

干,提高教员自身理论水平和技术水平. 流体力学被评为海军优秀课程一等奖,《流体力学课程教学改革的研究与实践》获海军优秀教学成果奖,主持完成的教学科研《突出海军职业课程特点,打造一流实践平台》被评为湖北省优秀高等教学成果二等奖. 利用自行研制的船池拖动系统和波浪水槽,先后完成了“973”、总装预研、科技部基金等5项科研课题的实验研究,实验室科研能力得到了增强.

### 3.3 加强了自身优势,加速了推广应用

通过五年来实验教学和科研实践,机翼升阻力等气动力学实验设备,学员反映该系列实验设备原理直观、操作简便,测量误差小;与其他单位的同类设备相比,性价比高. 自循环流场显示系统流场稳定,湍流度低,显示效果好,已推广到上海交通大学和青岛海洋大学等十多个单位. 船池拖动系统的拖车运行稳定,操控方便,安全性好,已推广到中科院力学所.

### 4 结束语

通过自行研发实验设备,解决了教学急需,保证了实验开出率,锻炼了实验室队伍,提高了实验教学质量. 使理论与实践有机地结合,为解决教学中的问题打下坚实基础,实验室自制实验设备必将对实验教学改革、学员创新能力的培养产生积极的影响.

### 参考文献

- 1 杨宏,李国辉. 走自制实验设备之路,促进实验教学改革. 实验技术与管理, 2013, 30(1): 225-227
- 2 周童,曲占庆,陈德春. 走自制设备之路,提高师生实验创新能力. 实验室研究与探索, 2010, 29(2): 168-169
- 3 李振键,席巧娟,苏家芬等. 开展自制改制教学仪器设备,提高实验室综合效益. 实验技术与管理, 1999, 16(3): 113-115
- 4 贾志涛. 深化自制实验设备工作提升实践教学质量. 价值工程, 2010, (33): 229-230
- 5 朱正林,吴强,潘效军. 谈高校自制实验仪器设备在应用型人才培养中的作用. 中国科教创新导刊, 2007, (21): 12-13
- 6 王冲,张志宏,顾建农. 改革创新,打造一流实验教学平台. 实验与创新能力培养, 2008, 12: 302-304

(责任编辑:胡漫)

## 一类柱铰链动约束力问题的解答与探讨<sup>1)</sup>

刘习军<sup>2)</sup> 张素侠

(天津大学机械工程学院,天津 300072)

**摘要** 利用达朗贝尔原理解动力学问题在工程实践中得到重要应用,也是理论力学教学中的一个重要内容,但具有机械式调速原理机构中的一类柱铰链处的动约束力问题需要更深入的探讨,通过对此类动力学问题的求解,得到了系统之间的约束力、速度与结构参数之间的关系及应用达朗贝尔原理解题的条件,并给出了在教学中的几点建议.

**关键词** 动约束力,惯性力,达朗贝尔原理

**中图分类号**: O31 **文献标识码**: A

**doi**: 10.6052/1000-0879-14-157

### 引言

在理论力学中的达朗贝尔原理章节,有许多是这样一类例题和习题<sup>[1-2]</sup>,主要是由转轴与一个刚体用柱铰链连接,其刚体可绕柱铰链转动,如机械式调速器等,如图1和图2所示. 理论力学课程在这一类题目中,主要是求它们之间的夹角值或柱铰链的动约束力,但并没有考虑夹角的变化对动约束力的影响,但在工程实际中这个角度是可以变化的,那么结果是怎样呢? 本文以一个习题为例,对此问题进行了求解,给出了夹角、转速和动约束力之间

2014-04-22 收到第1稿,2014-06-20 收到修改稿.

1) 天津大学国家精品课程项目和天津大学国家力学示范中心项目资助.

