第六章 光的衍射

（ Diffraction of light）

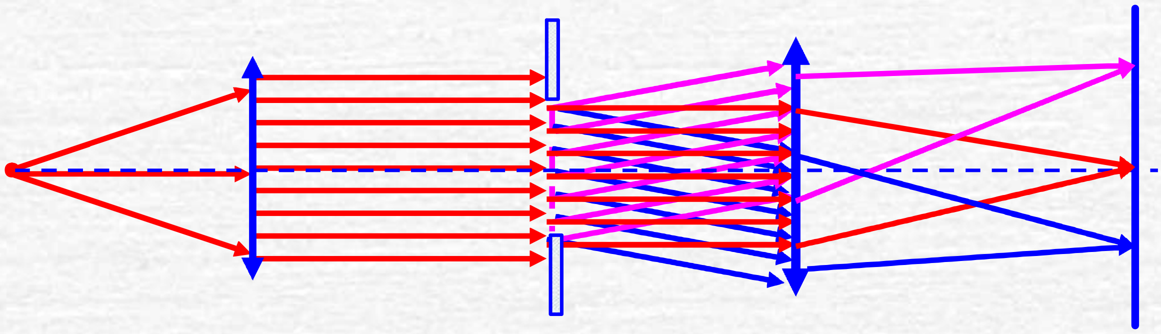
§6.7 夫琅禾费单缝衍射

Fraunhofer Single Slot Diffraction

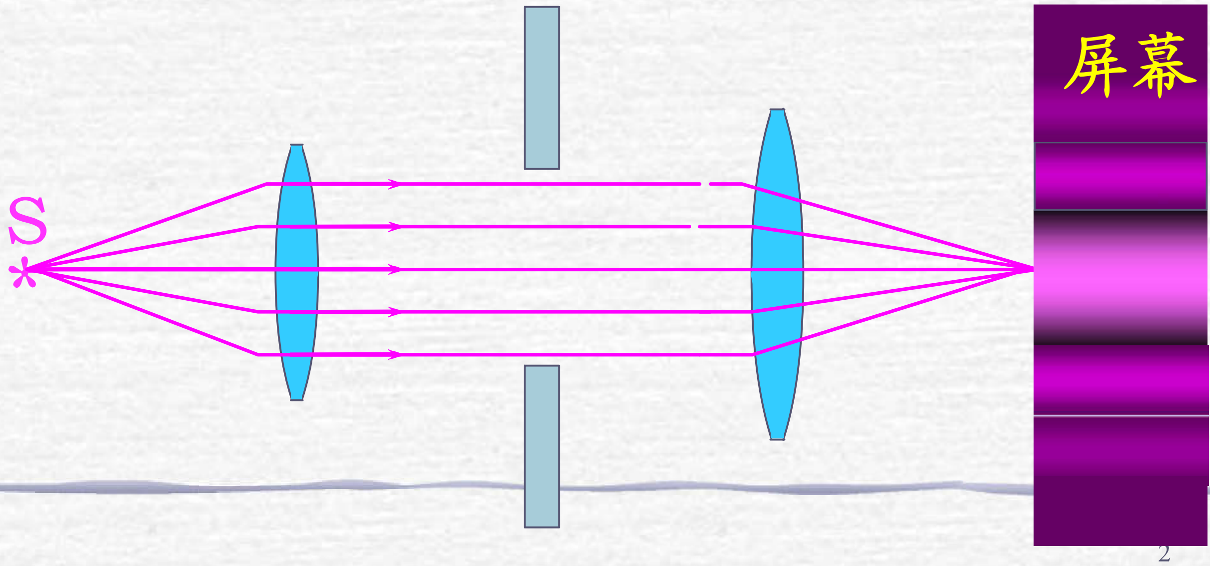
一、夫琅禾费单缝衍射

1. 实验装置

所谓夫郎禾费衍射是指光源、衍射屏和观察屏三者之间都是相距无限远的情况。即相当于入射光和衍射光都是平行的情况。具体的实验装置如图：



单缝夫琅禾费衍射的衍射图样：



衍射图样主要规律如下：

（1）中央亮纹最亮，其宽度是其他亮纹的两倍；其他亮纹的宽度相同（亮纹中心的位置如图），亮度逐渐下降.

