

# 第六章 光学仪器的基本原理

## ( Principles of Optical Instruments )

### § 6.9 分光仪器的色分辨本领

#### Resolution Capability of spectrometers

能够将复色光按波长进行分解而获得光谱的仪器称为**分光仪器**，又叫**光谱仪**。

若用棱镜作为分光元件，则称为**棱镜光谱仪**。

若用光栅作为分光元件，则称为**光栅光谱仪**。

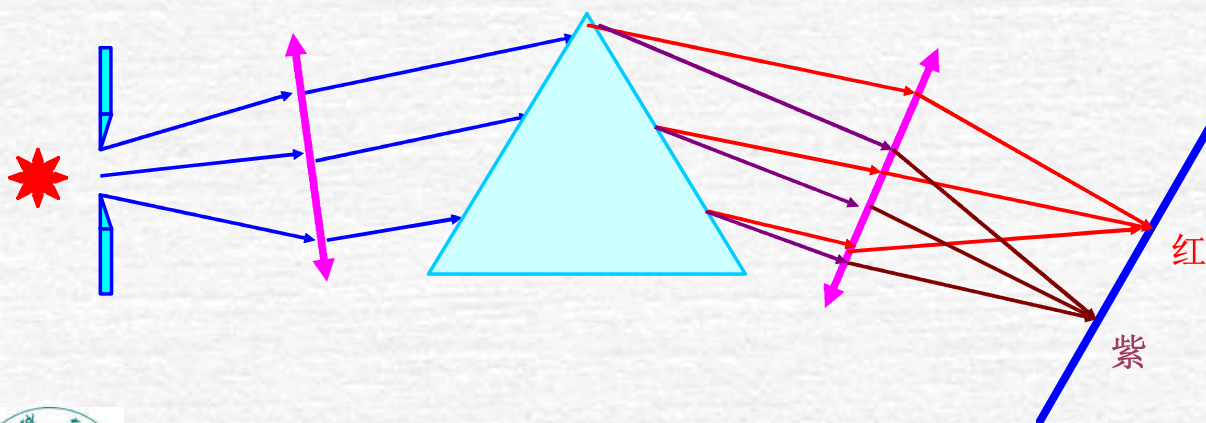


聊城大学

物理科学与信息工程学院

## 一. 棱镜光谱仪

从几何光学的观点来看，棱镜光谱的每一条谱线都是光源的像，分光是由于棱镜材料的色散使不同的波长的偏向角不同造成，其光路图如图所示。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

## 1. 棱镜的角色散率

棱镜的角色散率等于偏向角对波长的偏微商：

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} \quad \text{单位: } \text{rad/nm}$$

若波长 $\lambda$ 与 $\lambda + \Delta\lambda$ 的两条谱线的偏向角分别为 $\theta$ 与 $\theta + \Delta\theta$ ，则

$$\Delta\theta = D\Delta\lambda$$

通常棱镜光谱仪将棱镜安装在接近于产生最小偏向角的位置使用。则

$$n = \frac{\sin \frac{\theta_0 + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

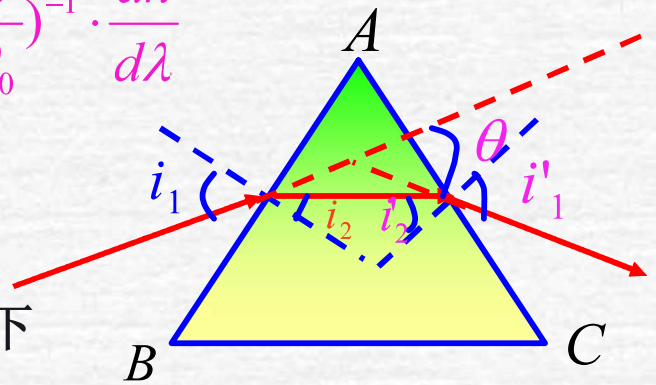


聊城大学

物理科学与信息工程学院

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{d\theta_0}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \left(\frac{dn}{d\theta_0}\right)^{-1} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