2) 刘习军,教授,博导,“工程振动与测试”国家精品课程负责人,研究领域为动力学与控制. E-mail: lxijun@tju.edu.cn

**引用格式**: 刘习军,张素侠. 一类柱铰链动约束力问题的解答与探讨. 力学与实践, 2016, 38(3): 334-337

Liu Xijun, Zhang Suxia. The solution and discussion on the dynamical problems of rigid body with articulate column. *Mechanics in Engineering*, 2016, 38(3): 334-337

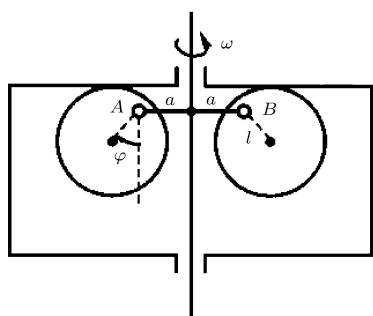


图 1 机械式调速器示意图

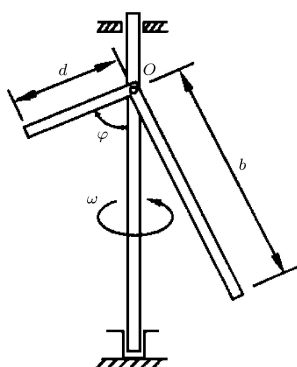


图 2 达朗贝尔原理的例题示意图

的关系，此结果在教学中有一定的参考价值。

### 1 问题的提出

匀质杆  $AB$  长为  $l$ ，质量为  $m$ ，以等角速度  $\omega$  绕铅垂轴  $z$  转动，如图 3(a) 所示。试求杆与铅垂线的夹角  $\beta$  及铰链  $A$  的动约束力。此类题多出现在理论力学的达朗贝尔原理章节中，沿用多年。在一般情况下其答案为：

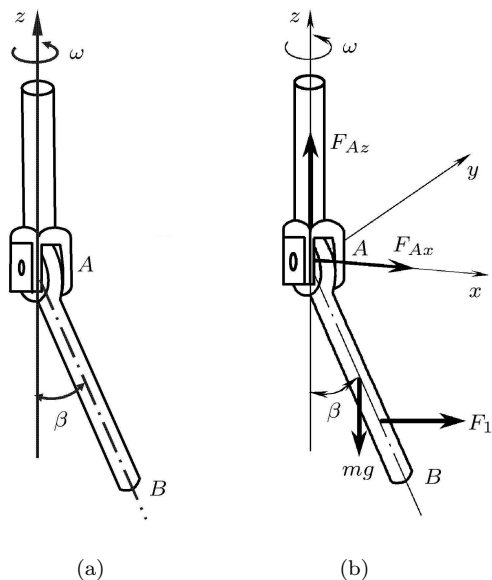


图 3 机械结构及受力图

以  $AB$  杆为研究对象，其受力图如图 3(b) 所示，其惯性力为 [3]

$$F_1 = \frac{ml\omega^2 \sin \beta}{2}$$

由达朗贝尔原理

$$\begin{aligned} \sum M_{Ay}(F) &= 0 \\ -\frac{2F_1 l \cos \beta}{3} + \frac{mgl \sin \beta}{2} &= 0 \\ \sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_1 &= 0 \\ \sum F_z = 0, \quad F_{Az} + mg &= 0 \end{aligned}$$

计算得

$$\begin{aligned} \beta &= \arccos\left(\frac{3g}{2l\omega^2}\right) \\ F_{Ax} &= -\frac{m\omega^2 \sin \beta}{2} \\ F_{Az} &= mg \end{aligned}$$

但在此题意中，并没有确定夹角是固定不变的，并且从约束上来讲，物体是可以围绕柱铰链转动的，此解法只得到了人为认为夹角不变条件下的结果，并不完全符合动力学规律，那么还有别的答案吗？