(2)缝宽度b越小，条纹越宽（即衍射越厉害）.

(3)波长λ越大，条纹越宽（即有色散现象).

2. 衍射光强分布公式:

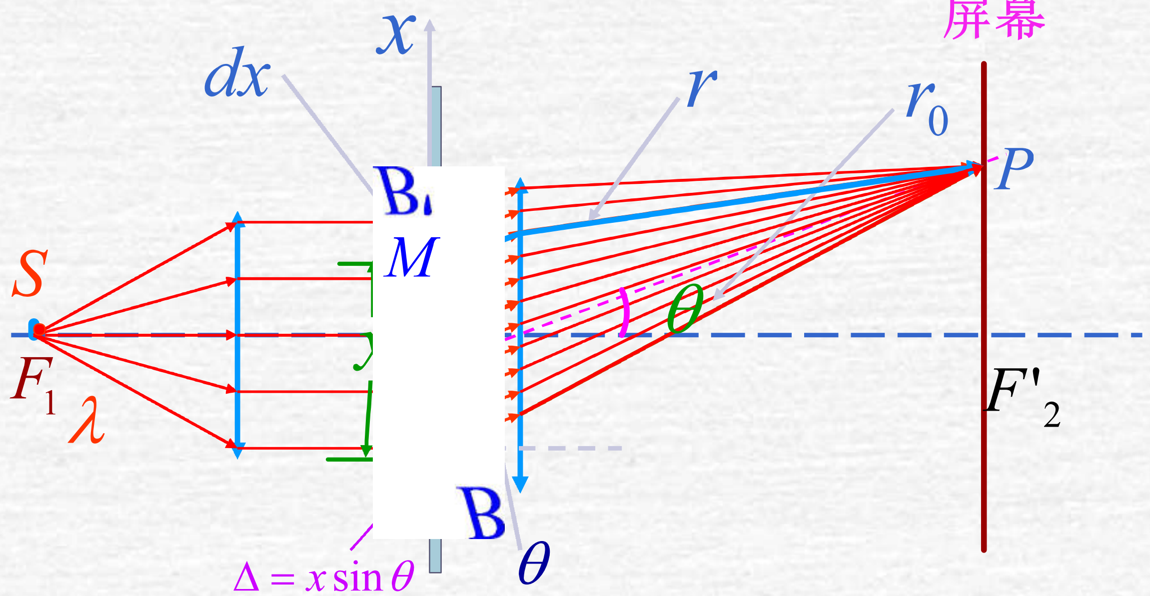
为了计算衍射场中任一点P 的强度，设平行光束垂直于缝的平面入射，波面与缝平面重合。

按惠更斯—菲涅耳原理，把缝内的波面分割为许多等宽的窄条**dx**，从每一条窄带发出的次波的振幅正比于窄带的宽度**dx**，设光波的初相位为**0**，缝宽为**b**，A_0为整个狭缝所发出的次波在θ＝0° 的方向上的合振幅，狭缝单位宽度发出次波的振幅为A_0/b。而宽度为**dx**窄带所发出的次波的振幅为$A_0\,dx/b$，则振动表达式为

$$dE_0 = \frac{A_0 dx}{b}\cos \omega t$$

这些次波都可认为是球面次波，各自向前传播。

首先对其中传播方向与原入射方向成θ角（称为衍射角）的所有各次波进行研究。



M点与**B**点到达**P**点的光程差为 $\Delta = x\sin\theta$

相位差为： $\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda} x\sin\theta$

则M点的次波到达P点的光振动的表达式为：

$$dE=\frac{A_0dx}{b}\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)$$

或
$$dE=\frac{A_0dx}{b}e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta-\omega t\right)}$$

