

高精度空间非合作式相对轨道状态预报*

朱正龙, 闫野, 杨跃能

(国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:为了解决接近空间非合作目标过程中的相对导航问题,提出一种基于相对轨道动力学方程和二阶龙格库塔积分公式的高精度空间非合作目标相对轨道预报模型。考虑地球 J_2 摄动加速度,将目标轨道方程在参考轨道附近展开,保留至引力加速度差的二阶展开项,并进一步推导考虑 J_2 摄动的参考轨道角速度和角加速度,建立相对轨道动力学微分方程;在给定相对轨道初值的情况下,采用二阶龙格库塔积分公式进行相对轨道预报。该模型采用数值积分方法,对相对轨道动力学模型形式没有限制,通用性好,适用范围广;选择低阶龙格库塔公式积分预报,既减少了计算量又保证了计算精度。设置高轨和低轨两种相对运动仿真场景,仿真结果表明了模型的通用性和精确性。

关键词:相对轨道动力学; J_2 摄动;相对轨道预报

中图分类号:V412.4 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2016)03-081-07

High-accuracy state propagation of non-cooperative relative orbit in space

ZHU Zhenglong, YAN Ye, YANG Yueneng

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In order to resolve the problem of relative navigation during the course approaching a non-cooperative space target, a highly accurate state propagation model of non-cooperative relative orbit motion was proposed on the basis of the relative orbit dynamics equations and the second order Runge-Kutta formula. Taking the J_2 perturbation into account and expanding the target orbit equations into second order Taylor series beside the reference orbit, the angular velocity and the angular acceleration of reference orbit were further deduced and the relative orbit dynamics differential equation was built. After giving the initial value, the second order Runge-Kutta method was used to propagate the relative orbit motion. With the use of numerical integral method, the model can be widely used without any limited condition in relative orbit dynamics model forms; with the use of second order Runge-Kutta method, the computing efficiency is improved while the calculation accuracy is guaranteed. Two simulation scenarios, a low Earth orbit scenario and a high Earth orbit scenario, were designed to testify the generality and precision.

Key words: relative orbit dynamics; J_2 perturbation; relative orbit propagation

空间相对轨道状态预报技术是完成空间接近操作任务的关键技术之一。针对空间非合作目标的相对轨道预报难度更大,不仅需要追踪航天器对非合作目标进行跟踪测量,还需要不依赖目标轨道参数的相对轨道预报模型提供理论支撑。

经典相对轨道预报模型,如 CW 模型和 TH 模型^[1-2],广泛应用于空间交会对接、编队飞行以及其他在轨操作接近任务中,其优点是可获得解析解,使用方便,但是该模型忽略了地球非球形引力摄动,并对相对运动方程进行了线性化处理,适用范围有限,预报精度也受到限制,难以满足高精度空间操作任务的需求。Schweighart 和

Sedwick^[3]考虑 J_2 摄动的影响,并引入平均参考轨道的概念,建立了线性化的相对轨道模型,适用于近圆轨道的空间编队任务。该模型虽然也可以获得解析解,但是参考轨道的平均化、相对运动方程的线性化处理以及近圆假设均限制了模型的适用范围。Pluym 和 Damaren^[4]建立了考虑中心引力 3 阶、 J_2 摄动引力 2 阶的相对运动模型,该模型仅给出微分方程,并且采用了平均轨道角速度。Chen 和 Jing^[5]基于拉格朗日动力学理论,建立了考虑 J_2 摄动和大气阻力摄动的精确相对运动微分方程,并给出了相应的精确轨道角速度矢量和轨道角加速度矢量。

* 收稿日期:2015-03-07

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11502288)

作者简介:朱正龙(1987—),男,湖北宜昌人,博士研究生,E-mail:long420521@163.com;

闫野(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:yynudt@126.com

现有的相对运动模型存在的问题是适用范围受限、通用性差或者难以求解,这都不利于实际工程应用。

1 相对轨道动力学

1.1 一般相对动力学方程

为描述问题的方便,首先定义轨道坐标系:原点 o 位于航天器的质心, ox 轴由地心指向航天器的质心, oy 在轨道面内垂直于 ox 轴并指向运动方向, ox , oy 和 oz 构成右手直角坐标系。

设追踪航天器和目标航天器的位置矢量分别为 \mathbf{R}_c 和 \mathbf{R}_t , 追踪航天器的轨道角速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}_c$ 。定义两个航天器的相对位置矢量为 $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R}_t - \mathbf{R}_c$, 根据动坐标系下的矢量微分法则, 在追踪航天器的轨道坐标系中:

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\boldsymbol{\omega}_c \times \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega}_c \times (\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_c \times \boldsymbol{\rho} \quad (1)$$

式中, $\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2}$ 表示绝对导数, 而 $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{\rho}}$ 表示动坐标系下的当地导数。假设航天器未受控制力作用, 根据牛顿运动定律有:

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \Delta\mathbf{g}_c + \Delta\mathbf{g}_p \quad (2)$$

式中, $\Delta\mathbf{g}_c$ 表示中心引力加速度差, $\Delta\mathbf{g}_p$ 为摄动加速度差之和。联立式(1)和式(2)可得追踪器轨道坐标系下的目标相对运动方程为:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -2\boldsymbol{\omega}_c \times \dot{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\omega}_c \times (\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_c \times \boldsymbol{\rho} + \Delta\mathbf{g}_c + \Delta\mathbf{g}_p \quad (3)$$

需要注意, 采用不同的参考轨道模型, 轨道角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_c$ 和轨道角加速度矢量 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_c$ 的表达式不同。

1.2 精确二体相对运动模型

在式(3)中, 忽略摄动加速度和控制加速度, 可得到精确的二体相对运动方程:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -2\boldsymbol{\omega}_c \times \dot{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\omega}_c \times (\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_c \times \boldsymbol{\rho} + \Delta\mathbf{g}_c \quad (4)$$

将 $\boldsymbol{\rho}$, $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{\rho}}$ 投影到追踪器轨道坐标系:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho} = [x, y, z]^T \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T \\ \ddot{\boldsymbol{\rho}} = [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}]^T \end{cases} \quad (5)$$

在二体运动条件下, 追踪器轨道角速度矢量和轨道角加速度矢量可表示为^[1]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_c = [0, 0, \dot{\theta}]^T \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_c = [0, 0, \ddot{\theta}]^T \end{cases} \quad (6)$$

式中, θ 为真近点角。目标器和追踪器的中心引

力加速度在追踪器轨道坐标系中的投影分别为:

$$\mathbf{g}_{c,t} = -\frac{\mu}{r_t^3} [r_c + x, y, z]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{g}_{c,c} = -\frac{\mu}{r_c^2} [1, 0, 0]^T \quad (8)$$

式中, μ 是地球引力常数, r_t 为目标器的地心距, r_c 为追踪器的地心距。中心引力加速度差的表达式为:

$$\Delta\mathbf{g}_c = -\frac{\mu}{r_t^3} \begin{bmatrix} r_c + x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \frac{\mu}{r_c^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中, $r_t = \sqrt{(r_c + x)^2 + y^2 + z^2}$ 。将式(5)至式(9)代入式(4), 并展开成坐标分量形式, 可得:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{\theta}^2 x + \ddot{\theta} y + 2\dot{\theta} \dot{y} + \mu/r_c^2 - \mu(r_c + x)/r_t^3 \\ \ddot{y} = -\ddot{\theta} x + \dot{\theta}^2 y - 2\dot{\theta} \dot{x} - \mu y/r_t^3 \\ \ddot{z} = -\mu z/r_t^3 \end{cases} \quad (10)$$

式(10)即为二体条件下目标相对追踪器的精确运动方程, 为时变系数的非线性微分方程组。

1.3 精确 J_2 摄动相对运动模型

文献[5]在推导相对轨道微分方程时, 考虑了 J_2 摄动和大气阻力摄动, 本文仅考虑 J_2 项地球扁率摄动, 忽略其他摄动加速度和控制加速度, 建立相对运动模型:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -2\boldsymbol{\omega}_c \times \dot{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\omega}_c \times (\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\rho}) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_c \times \boldsymbol{\rho} + \Delta\mathbf{g}_c + \Delta\mathbf{g}_{J_2} \quad (11)$$

此时, 目标器与追踪器的轨道均受到 J_2 摄动力的影响。根据文献[6], 摄动加速度在轨道坐标系中可表示为:

$$\mathbf{g}_{J_2}(r, i, u) = -\frac{3\mu J_2 R_E^2}{2r^4} \begin{bmatrix} 1 - 3 \sin^2 u \sin^2 i \\ \sin(2u) \sin^2 i \\ \sin u \sin(2i) \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中, r 表示地心距(即航天器质心与地心之间的距离), i 为轨道倾角, u 为纬度幅角, R_E 是地球半径, J_2 是地球引力位系数。