### 2 问题的解答

取细杆  $AB$  为研究对象。因细杆绕柱铰链  $A$  运动，并随铅直轴一起转动，严格来说，它是一个空间动力学问题，因此，可用一般动力学方法求解。为此建立如图 4(a) 所示的细杆的连体坐标系  $Ax'y'z'$ ，显然该坐标系就是细杆在点  $A$  处的惯性主轴坐标系，

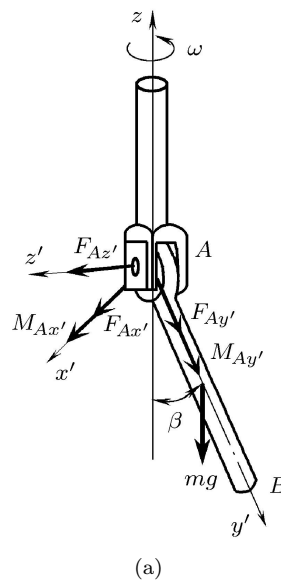


图 4 受力图及运动示意图

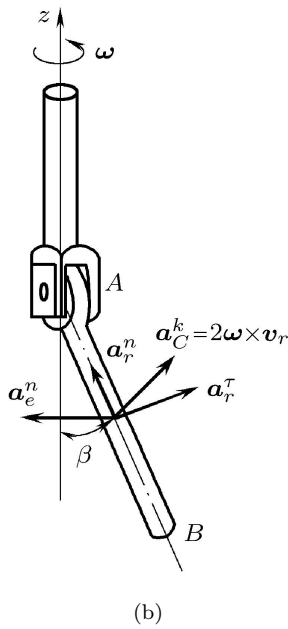


图4 受力图及运动示意图(续)

细杆对轴  $Ax'$ ,  $Ay'$  和  $Az'$  的转动惯量分别为

$$I_{x'} = I_{z'} = \frac{1}{3}ml^2, \quad I_{y'} = 0 \quad (1)$$

根据刚体运动学, 细杆的绝对角速度、绝对角加速度分别为<sup>[4]</sup>

$$\boldsymbol{\Omega} = -\omega \sin \beta \mathbf{i}' - \omega \cos \beta \mathbf{j}' + \dot{\beta} \mathbf{k}' \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\omega \cos \beta \cdot \dot{\beta} \mathbf{i}' + \omega \sin \beta \cdot \dot{\beta} \mathbf{j}' + \ddot{\beta} \mathbf{k}' \quad (3)$$

在细杆质心  $C$  点的加速度矢量图如图 4(b) 所示, 细杆的质心加速度为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= (-a_r^\tau + a_e^n \cos \beta) \mathbf{i}' + (-a_r^n - a_e^n \sin \beta) \mathbf{j}' + \\ &(-2\omega v_r \cos \beta) \mathbf{k}' = \\ &(a_r^\tau \cos \beta - a_r^n \sin \beta - a_e^n) \mathbf{i} + (2\omega v_r \cos \beta) \mathbf{j} + \\ &(a_r^\tau \sin \beta + a_r^n \cos \beta) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} a_r^\tau &= \frac{1}{2}l\ddot{\beta}, \quad a_r^n = \frac{1}{2}l\dot{\beta}^2 \\ a_e^n &= \frac{1}{2}l\omega^2 \sin \beta, \quad v_r = \frac{1}{2}l\dot{\beta} \end{aligned} \quad (5)$$

细杆的受力图如图 4(a) 所示, 其中  $F_{x'}$  和  $F_{y'}$  分别表示柱铰链  $A$  的约束力沿轴  $Ax'$  和  $Ay'$  方向的两个正交分量,  $M_{x'}$  和  $M_{y'}$  分别表示柱铰链  $A$  的动约束力偶沿轴  $Ax'$  和  $Ay'$  方向的正交分量.