其复振幅为
$$d\tilde{E}=\frac{A_0dx}{b}e^{i\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta}$$

为简化计算，上式中假设各次波到达P点时有相同的振幅（不考虑振幅与光程成反比的关系及倾斜因子）。

则P点的合振幅为：

$$\widetilde{E}_{(P)} = \frac{-i}{\lambda r_0} \iint_{\Sigma} {}_0^b \frac{A_0}{b} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} x \sin\theta} dx \quad = \widetilde{A}_0 \frac{\sin u}{u},$$

其中 $$u = \frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}$$

因此，P点的光强为

$$I_P = \widetilde{E}_P \times \widetilde{E}^*{}_p \quad \boxed{= A_0^2 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2} \quad = I_0 \sin c^2 u$$

此即为单缝夫琅禾费衍射的光强分布公式。

3. 单缝衍射图样的特点

由单缝衍射光强分布公式可得

$$\frac{I}{I_0}=\boxed{\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2}$$

—称为单缝衍射因子

$$\frac{dI}{du}=A_0\frac{d}{du}\left(\frac{\sin^2 u}{u^2}\right)=0 \qquad u=\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}$$

（1）主最大（中央亮纹中心）位置：

在 $\theta=0$处，$u=0\rightarrow\frac{\sin u}{u}=1\rightarrow I=I_0=I_{\max}$

中央最大值的中心位置在$\theta_0=\mathbf{0}°$处，即透镜焦点$\mathbf{P_0}$处。

最大光强为 $I_{p_0}=A_0^2$

此处，各次波相位差为**0**，干涉彼此相长。

中央最大值的位置即为几何像点的位置，是一条亮线。但从波动光学的角度看光线会聚于一点，未必产生很大的光强，还需要看各光线的相位关系。这说明对应于几何像点处各光线具有相同的相位，从而产生最大的光强。

(2) 最小（暗纹）位置：

令 ***sinu=0*** ，***u≠0***，则得 ***I=0***，光强为最小值。

即 $u = \pm k\pi$，$k = 1,2,3\cdots$时，光强为最小值。

由 $u_k = \pi b \sin\theta_k / \lambda = k\pi$ 得

光强最小值的角位置：$\boxed{\sin\theta_k = k\dfrac{\lambda}{b}}$ $(k = \pm 1, \pm 2 \pm 3\cdots)$

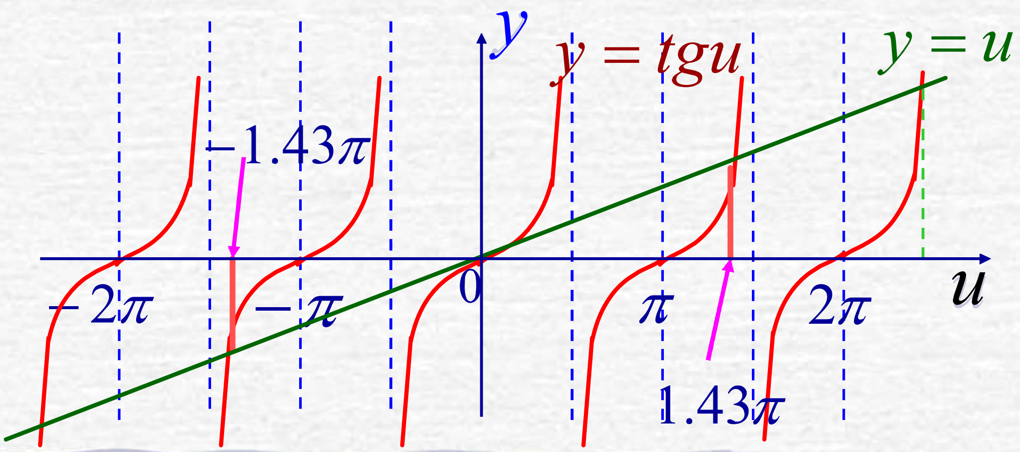
（3）次最大的位置

在每两个相邻最小值之间有一次最大值。

次最大出现在： $\dfrac{d\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)}{du}=0$ 的位置上。