在追踪器轨道坐标系中, 地球扁率摄动加速度差的计算表达式为:

$$\Delta\mathbf{g}_{J_2} = \mathbf{M}_{i_0}^c (\mathbf{M}_{i_0}^t)^T \mathbf{g}_{J_2}(r_t, i_t, u_t) - \mathbf{g}_{J_2}(r_c, i_c, u_c) \quad (13)$$

式中, $\mathbf{M}_{i_0}^c$ 和 $\mathbf{M}_{i_0}^t$ 分别为追踪器和目标器的轨道坐标系相对惯性坐标系的坐标转换矩阵, 与瞬时轨道根数有关。

轨道角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_c = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ 的计算

过程及表达式为:

$$\boldsymbol{\omega}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{u} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_3(u) \begin{bmatrix} \dot{i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{M}_3(u) \mathbf{M}_2(i) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中, Ω 为升交点赤经, $\mathbf{M}_j(\cdot)$ ($j=1,2,3$) 表示绕坐标轴的初等转换矩阵。进一步整理式(14)可得:

$$\boldsymbol{\omega}_o = \begin{bmatrix} \dot{i} \cos u + \dot{\Omega} \sin i \sin u \\ -\dot{i} \sin u + \dot{\Omega} \sin i \cos u \\ \dot{u} + \dot{\Omega} \cos i \end{bmatrix} \quad (15)$$

轨道根数的导数可根据高斯摄动方程获得(参见文献[7]),将式(12)代入高斯摄动方程可得^[5]:

$$\dot{\Omega} = -A_{J_2} \frac{\sin^2 u \cos i}{hr^3} \quad (16)$$

$$\dot{i} = -A_{J_2} \frac{\sin(2i) \sin(2u)}{2hr^3} \quad (17)$$

$$\dot{u} = \frac{2A_{J_2} \cos^2 i \sin^2 u}{hr^3} + \frac{h}{r^2} \quad (18)$$

$$\dot{h} = -\frac{A_{J_2} \sin^2 i \sin(2u)}{r^3} \quad (19)$$

其中, $h = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$ (p 为轨道半通径, a 为轨道长半轴, e 为轨道偏心率), $A_{J_2} = 3\mu J_2 R_E^2/2$ 为常数。进一步,追踪器轨道角速度为:

$$\begin{cases} \omega_x = -A_{J_2} \sin u_c \sin(2i_c) / (h_c r_c^3) \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = h_c / r_c^2 = n_c (1-e_c^2)^{-3/2} (1+e_c \cos \theta_c)^2 \end{cases} \quad (20)$$

式中, n_c 是追踪器轨道平均角速度。对式(20)求微分,可求得轨道角加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_o$:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = A_{J_2} \sin(2i_c) \cdot \left(\frac{2 \sin u_c \dot{r}_c}{hr_c^4} - \frac{2A_{J_2} \sin u_c \sin(2u_c) \sin^2 i_c}{h^2 r_c^6} - \frac{\cos u_c}{r_c^5} \right) \\ \dot{\omega}_y = 0 \\ \dot{\omega}_z = -\frac{A_{J_2} \sin^2 i_c \sin(2u_c)}{r_c^5} - \frac{2h_c \dot{r}_c}{r_c^3} \end{cases} \quad (21)$$

式中, \dot{r}_c 为追踪器地心距的变化率。

将式(9)、式(13)、式(20)和式(21)代入式(11)即得到目标器相对追踪器的轨道运动模型。

2 相对运动模型的展开

从式(13)可以看出,在计算 J_2 摄动加速度差

时,还需要获取目标航天器的轨道参数,而对非合作空间目标,其轨道参数常常无法获取。为此考虑将目标航天器轨道在参考轨道航天器附近进行泰勒级数展开。

2.1 中心引力加速度的展开

根据式(7)和式(8),将 $\mathbf{g}_{c,t}$ 在 $\mathbf{g}_{c,c}$ 附近级数展开可得:

$$\mathbf{g}_{c,t}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{g}_{c,c} + \frac{\partial \mathbf{g}_{c,t}(0)}{\partial \boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \boldsymbol{\rho}^T \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{c,t}(0)}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right)^T \right] \boldsymbol{\rho} + HOT_1 \quad (22)$$

式中, \mathbf{e}_i 为三维向量空间中的标准基向量, HOT_1 表示目标引力加速度 $\mathbf{g}_{c,t}(\boldsymbol{\rho})$ 关于 $\boldsymbol{\rho}$ 的高阶展开项。在式(22)中,作如下符号定义:

$$\mathbf{P}_1(r_c) \triangleq \frac{\partial \mathbf{g}_{c,t}(0)}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (23)$$

$$\mathbf{Q}_{1i}(r_c) \triangleq \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{c,t}(0)}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right)^T, i=1,2,3 \quad (24)$$