刚体的一般运动微分方程为

$$m\mathbf{a}_C = \sum \mathbf{F} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} I_{x'}\varepsilon_{x'} + (I_{z'} - I_{y'})\omega_{z'}\omega_{y'} &= M_{x'} \\ I_{y'}\varepsilon_{y'} + (I_{x'} - I_{z'})\omega_{x'}\omega_{z'} &= M_{y'} \\ I_{z'}\varepsilon_{z'} + (I_{y'} - I_{x'})\omega_{y'}\omega_{x'} &= M_{z'} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将式 (1) ~ 式 (3) 代入式 (7), 将式 (4)、式 (5) 代入式 (6) 得

$$\left. \begin{aligned} m\left(-\frac{1}{2}l\ddot{\beta} + \frac{1}{2}l\omega^2 \sin \beta \cos \beta\right) - mg \sin \beta &= F_{x'} \\ m\left(-\omega l\dot{\beta} \cos \beta\right) &= F_{y'} \\ m\left(-\frac{1}{2}l\dot{\beta}^2 - \frac{1}{2}l\omega^2 \sin^2 \beta\right) - mg \cos \beta &= F_{y'} \\ -\frac{2}{3}ml^2\omega\dot{\beta} \cos \beta &= M_{Ax'} \\ M_{Ay'} &= 0 \\ \frac{1}{6}ml(2l\ddot{\beta} - l\omega^2 \sin 2\beta + 3g \sin \beta) &= M_{Az'} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

即为细杆的动力学方程. 这是一个非线性方程组, 只有给了初始条件才能利用式 (8) 中最后一个方程求出夹角值  $\beta$  的变化规律, 然后将其结果代入其他方程才能求出约束力  $F_{x'}$ ,  $F_{y'}$ ,  $F_{z'}$ ,  $M_{Ax'}$ .

将结果变换到  $Axyz$  坐标系则得

$$\begin{aligned} m\left(\frac{1}{2}l\ddot{\beta} \cos \beta - \frac{1}{2}l\dot{\beta}^2 \sin \beta - \frac{1}{2}l\omega^2 \sin \beta\right) &= F_{Ax} \\ m\omega l\dot{\beta} \cos \beta &= F_{Ay} \\ m\left(\frac{1}{2}l\dot{\beta} \sin \beta + \frac{1}{2}l\dot{\beta}^2 \cos \beta + g\right) &= F_{Az} \\ \frac{2}{3}ml^2\omega\dot{\beta} \cos^2 \beta &= M_{Ax} \\ \frac{2}{3}ml^2\omega\dot{\beta} \cos \beta \sin \beta &= M_{Az} \\ \frac{1}{6}ml(2l\ddot{\beta} - l\omega^2 \sin 2\beta + 3g \sin \beta) &= 0 \end{aligned}$$

从而可以看出,  $\ddot{\beta}$ ,  $\dot{\beta}$  对  $F_{Ax}$ ,  $F_{Ay}$ ,  $F_{Az}$ ,  $M_{Ax}$  和  $M_{Az}$  等约束力的影响, 只有当  $\ddot{\beta} = \dot{\beta} = 0$  时, 才能得

$$\begin{aligned} \beta &= \arccos\left(\frac{3g}{2l\omega^2}\right) \\ F_{Ax} &= -\frac{m\omega^2 \sin \beta}{2}, \quad F_{Az} = mg \end{aligned}$$

此结果与前面的结果相同, 这说明在此题目的计算中, 强调初始条件  $\ddot{\beta} = \dot{\beta} = 0$  是非常必要的. 但是, 严格来说, 它受到微干扰后, 此条件很难保证实现, 作为机械调速器还主要是利用角度  $\beta$  的位置变化调整主轴的转速. 若考虑主轴转速的变化, 这将是一

个更为复杂的问题. 所以, 在理论力学的达朗贝尔原理教学中, 应用如图 5 所示类型的题目求解相应位置的约束力比较好, 既达到了练习达朗贝尔原理的作用, 还澄清了其他一些不确定性因素对约束力的影响.