它们是超越方程 $u=tgu$ 的解

作图求解



解得 $u=\pm1.43\pi,\pm2.46\pi,\pm3.47\pi,\cdots$

即 $\sin\theta_{10}=\pm1.43\frac{\lambda}{b}\approx\pm\frac{3}{2}\frac{\lambda}{b}$ $\sin\theta_{20}=\pm2.46\frac{\lambda}{b}\approx\pm\frac{5}{2}\frac{\lambda}{b}$

$\sin\theta_{30}=\pm3.47\frac{\lambda}{b}\approx\pm\frac{7}{2}\frac{\lambda}{b}\ldots\ldots$

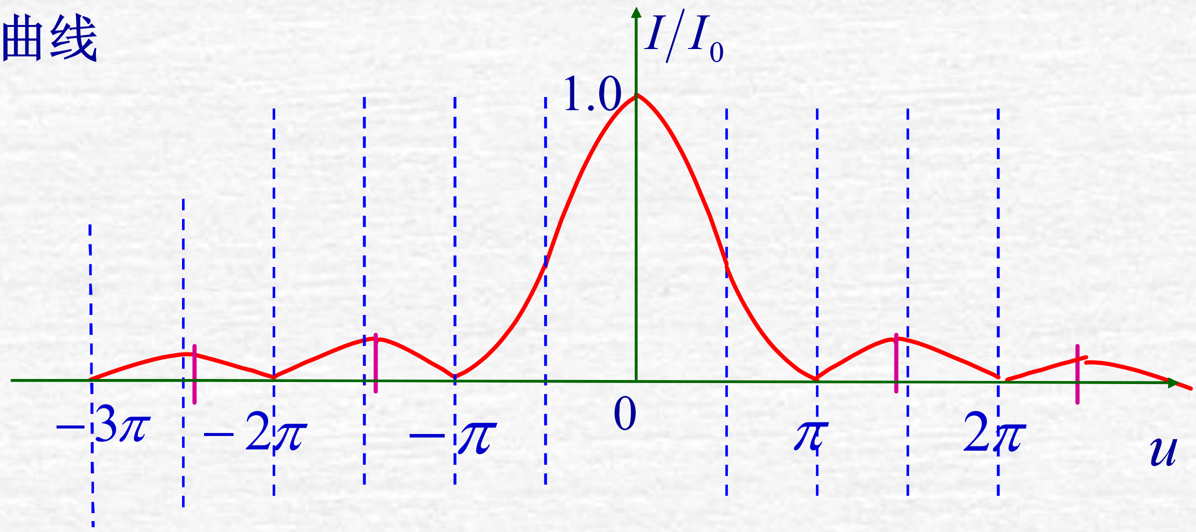
次最大光强的角位置近似为：$\sin\theta_{k0}\approx\pm\frac{2k+1}{2}\frac{\lambda}{b}$

各次最大的光强为：

$$I_{10}=0.0472I_0 \qquad I_{20}=0.0165I_0 \qquad I_{30}=0.0083I_0$$

可见，衍射级次越高，光强就越小。次最大的光强最大不到中央最大值的***1/20***，并且随着级数的增加而很快减小。

光强曲线



(4) 亮纹的角宽度

规定以相邻暗纹的角距离作为其间条纹的角宽度。

在近轴条件下，θ很小，$\sin\theta \approx \theta$，由暗纹的角位置公式

$$\sin\theta \approx \theta = k\frac{\lambda}{b}$$

则，中央亮纹在$\theta = \pm\lambda/b$，之间，其半角宽度为：

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{\lambda}{b}} \quad \text{或} \quad \Delta\theta\, b = \lambda$$