经计算推导,可得:

$$\mathbf{P}_1(r_c) = \frac{\mu}{r_c^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{Q}_{11}(r_c) = \frac{3\mu}{2r_c^4} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{Q}_{12}(r_c) = \frac{3\mu}{2r_c^4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{Q}_{13}(r_c) = \frac{3\mu}{2r_c^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

根据式(22)至式(28),经推导计算,中心引力加速度差的一阶项和二阶项表达式分别为:

$$\Delta \mathbf{g}_{c,1st} = \mathbf{P}_1(r_c) \boldsymbol{\rho} = \frac{\mu}{r_c^3} [2x \quad -y \quad -z]^T \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{g}_{c,2nd} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [\mathbf{e}_i \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{Q}_{1i}(r_c) \boldsymbol{\rho}] \\ &= \frac{3\mu}{2r_c^4} \begin{bmatrix} -2x^2 + y^2 + z^2 \\ 2xy \\ 2xz \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

2.2 J_2 摄动加速度的展开

根据式(12),目标 J_2 摄动加速度 $\mathbf{g}_{J_2,t}$ 在追踪器轨道坐标系中的计算式为:

$$\mathbf{g}_{J_2,t} = \mathbf{M}_{io}^c (\mathbf{M}_{io}^t)^T \mathbf{g}_{J_2}(r_t, i_t, u_t) \quad (31)$$

为方便计算,将 $\mathbf{g}_{J_2,t}$ 转化为显含 $\boldsymbol{\rho}$ 的函数表达式。根据文献[1],目标器在惯性坐标系下的 J_2 项摄动加速度可表示为:

$$\mathbf{J}'_2(\mathbf{R}_t) = -\frac{3\mu J_2 R_E^2}{2r^5} \begin{bmatrix} \left(1 - 5\frac{Z^2}{r^2}\right)X \\ \left(1 - 5\frac{Z^2}{r^2}\right)Y \\ \left(3 - 5\frac{Z^2}{r^2}\right)Z \end{bmatrix} \quad (32)$$

将 $\mathbf{R}_t = [X, Y, Z]^T$ 投影到追踪器轨道坐标系,其关系式为:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = (\mathbf{M}_{io}^c)^T \begin{bmatrix} r_c + x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (33)$$

坐标转换矩阵 \mathbf{M}_{io}^c 的表达式为:

$$\mathbf{M}_{io}^c = \mathbf{M}_3(u_c) \mathbf{M}_1(i) \mathbf{M}_3(\Omega) \quad (34)$$

利用 $\mathbf{J}'_2(\mathbf{R}_t) = (\mathbf{M}_{io}^t)^T \mathbf{g}_{J_2}(r_t, i_t, u_t)$, 将式(31)转化为:

$$\mathbf{g}_{J_2,t} = \mathbf{M}_{io}^c \mathbf{J}'_2(\mathbf{R}_t) \quad (35)$$

将式(32)至式(34)代入式(35),可将 $\mathbf{g}_{J_2,t}$ 表示为显含相对位置矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 的函数 $\mathbf{g}_{J_2,t}(\boldsymbol{\rho})$, 将 $\mathbf{g}_{J_2,t}(\boldsymbol{\rho})$ 在 $\mathbf{g}_{J_2,c}$ 附近级数展开可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{J_2,t}(\boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{g}_{J_2,c} + \frac{\partial \mathbf{g}_{J_2,t}(0)}{\partial \boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\rho} + \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \boldsymbol{\rho}^T \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{J_2,t}^i(0)}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right)^T \right] \boldsymbol{\rho} + \mathbf{HOT}_2 \end{aligned} \quad (36)$$

式中, \mathbf{HOT}_2 表示目标引力加速度 $\mathbf{g}_{J_2,t}(\boldsymbol{\rho})$ 关于 $\boldsymbol{\rho}$ 的高阶展开项。作如下符号定义:

$$\mathbf{P}_2(r_c, i_c, u_c) \triangleq \frac{\partial \mathbf{g}_{J_2,t}(0)}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (37)$$

$$\mathbf{Q}_{2i}(r_c, i_c, u_c) \triangleq \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{J_2,t}^i(0)}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right)^T, i=1, 2, 3 \quad (38)$$

