+ + \frac{13}{12}f_{N-2}^+ - \frac{1}{4}f_{N-3}^+$$

反方向的通量可以通过对称得到

$$\hat{f}_{1/2}^- = \frac{25}{12}f_1^- - \frac{23}{12}f_2^- + \frac{13}{12}f_3^- - \frac{1}{4}f_4^-$$

$$\hat{f}_{N+1/2}^- = \frac{1}{4}f_{N+1}^- + \frac{13}{12}f_N^- - \frac{5}{12}f_{N-1}^- + \frac{1}{12}f_{N-2}^-$$

## 2 算例分析

在本节中,我们将两种 5 阶迎风紧致格式结合不同的 TVD 限制方法用来求解一维和二维问题,分析比较格式的性能。

### 2.1 Sod 问题

这是一个经典算例,如图 2 所示,在  $t=0$  时刻,初始间断分为左右两部分; $t>0$  时,间断分解为一簇向右的激波、接触间断和向左的膨胀波。该问题主要考察格式对激波、接触间断的分辨率。

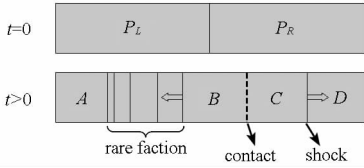


图 2 激波管问题示意图

Fig. 2 Wave pattern and the corresponding distribution in the shock-tube

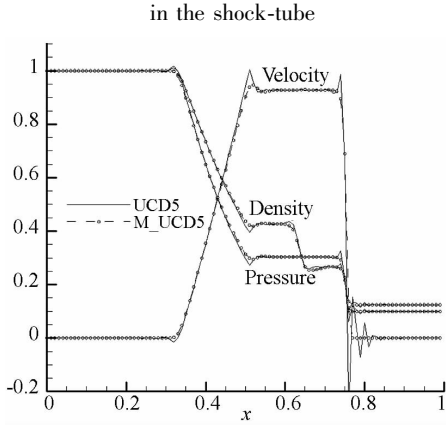


图 3 原 UCD5 格式与 TVD 修正后 M\_UCD5 格式得到的速度、密度、压力分布比较

Fig. 3 The result comparison between original UCD5 and Modified UCD5 scheme

初始条件:

$$U(x, 0) = U^{(0)}(x) = \begin{cases} U_L, & x \in [0, 0.5) \\ U_R, & x \in [0.5, 1] \end{cases}$$

$$U_L: (\rho = 1.0, u = 0.0, p = 1.0)$$

$$U_R: (\rho = 0.125, u = 0.0, p = 0.1)$$

时间推进到  $t = 0.14$ , 网格数为  $N = 100$ 。

从图 3 中可以看到,直接应用迎风紧致格式计算得到的结果在激波、接触间断等位置存在明显振荡,采用 TVD 修正措施后,振荡基本得到消除。同时,使用 Pirozzoli 的 5 阶迎风紧致格式直接计算没能得到有效结果,原因可能是其耗散过小而在激波位置振荡过大导致计算失败,采用 TVD 限制方法后可以得到较好的结果。

图 4 中给出了两种格式在采用不同的 TVD 限制后得到的密度、速度、压力分布与精确解的比较。可见二者分辨率大致相当,在网格量 100 点时,已经较为清晰地捕捉到了激波、接触间断、膨胀波,与精确解十分接近。从图 5 的放大图中可以看到,在膨胀波区域,虽然流场物理量梯度较大,但仍为光滑区域,P\_UCD5 与 M\_UCD5 格式得到的计算结果很接近且都存在一定程度的抹平;接触间断区域 P\_UCD5 结果更接近精确解;而在激波位置附近,M\_UCD5 的结果略好。分析其中原因,可能由于 P\_UCD5 中直接使用限制器的通量限制方法导致在极值点处降阶,而在 M\_UCD5