而 
$$\frac{dn}{d\theta_0} = \frac{\cos \frac{A+\theta_0}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}}$$



如图，在最小偏向角的条件下

$$i_2 = i'_2 = \frac{A}{2} \quad i_1 = i'_1 = \frac{A + \theta_0}{2}$$

由折射定律，则

$$\cos \frac{A + \theta_0}{2} = \cos i_1 = \sqrt{1 - \sin^2 i_1}$$

$$= \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_2} = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}}$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

因此

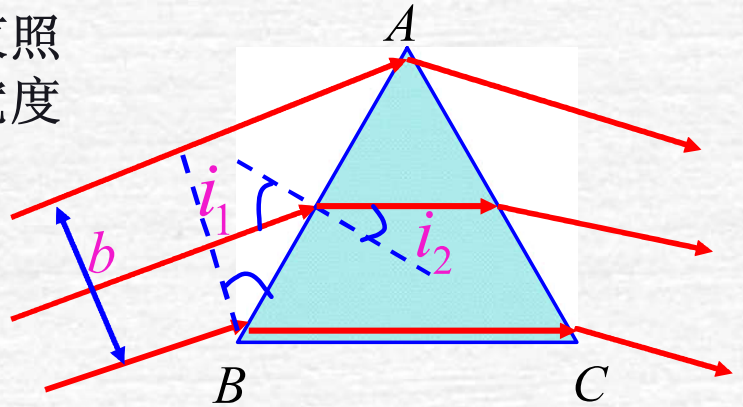
$$D = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \frac{dn}{d\lambda}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}}}$$

可见， $n$ 越大，则 $D$ 越大； $dn/d\lambda$ 越大， $D$ 也越大。

设入射到棱镜上的光束照满整个棱镜，光束的宽度为**b**，如图

$$\cos i_1 = \frac{b}{AB}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sin i_2 = \frac{BC}{2AB}$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

令  $BC = \delta$  为棱镜底边的长。则

$$\frac{dn}{d\theta_0} = \frac{\cos \frac{A+\theta_0}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} = \frac{\cos i_1}{2 \sin i_2} = \frac{b}{\delta}$$

因此

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\delta}{b} \frac{dn}{d\lambda}$$

棱镜的线色散定义为：

$$D_L = \frac{dL}{d\lambda} = f' D = f' \frac{\delta}{b} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 f' \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} \frac{dn}{d\lambda}$$

它表示单位间隔波长差的两条谱线在光屏上分开的距离。

## 2. 色分辨本领

两波长相差很小的谱线能否被分辨是光谱仪器的另一重要性质（参量）。角色散率只能给出两条谱线中心分开的程度，它不能说明两条谱线是否重叠，是否能被分辨开。因为谱线能否被分辨还取决于谱线本身的宽窄程度。

引入色分辨本领的概念：

设波长在 $\lambda$ 附近的谱线能够被分辨的最小的波长差为 $\Delta\lambda$ ，则光谱仪的色分辨本领定义为：

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

当一束平行光射到棱镜上时，棱镜对光束的限制作用相当于一个矩形孔，其宽度为光束的宽度**b**，因此，必然要发生单缝衍射，其零级中央最大值的半角宽度，即谱线的半角宽度为：

$$\theta_1 \approx \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{b}$$

根据瑞利判据，波长 $\lambda$ 和 $\lambda + \Delta\lambda$ 两条谱线能被分辨的条件为两条谱线间分开的角距离 $\Delta\theta$ 至少应等于谱线的半角宽度 $\theta_1$ ，即

$$\Delta\theta = \theta_1 = \frac{\lambda}{b}$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院



$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}$$

$$\Delta\theta = D\Delta\lambda$$

则

$$\Delta\theta = D\Delta\lambda = \frac{\lambda}{b}$$

因此

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = bD = \delta \frac{dn}{d\lambda}$$