记 $\sin\varphi = s_\varphi, \cos\varphi = c_\varphi, \varphi$ 为任意的角变量,经过推导计算可得^[4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2(r_c, i_c, u_c) &= \frac{3\mu J_2 R_E^2}{2r_c^5} \cdot \\ &\begin{bmatrix} 12s_u^2 s_i^2 - 4 & -4s_{2u} s_i^2 & -4s_u s_{2i} \\ -4s_{2u} s_i^2 & 1 + s_i^2(2 - 7s_u^2) & c_u s_{2i} \\ -4s_u s_{2i} & c_u s_{2i} & 3 - s_i^2(2 + 5s_u^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\mathbf{Q}_{21}(r_c, i_c, u_c) = \frac{5\mu J_2 R_E^2}{2r_c^6} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 12s_u^2 s_i^2 - 4 & -4s_{2u} s_i^2 & -4s_u s_{2i} \\ -4s_{2u} s_i^2 & 5c_i^2 + 7c_u^2 s_i^2 - 4 & c_u s_{2i} \\ -4s_u s_{2i} & c_u s_{2i} & 7c_i^2 + 5c_u^2 s_i^2 - 4 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{Q}_{22}(r_c, i_c, u_c) = \frac{5\mu J_2 R_E^2}{2r_c^6} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} -4s_{2u} s_i^2 & 5c_i^2 + 7c_u^2 s_i^2 - 4 & s_{2i} c_u \\ 5c_i^2 + 7c_u^2 s_i^2 - 4 & 3s_{2u} s_i^2 & s_{2i} s_u \\ s_{2i} c_u & s_{2i} s_u & s_{2u} s_i^2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{Q}_{23}(r_c, i_c, u_c) = \frac{5\mu J_2 R_E^2}{2r_c^6} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} -4s_u s_{2i} & s_{2i} c_u & 7c_i^2 + 5c_u^2 s_i^2 - 4 \\ s_{2i} c_u & s_{2i} s_u & s_{2u} s_i^2 \\ 7c_i^2 + 5c_u^2 s_i^2 - 4 & s_{2u} s_i^2 & 3s_u s_{2i} \end{bmatrix} \quad (42)$$

式(39) ~ (42)省略了 i_c 和 u_c 的下标。根据式(36),保留至 J_2 摄动加速度差的二阶近似表达式为:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{g}_{J_2,1,2} &= \mathbf{P}_2(r_c, u_c, i_c) \boldsymbol{\rho} + \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{Q}_{2i}(r_c, i_c, u_c) \boldsymbol{\rho} \end{aligned} \quad (43)$$

将式(43)中的一阶项和二阶项分别记为 $\Delta \mathbf{g}_{J_2,1st}$ 和 $\Delta \mathbf{g}_{J_2,2nd}$, 即:

$$\Delta \mathbf{g}_{J_2,1st} = \mathbf{P}_2(r_c, u_c, i_c) \boldsymbol{\rho} \quad (44)$$

$$\Delta \mathbf{g}_{J_2,2nd} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{Q}_{2i}(r_c, i_c, u_c) \boldsymbol{\rho} \quad (45)$$

取中心引力和 J_2 摄动加速度差的一阶展开项,根据式(11)可得线性化的相对运动方程为:

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\rho}} &= -2\boldsymbol{\omega}_o \times \dot{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\omega}_o \times (\boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{\rho}) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_o \times \boldsymbol{\rho} + \\ &\Delta \mathbf{g}_{e,1st} + \Delta \mathbf{g}_{J_2,1st} \end{aligned} \quad (46)$$

式中, $\boldsymbol{\omega}_o$ 和 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_o$ 分别由式(20)和式(21)给出, $\Delta \mathbf{g}_{e,1st}$ 和 $\Delta \mathbf{g}_{J_2,1st}$ 分别由式(29)和式(44)给出。

取状态变量为 $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\rho}^T, \dot{\boldsymbol{\rho}}^T]^T$, 式(46)写成状态空间的形式为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) \quad (47)$$

式中,时变矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 的表达式为:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 - [\boldsymbol{\omega}_o \times]^2 - [\dot{\boldsymbol{\omega}}_o \times] & -2[\boldsymbol{\omega}_o \times] \end{bmatrix} \quad (48)$$

方程式(11)给出了考虑 J_2 地球扁率摄动的精确相对运动方程,其中 J_2 摄动加速度差的计算包含了目标航天器的轨道根数,这对于非合作目

标的相对轨道计算很不方便。为此,考虑取全部中心引力加速度差和 J_2 摄动加速度差的前两阶展开项,得到高精度的非线性相对运动方程为:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -2\boldsymbol{\omega}_0 \times \dot{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\rho}) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \boldsymbol{\rho} + \Delta \mathbf{g}_c + \Delta \mathbf{g}_{J_2,1,2} \quad (49)$$