中使用了保精度措施,在间断处提高了精度,但由于放宽了取值范围,因而在个别光滑区域产生了一定程度的虚假波动。

通过该算例可以看到,不同的 TVD 方法对原格式的性能影响差异较大,P\_UCD5 使用通量限制后原格式的色散、耗散误差较小的优势被掩盖。

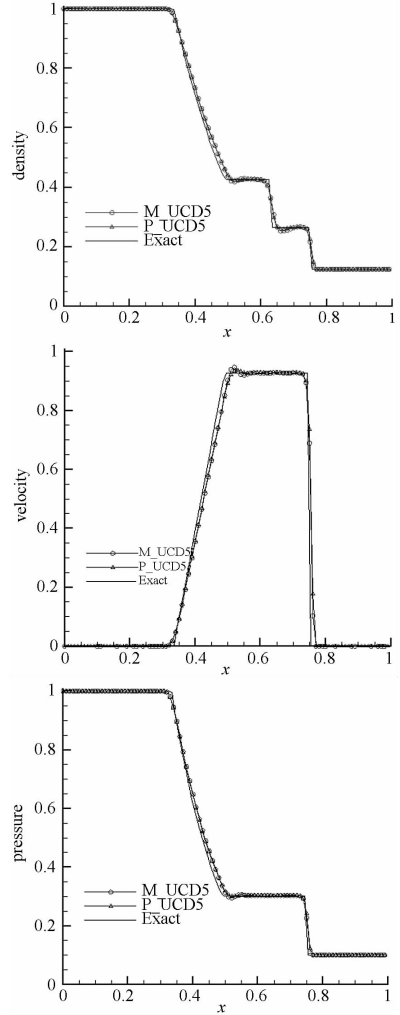


图 4 M\_UCD5 格式与 P\_UCD5 格式得到的密度、速度、压力分布比较

Fig. 4 Comparison the numerical (symbol) solution of two schemes with the exact (line) solution

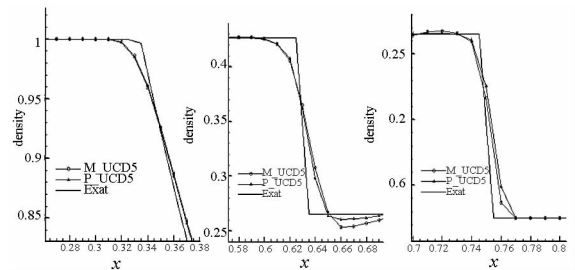


图 5 密度分布的 3 个台阶放大图

Fig. 5 Microscope of 3 concerned regions of density

### 2.2 Shu-Osher 问题

运动激波与密度干扰问题用于模拟马赫数为 3 的运动激波与一空间正弦脉动形式的密度波相

互作用,初始条件如下:

$$U(x,0) = U^{(0)}(x) = \begin{cases} U_L, x \in [-5.0, -4.0) \\ U_R, x \in [-4.0, 5.0] \end{cases}$$