由上式可见，当棱镜材料一定时，色分辨本领取决于棱镜底边的宽度，与顶角无关。

棱镜材料的折射率随波长变化， $dn/d\lambda$ 一般是一条曲线，因而不同波段，相同间隔的 $\Delta\lambda$ ， $\Delta\theta$ 不同，因而称这种光谱为非匀排光谱。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

## 二. 光栅光谱仪

### 1. 角色散率

定义式:

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

由光栅方程

$$d \sin \theta = k\lambda$$

两边微分得:

$$d \cos \theta d\theta = kd\lambda$$

因此

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \theta}$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

对于光栅的第一、第二级光谱的衍射角 $\theta$ 很小，同一级中， $D$ 近似为常量，与 $\lambda$ 无关，谱线间的 $\Delta\theta$ 近似地正比于波长差 $\Delta\lambda$ ，这种光谱称为匀排光谱。

$D$ 与 $N$ 无关.与 $d$ 成反比,  $d$ 越大角色散越小,  $d$ 越小角色散越大. $D$ 还与 $k$ 成正比, 对于给定的光栅, 级次越高,  $D$ 越大, 不同波长的谱线分得越开, 但是, 级次越高, 谱线的强度越弱。

作为分光元件, 角色散率大了好, 谱线散开得宽, 有利于分光. 但散开太大, 会造成越级(或重级)。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

## 2. 自由光谱范围

不同级次的谱线重叠的现象叫越级(或重级).

如果 $\lambda + \Delta\lambda$ 的 $k$ 级谱线恰与 $\lambda$ 的 $k+1$ 级谱线相重时, 则 $k$ 级光谱恰好不与别的级次的光谱相重. 此时的 $\Delta\lambda$ 为 $k$ 级的自由光谱范围, 称为 $\Delta\lambda_{\text{自}}$ .

$$\begin{cases} d \sin \theta = (k+1)\lambda, \\ d \sin \theta = (\lambda + \Delta\lambda_{\text{自}})k. \end{cases}$$

由上两式解得

$$\lambda(k+1) = (\lambda + \Delta\lambda_{\text{自}})k,$$

$$\Delta\lambda_{\text{自}} = \frac{\lambda^2}{d \sin \theta}.$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

### 3. 色分辨本领 R

角色散率的物理意义是主极大散开的程度. 可能  $\lambda$  和  $\lambda+\Delta\lambda$  的某一级主极大散得很开, 却分不开.

光栅光谱的每一条谱线都具有一定的宽度: 其半角宽度为:

$$\Delta\theta_1 = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$$

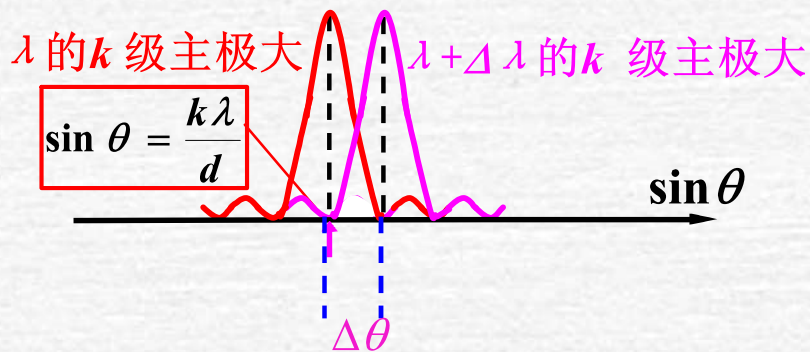


聊城大学

物理科学与信息工程学院

按瑞利判据： $\lambda$  和  $\lambda + \Delta\lambda$  的第  $k$  级谱线刚刚能分辨时， $\lambda$  的第  $k$  级主极大，应与  $\lambda + \Delta\lambda$  的第  $k$  级主极大边缘（极小）重合。

$$\Delta\theta = \Delta\theta_1$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