式中, $\Delta \mathbf{g}_c$ 和 $\Delta \mathbf{g}_{J_2,1,2}$ 分别由式(9)和式(43)给出。

3 相对轨道预报模型

本节在相对轨道运动微分方程式(49)的基础上,研究快速、高精度的空间非合作目标相对轨道状态预报方法。

在进行相对轨道预报时,一般根据当前时刻的状态 $\mathbf{x}(k)$ 及追踪器轨道参数 $\boldsymbol{\sigma}_c$ 计算出经 $h = \Delta t$ 时间之后的状态 $\mathbf{x}(k+1)$,可表示为如式(50)所示的非线性函数的形式:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}(t_k, \mathbf{x}_k) \quad (50)$$

为实现相对状态的时间转移,现在的任务就是构造一个计算速度快、计算精度损失小的非线性矢量函数 $\mathbf{F}: \mathbf{x}_k \mapsto \mathbf{x}_{k+1}$ 。借助数值积分的方法,采用低阶的 Runge-Kutta 积分方法实现相对状态的转移。设微分方程形式的相对轨道模型可表示为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\sigma}_c) \quad (51)$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}_c$ 表示追踪器的轨道根数,在此假设轨道根数 $\boldsymbol{\sigma}_{c,k}$ 可由追踪器上的导航设备精确提供,并且在单个状态转移周期 Δt 内保持不变。

3.1 线性化的相对轨道预报模型

线性系统理论已经十分成熟,而且在使用中十分方便。若线性化的相对轨道运动方程为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (52)$$

则根据常微分方程的知识,求解上述连续时变系统,可得:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (53)$$

式中, $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$ 是状态转移矩阵,其计算公式为:

$$\boldsymbol{\Phi}(t, t_0) = \exp\{\mathbf{A}(t)(t - t_0)\} \quad (54)$$

对于矩阵的指数运算,其定义为:

$$\exp\{\mathbf{A}(t)\} = \mathbf{I} + \mathbf{A}(t) + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2(t) + \dots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k(t) + \dots \quad (55)$$

从而,当状态转移时间 $\Delta t = t - t_0$ 较小时,可得到状态转移矩阵的表达式为:

$$\boldsymbol{\Phi}(t, t_0) \approx \mathbf{I} + \mathbf{A}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2(t)\Delta t^2 + \dots \quad (56)$$

考虑地球中心引力加速度差和 J_2 摄动加速度差的一阶展开模型由式(47)给出,相应的系统

矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 由式(48)计算,阶数根据需要选择。

3.2 非线性相对轨道预报模型

对于高精度的状态预报问题,状态方程线性化处理损失了模型的精度,为此须对非线性相对轨道运动方程进行求解。相对轨道运动方程由式(49)给出,记 $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\rho}^T, \mathbf{v}^T]^T$,可将式(49)写成式(51)的形式,并且:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\sigma}_c) = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \Delta \mathbf{g}_c + \Delta \mathbf{g}_{J_2,1,2} - 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\rho}) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} \quad (57)$$

基于二阶 Runge-Kutta 公式的相对状态转移公式为:

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}_k; \boldsymbol{\sigma}_c) \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_k + h, \mathbf{x}_k + h\mathbf{k}_1; \boldsymbol{\sigma}_c) \\ \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)/2 \end{cases} \quad (58)$$

式中, h 为积分步长。二阶 Runge-Kutta 公式为二阶 $O(h^2)$ 精度的积分公式,具体的状态转移精度由状态转移周期 Δt 决定。

4 仿真分析

本节从积分方法、积分步长以及相对动力学方程3个方面分析所建立的相对轨道预报模型的精度。在仿真分析时,采用 STK-HPOP 模块生成目标航天器和追踪航天器的轨道数据,并转换为相对轨道数据,作为真实轨道数据用于对比分析模型精度。

在高轨和低轨分别设计一个目标器与追踪器先接近后远离的相对运动场景,最小相对距离为 20 km,仿真时间为以目标器、追踪器最近距离为中点的前后共 600 s 的时间。

低轨仿真场景:目标器与追踪器轨道分别运行于 800 km 高度的太阳同步轨道上,两轨道面的夹角为 7.69° ,目标器和追踪器先后过轨道交点,最小相对距离约为 20 km。