$$U_L: (\rho = 3.857143, u = 2.629369, p = 10.33333)$$

$$U_R: (\rho = 1 + 0.2\sin(5x), u = 0.0, p = 1.0)$$

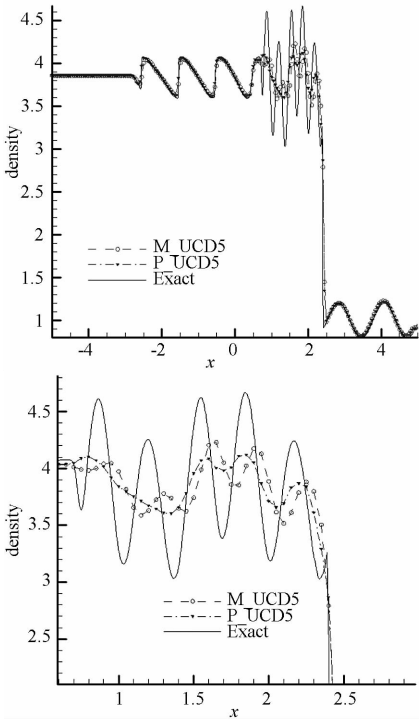


图 6 网格量为 200 点的密度分布

Fig. 6 Distribution of density on 200 grid cells

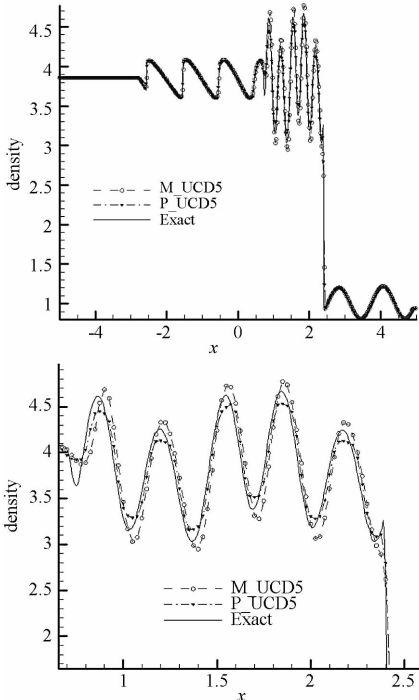


图 7 网格量为 400 点的密度分布

Fig. 7 Distribution of density on 400 grid cells

$t = 1.8$  时刻的精确解采用 WENO5 格式 1600 点的数值求解逼近得到。图 6 中给出的是网格量

为 200 点时两种格式和精确解的密度分布比较。从局部放大图中可以看到 M\_UCD5 格式较 P\_UCD5 格式分辨率高,密度波峰值结果更加接近精确解,但存在向前的相位误差;当网格量增加到 400 点时,如图 7 所示,两种格式都可以较为精确地捕捉到每一个密度波的波峰、波谷位置,但是 M\_UCD5 格式极值位置较精确值偏大,而 P\_UCD5 格式则稍低。说明保单调、保精度 TVD 方法放宽的取值范围可能引入了虚假波动,使得密度波的振幅增大。

### 2.3 二维斜激波反射

计算条件为:来流  $Ma = 2.9$ , 激波入射角为  $29^\circ$ 。计算初场为均匀流场,计算网格数为  $101 \times 51$ 。左边界为自由来流,右边界为出口,所有的量均外插,固壁为无粘刚性壁面,上边界的流场参数为:  $\rho = 1.6997, u = 2.61934, v = -0.506, p = 1.528$ 。

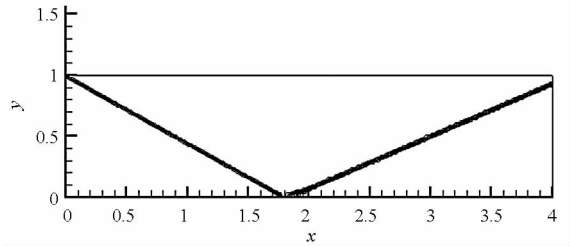


图 8 密度等值线

Fig. 8 Density contour of the oblique shock reflection

图 8 为计算所得的密度等值线,图 9 分别为  $y = 0.5$  时的密度和压力分布。从图中可以看到,两种方法对激波捕捉效果良好,在间断附近无振荡。在此算例中,从斜激波入射到反射位置,二者都能够与精确解保持一致,且激波捕捉锐利,在密度和压力分布图中有较为明显的体现。说明,两种格式在向二维拓展中,都能够保持较高的精度和分辨率。

### 3 结论

本文简要介绍了紧致格式的发展历程,着重研究基于 TVD 方法的迎风紧致格式。推导了两种 5 阶迎风紧致格式,运用傅里叶分析方法,比较了二者的耗散、色散特性。对比两种 TVD 限制方法,在具体算例中分析产生差异的原因。可以得到如下结论:

(1) 紧致格式结合 TVD 限制方法对激波、接触间断的分辨率高、鲁棒性好。

(2) 不同的 TVD 方法对原格式的性能影响差异较大,使用通量限制后,原格式的色散、耗散特

性将发生变化。

(3)保单调、保精度的 TVD 方法放宽了取值范围,增加精度的同时会降低耗散,引入虚假波动。直接使用限制器的 TVD 方法限制过于严格,会在极值点降阶。

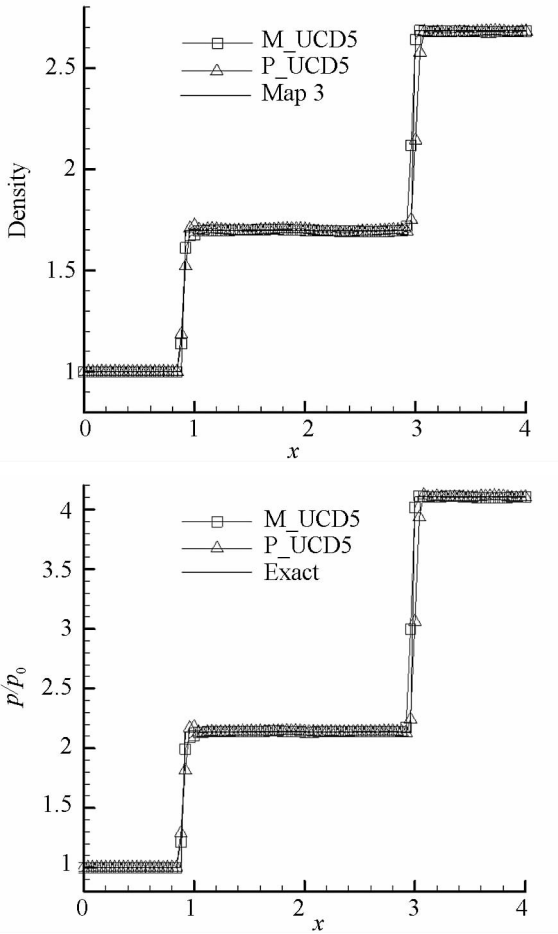


图 9  $y=0.5$  上的密度、压力分布与精确解的比较

Fig. 9 Comparison of the computed density and pressure at  $y=0.5$  with exact solution