因此，光栅的色分辨本领应满足：

即 
$$\frac{k\Delta\lambda}{d \cos \theta} = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$$

则光栅的色分辨本领为：

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$$

可见，增加光栅的总缝数 $N$ ，将使 $R$ 增大，因为 $N$ 增大使谱线变细锐。级次越高，则 $R$ 也越大，因为较高级次的光谱具有加大的角色散率 $D$ 。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

### 例题4.5 P299

用一宽度为5cm的平面透射光栅分析钠光谱，钠光垂直投射在光栅上。若需在第一级分辨波长分别为589nm和589.6nm的钠双线，试求：

- (1) 平面光栅所需的最小缝数应为多少？
- (2) 钠双线第一级最大之间的角距离为多少？
- (3) 若会聚透镜的焦距为1m，其第一级线色散率为多少？

解：（1）由光栅的色分辨本领公式：

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院



可知光栅的总缝数为：

$$N = \frac{R}{k} = \frac{\lambda}{k\Delta\lambda} = \frac{(589 + 589.6) / 2}{1 \times 0.6} = 982$$

故光栅所需的最小缝数为**982**条。

(2) 由光栅的角色散率公式：

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \theta}$$

$$\Delta\theta = \frac{k}{d \cos \theta} \Delta\lambda = \frac{k}{d \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \Delta\lambda$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

由光栅方程可得：

$$\sin \theta = \frac{k\lambda}{d}$$

已知光栅的宽度为  $w=5\text{cm}$ ，总缝数为  $N=982$  条，  
则光栅常数为：

$$d = \frac{w}{N} = 5.0916 \times 10^4 \text{ nm}$$

对于第一级：

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d} = 0.016$$

$$\Delta \theta = \frac{k}{d \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \Delta \lambda$$

$$= \frac{0.6}{5.0916 \times 10^4 \sqrt{1 - (0.016)^2}} = 1.178 \times 10^{-5} \text{ rad}$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

(3) 线色散率为:

$$D_l = f' \frac{d\theta}{d\lambda} = f' \frac{k}{d \cos \theta} = 0.0196 \text{ mm/nm}$$

**例题2:** 设计一光栅, 当用白光垂直照射时, 能在  $30^\circ$  的衍射方向上观察到  $600 \text{ nm}$  的第二级干涉主极大, 并在该处分辨相距  $\Delta\lambda=0.005 \text{ nm}$  的两谱线, 可在  $30^\circ$  衍射方向上看不到  $400 \text{ nm}$  的第三级干涉主极大.

解: 在  $30^\circ$  方向上看到  $600 \text{ nm}$  的第二级主极大,

由光栅方程 
$$d \sin \theta = k\lambda,$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

将  $k = 2$ ,  $\lambda = 600nm$  代入得

$$d = 2400nm,$$

要求在该处可分辨600和600.005nm 的两谱线,  
即要求分辨本领

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{600}{0.005} = 1.2 \times 10^5.$$

因  $R = kN$ , 所以  $N = 6 \times 10^4$ .

即所设计的光栅至少有  $6 \times 10^4$  条狭缝, 光栅  
宽为  $w = Nd = 14.4cm$  .



聊城大学

物理科学与信息工程学院

现在来确定  $a$  和  $b$  .

因  $2 \times 600 = 3 \times 400,$

所以, 600nm的第2级与400nm的第三级干涉极大在一个衍射方向上. 要使400 nm的极大不出现, 必须把的3级干涉极大调制掉. 因此取  $d/b=3,$  即

$$\frac{a+b}{b} = 3, \quad a+b = d,$$

解得  $b = 800nm, \quad a = 1600nm.$

光栅设计完毕.



聊城大学

物理科学与信息工程学院



聊城大学 物理科学与信息工程学院