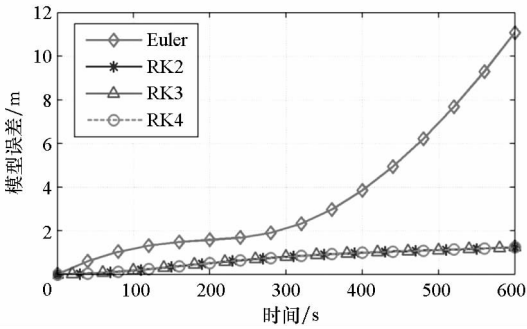
高轨仿真场景:目标器运行于地球同步轨道上,追踪器运行于周期为 12 小时、远地点高度低于目标轨道 20 km 的椭圆轨道上。

4.1 积分方法对预报精度的影响

采用基于二阶 Runge-Kutta 积分公式的相对轨道预报模型,分别在低轨和高轨两个不同场景条件下,仿真分析考虑不同展开项引力加速度相对运动模型的预报精度。

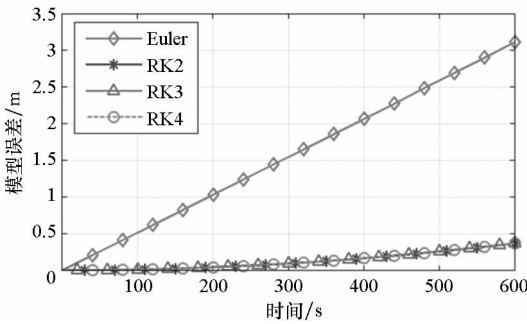
图1给出了分别基于 Euler 方法和二阶至四阶 Runge-Kutta 方法(RK2, RK3, RK4)进行轨道

预报的误差曲线,仿真计算步长为 0.1 s。仿真结果表明:采用二阶 Runge-Kutta 方法既保证了计算精度,也提高了计算效率。



(a) 低轨算例

(a) Low earth orbit example



(b) 高轨算例

(b) High earth orbit example

图 1 采用不同积分方法时的相对轨道预报误差曲线
Fig. 1 Relative orbit propagation error with different integral methods

4.2 积分步长对预报精度的影响

将积分步长分别取为 0.1 s, 1 s, 5 s 和 10 s 四种情况分别进行轨道预报,经过 600 s 后,预报误差如表 1 和表 2 所示。

表 1 和表 2 的结果表明:若采用二阶以上(含二阶)积分方法,模型中计算步长在 0.1 ~ 10 s 之间时的误差发散情况相当;而采用 Euler 方法时,误差近似呈线性发散,计算精度很低。

表 1 采用不同积分步长时的低轨相对轨道预报误差
Tab. 1 Relative orbit propagation errors with different integral step in low earth orbit

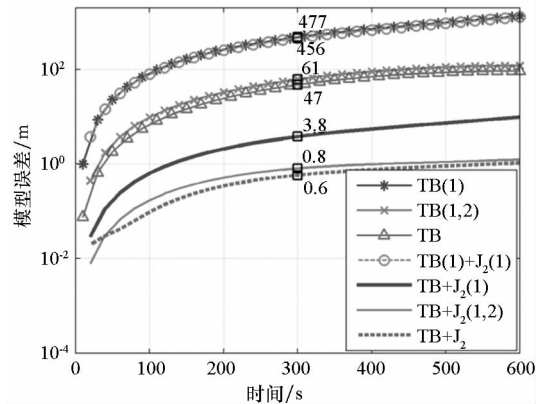
积分方法	积分步长			
	0.1 s	1 s	5 s	10 s
Euler	11.08	107.5	532.9	1057
RK2	1.243 8	1.318 2	3.620 7	11.572 0
RK3	1.243 1	1.251 5	1.296 2	1.368 3
RK4	1.243 1	1.251 5	1.296 6	1.372 0

表 2 采用不同积分步长时的高轨相对轨道预报误差
Tab. 2 Relative orbit propagation errors with different integral step in high earth orbit

积分方法	积分步长			
	0.1 s	1 s	5 s	10 s
Euler	3.113	30.89	154.4	308.8
RK2	0.368 7	0.368 8	0.373 0	0.403 1
RK3	0.367 8	0.368 8	0.371 0	0.378 4
RK4	0.367 8	0.368 8	0.371 0	0.378 4