半线宽度为：

$$\Delta\ell = f'_2\, tg\Delta\theta \approx f'_2\frac{\lambda}{b}$$

次最大（高级亮纹）的角宽度为：

$$\Delta\theta' = (k+1)\frac{\lambda}{b} - k\frac{\lambda}{b} = \frac{\lambda}{b} = \Delta\theta$$

由此可见，中央亮纹的角宽度是其次最大角宽度的两倍。

(5) 衍射反比律

由中央最大值的半角宽度公式：

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{\lambda}{b}}$$

当$b\uparrow$，$\Delta\theta\downarrow$；当$b \gg \lambda$时，$\Delta\theta \to 0$

此时，可以认为衍射图样压缩成为一条亮线。相当于光源经L_2所成的像（无衍射屏时）。

由此可见，障碍物使光强偏离几何光学规律的程度，可以用中央最大值的半角宽度来衡量。

当b>>λ时，$\Delta\theta \to 0$，衍射现象可以忽略不及，光线基本上沿着几何光学直线传播的规律进行。波动光学过渡到几何光学。

反之，λ越大或b越小，衍射现象就越显著。

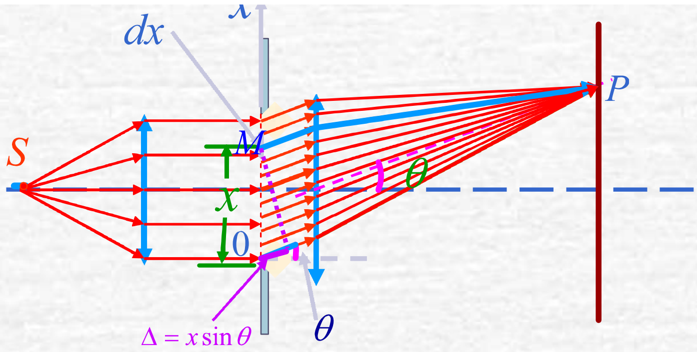
$$\boxed{\Delta\theta = \frac{\lambda}{b}}$$

—称为衍射反比律

它包含着深刻的物理意义：它反映了障碍物与光波之间限制和扩张的辩证关系，限制越甚，扩张越显著，在哪个方向上限制，就在该方向上扩展。

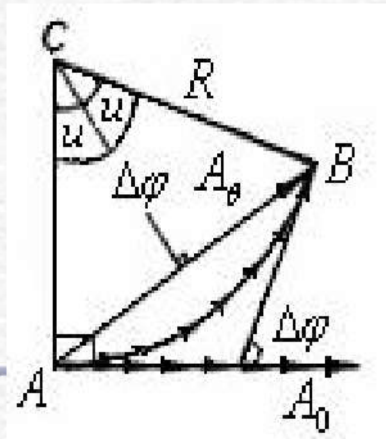
4. 问题讨论

（1）振幅矢量法推导衍射光强公式

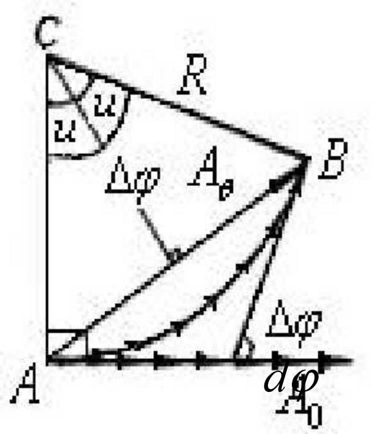


设*P*点相干叠加的各子波振幅相等，相位依次差 $d\varphi$，若用矢量长度表示微带振幅，相邻两矢量间的夹角表示相位差 $d\varphi$，可知*P*点的合振幅就有一系列长度相等、方向依次差 $d\varphi$ 的矢量首尾相接得到。