## 参考文献 (References)

- [1] 邓小刚, 刘昕, 毛枚良, 等. 高精度加权紧致非线性格式的研究进展[J]. 力学进展, 2007, 37 (3): 417-427.  
DENG Xiaogang, LIU Xin, MAO Meiliang, et al. Advances in high-order accurate weighted compact nonlinear schemes[J]. 2007, 37 (3): 417-427. (in Chinese)
- [2] Ekaterinaris J A. High-order accurate low numerical diffusion methods for aerodynamics[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2005, (41): 192-300.
- [3] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. Journal of Computational Physics, 1992, (103): 16-42.
- [4] Rai M M, Moin P. Direct simulations of turbulent flow using finite difference schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1991, 96 (1): 15-53.
- [5] Zhong X L. High-order finite-difference schemes for numerical simulation of hypersonic boundary-layer transition[J]. Journal of Computational Physics, 1998, 144: 662-709.
- [6] De A K, Eswaran V. Analysis of a new high resolution upwind compact scheme[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 218: 398-416.
- [7] Fu D X, Ma Y W. Efficiency and accuracy of numerical methods for solving the aerodynamic equations [C]//Proceedings of the 3rd International Symposium on Computational Fluid Dynamics, 1989: 78-85
- [8] Fu D X, Ma Y W. Upwind compact schemes and applications [C]//Proceedings of the 5th International Symposium on Computational Fluid Dynamics, 1993: 184-190
- [9] 李新亮, 傅德薰, 马延文. 可压衰减湍流中被动标量场的直接数值模拟及谱分析[J]. 中国科学(G辑), 2003, (33): 357-367.  
LI Xinliang, FU Dexun, MA Yanwen. Direct numerical simulation of passive scalars of compressible decaying turbulence and spectral analysis[J]. Science in China (Series G), 2003, (33): 357-367. (in Chinese)
- [10] 李新亮, 傅德薰, 马延文. 8阶群速度控制格式及其应用[J]. 力学学报, 2004, 36 (1): 79-83.  
LI Xinliang, FU Dexun, MA Yanwen. Optimized group velocity control scheme[J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 36 (1): 79-83. (in Chinese)
- [11] Adams N A, Shariff K. A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problems[J]. Journal of Computational Physics, 1996, (127): 27-51.
- [12] Pirozzoli. Conservative hybrid compact-WENO schemes for shock-turbulence interaction [J]. Journal of Computational Physics, 2002, (178): 81-117.
- [13] Ren Y X, Liu M E, Zhang H X. A characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2003, (192): 365-386.
- [14] Cockburn B, Shu C W. Nonlinearly stable compact schemes for shock calculations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1994, 31 (3): 607-630.
- [15] Deng X G, Zhang H X. Developing high-order weighted compact nonlinear schemes [J]. Journal of Computational Physics, 2000, (165): 22-45.
- [16] Deng X G, Mao M L, Tu G H, et al. High-order and high accurate CFD methods and their applications for complex grid problems[J]. Commun. Comput. Phys., 2012, 11 (4): 1081-1102.
- [17] 涂国华, 罗俊荣. 利用通量限制思想改进紧致格式[J]. 计算物理, 2005, 22 (4): 329-336.  
TU Guohua, LUO Junrong. An improvement to compact schemes with the limiting flux method[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2005, 22(4): 329-336. (in Chinese)
- [18] Tu G H, Yuan X J. A characteristic-based shock-capturing scheme for hyperbolic problems[J]. Journal of Computational Physics, 2007, (225): 2083-2097.
- [19] Tu G H, Yuan X J, Xia Z Q, et al. A class of compact upwind TVD difference schemes[J]. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2006, 27 (6): 765-772.
- [20] He Z W, Li X L, Fu D X, et al. A 5th order monotonicity-preserving upwind compact difference scheme [J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2011, 54(3): 511-522.
- [21] 阎超, 于剑, 徐晶磊, 等. CFD模拟方法的发展成就与展望[J]. 力学进展, 2011, 41 (5): 562-589.  
YAN Chao, YU Jian, XU Jinglei, et al. On the achievements and prospects for the methods of the computational fluid dynamics[J]. Advance in Mechanics, 2011, 41 (5): 562-589. (in Chinese)