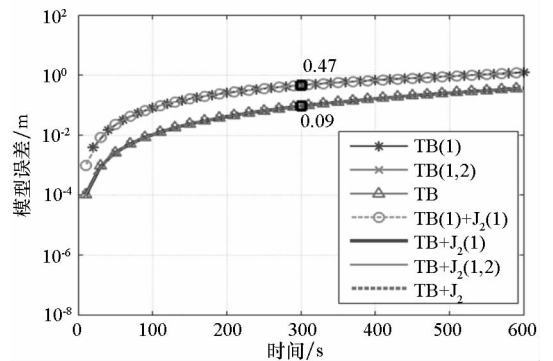
4.3 相对动力学方程对预报精度的影响

当相对轨道动力学方程保留不同阶数的地球引力加速度差时,得到的相对轨道预报模型精度不同。图 2(a) 和图 2(b) 分别为低轨和高轨场景下的相对轨道预报误差曲线。



(a) 低轨算例

(a) Low earth orbit example



(b) 高轨算例

(b) High earth orbit example

图 2 采用不同动力学方程时的相对轨道预报误差曲线
Fig. 2 Relative orbit propagation errors with different equations of relative orbit dynamics

仿真结果表明:在 600 s 的相对运动过程中,二体相对模型 TB 及其一阶展开式 TB(1)、二阶展开式 TB(1,2) 在低轨场景下预报误差均在 50 m 以上,而在高轨的预报误差小于 2 m;考虑 J₂

摄动及其一阶、二阶展开项的模型,即 $TB + J_2$, $TB + J_2(1)$ 和 $TB + J_2(1,2)$, 在低轨的预报误差均在 10 m 以内,而在高轨的预报误差在 1 m 以内;此外两个线性模型,即 $TB(1)$ 和 $TB(1) + J_2(1)$ 在高轨的预报误差在 2 m 以内,在低轨的预报误差均超过 1000 m。

综上所述:在高轨,采用二体模型的一阶展开式(即著名的 Lawden 方程)建立预报模型即可获得较高的预报精度,预报误差在 2 m 以内;在低轨,除考虑中心引力差的一阶展开项,还必须考虑中心引力的二阶展开项以及 J_2 摄动加速度差的一阶展开项,才能获得预报误差小于 10 m 的模型,若进一步考虑 J_2 摄动加速度差的二阶展开项,600 s 内的预报误差可缩小到 2 m 以内。

J_2 摄动是最主要的轨道摄动因素之一,考虑到 J_2 摄动加速度的大小近似与航天器地心距的 5 次方成反比,而高轨航天器的地心距约为低轨的 6 倍,由此可知高轨 J_2 摄动加速度的影响很小,而低轨影响明显。此外,由于相对距离远,摄动加速度差的高阶展开项不再是小量,如果忽略会带来较大的预报误差。

5 结论

空间非合作目标相对轨道预报是实现空间操作的一项重要技术环节。考虑主要轨道摄动因素,并基于二阶 Runge-Kutta 方法,提出了一种相对轨道预报模型,综合考虑计算精度和计算效率,该模型通用性好,计算速度快,预报精度高,可用于高速相对运动空间非合作目标相对轨道预报,

且在算例给定的时间内,其预报误差在米量级。所提方法能够对解决未来更高精度的空间操作任务提供经验参考和技术支撑。

参考文献 (References)

- [1] 杨乐平, 朱彦伟, 黄焕. 航天器相对运动轨迹规划与控制[M]. 北京:国防工业出版社, 2010.
YANG Leping, ZHU Yanwei, HUANG Huan. Spacecraft relative motion trajectory planning and control [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2010. (in Chinese)
- [2] 岳晓奎, 苑云霞. 椭圆轨道相对动力学状态转移矩阵[J]. 中国空间科学技术, 2011, 31(1): 42-47.
YUE Xiaokui, YUAN Yunxia. Transfer matrix for relative dynamics in elliptic orbit [J]. Chinese Space Science and Technology, 2011, 31(1): 42-47. (in Chinese)
- [3] Schweighart S A, Sedwick R J. High-fidelity linearized J_2 model for satellite formation flight [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(6): 1073-1080.
- [4] Pluym J P, Damaren C J. Second order relative motion model for spacecraft under J_2 perturbations [C]//Proceedings of AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, 2006.
- [5] Chen W Y, Jing W X. Differential equations of relative motion under the influence of J_2 perturbation and air drag [C]//Proceedings of AIAA Space Conference & Exposition, 2010.
- [6] 朱仁璋. 航天器交会对接技术[M]. 北京:国防工业出版社, 2007.
ZHU Renzhang. Spacecraft rendezvous and docking technology[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2007. (in Chinese)
- [7] 杨嘉墀. 航天器轨道动力学与控制[M]. 北京:中国宇航出版社, 1995.
YANG Jiachi. Spacecraft orbit dynamics and control [M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 1995. (in Chinese)