假设每个微带无限窄，即 $dx \to 0$ ，则矢量图中的折线变为圆弧



C是圆弧的圆心，***R***为其半径，弧两端切线间的夹角就是单缝两边缘的微带到***P***点的相位差 $\Delta\varphi$，则由单缝两边缘的微带到***P***点的光程差 $\Delta = b\sin\theta$ 可知：



相位差 $\Delta\varphi = 2\pi b\sin\theta/\lambda$

对应的弦长 $\overline{AB}$ 就是***P***点的合振幅 A_θ

显然 $A_\theta = \overline{AB} = 2R\sin u$

- 例题：波长 $\lambda = 632.8nm$ 的氦氖激光垂直投射到缝宽 b = 0.0209nm的狭缝上。现有一焦距 $f' = 50cm$ 的凸透镜置于狭缝后，试求：（1）由中央亮条纹的中心到第一级暗纹的角距离为多少？（2）在透镜的焦平面上观察到的中央亮纹的线宽度是多少？

解：根据单缝衍射的各级最小值的位置：

$$b\sin\theta_k = k\lambda \qquad (k = \pm1、\pm2、\pm3\cdots)$$

$$\text{可知:}\sin\theta_k = k\frac{\lambda}{b}$$

所以

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{b} = \frac{632.8\times10^{-7}cm}{2.09\times10^{-3}cm} \approx 0.03rad$$

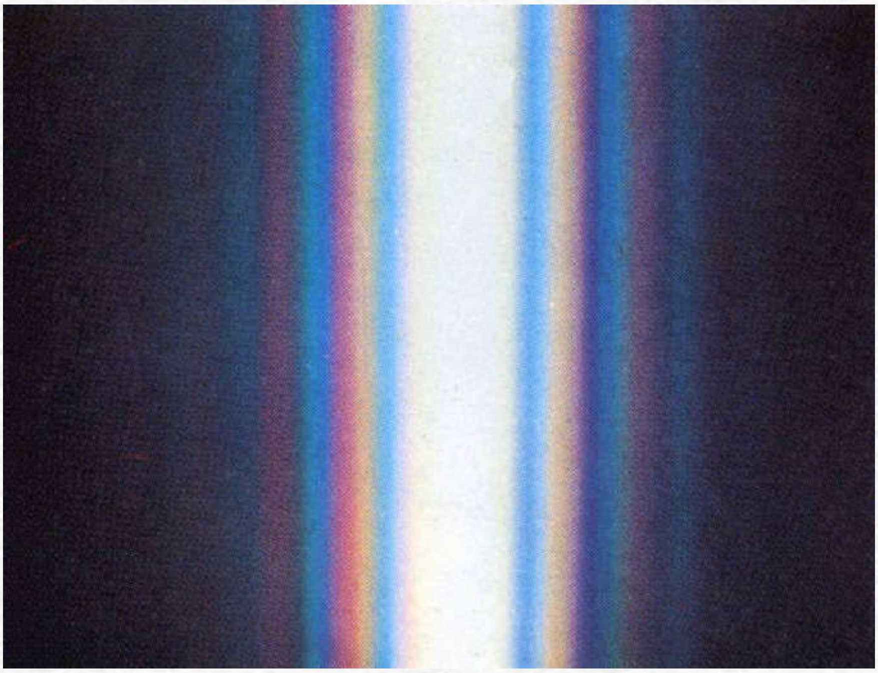
$$\sin\theta_1 \approx \theta_1 \approx 0.03rad = 1^\circ 42'$$

由于角距离很小，故第一级暗纹到中央亮纹中心的距离为

$$y' = f'\tan\theta_1 \approx 50cm\times0.03rad = 1.5cm$$

所以中央亮纹中心的宽度为

$$y = 2y' = 2\times1.5\text{cm}＝3\text{cm}$$



本节结束