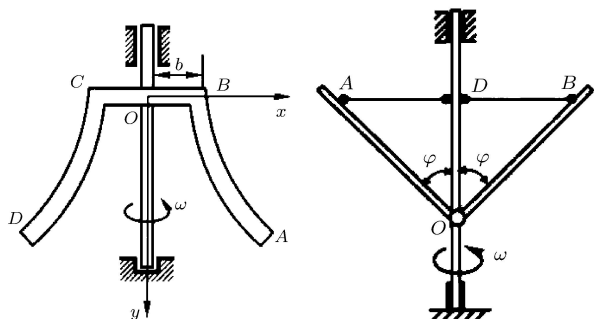


图 5 结构示意图

### 3 结论

在理论力学教学中, 这类动力学问题是一个很复杂的问题, 在教学过程中, 对于此类问题, 可选以下建议之一: (1) 选用如图 5 所示结构; (2) 在题目中附加  $\beta$  为固定值不变的条件; (3) 指出  $\beta$  可以变化, 让学生进行独立思考, 开拓学生的解题思路.

### 参考文献

- 1 贾启芬, 刘习军, 王春敏. 理论力学. 天津: 天津大学出版社, 2003
- 2 哈尔滨工业大学编. 理论力学 (第 6 版). 北京: 高等教育出版社, 2002
- 3 贾启芬, 刘习军. 理论力学辅导与习题解答. 北京: 机械工业出版社, 2012
- 4 张劲夫, 秦卫阳. 高等动力学. 北京: 科学出版社, 2004

(责任编辑: 胡 漫)

## 关于征集中国力学学会老照片和 开展《我与中国力学学会》征文活动的通知

2017 年中国力学学会将迎来 60 周岁的生日. 峥嵘岁月六十载, 春华秋实铸辉煌. 为生动刻画中国力学学会的发展历程, 展现学会全貌, 重拾难忘回忆, 中国力学学会现面向学会全体会员、广大科技工作者开展老照片征集和《我与中国力学学会》征文活动. 有关事项如下:

### 征集内容

#### 一、老照片

- 1、中国力学学会成立初期的理事会照片;
- 2、1978 年全国力学学科规划会议照片;
- 3、早期的分支机构学术活动照片, 特别是 1980s 以前的学术活动照片、期刊编委会照片等;
- 4、其他您认为能反映学会历史的照片.

#### 二、《我与中国力学学会》征文

- 1、讲述自己在参与力学学会发展中的真实经历、亲身感受;
- 2、客观真实地回顾自己参与或见证中国力学学会 60 年来的重大事件、重要活动和取得的可喜进步和成绩;
- 3、记录自己与学会一起成长的发展历程.

### 征集时间和跨度

征集截止时间: 2016 年 12 月 31 日

征集时间跨度: 学会 1957 年成立至今

### 征集方式

- 1、老照片请提供照片电子版或纸版, 请注明提供者

姓名、联系电话, 并简单介绍图片内容, 包括时间、地点、人物、时间等; 图片不便寄送、或因年事已高不便处理图片的老同志, 可通过电话联系相关工作人员商谈取片、翻拍事宜. 照片一经选用, 学会将向提供者支付相应稿酬, 赠送纪念画册等.

2、征文请将电子文档 (word 格式) 发送到 liuyang@cstam.org.cn, 邮件主题请设为“我与力学学会征文”. 文章题目自拟, 作品体裁不限, 每篇征文字数限 6000 字以内. 请提供 150 字以内的作者简介, 同时标明作者姓名、性别、工作单位、职务、通信地址、邮政编码、联系电话、电子邮箱等相关信息.

要求征文稿件未正式公开发表过. 入选文章将从 2017 年 1 月起在《力学与实践》和中国力学学会专题网站上陆续刊发.

期待您把最经典回忆传至我们的邮箱

联系人: 刘洋

邮寄地址: 北京市北四环西路 15 号, 中国力学学会办公室 (100190)

联系电话: 010-82543903 邮箱: liuyang@cstam.org.cn