第六章 光的衍射

（Diffraction of light）

§6.4 菲涅耳衍射

一、菲涅耳圆孔衍射

将一束光（例激光）投射在一个圆孔上，并在距孔**1-2m**处放置一接收屏，可观察衍射图样。

根据前面的讨论，如果圆孔很小，则从圆孔露出半波带的数量很少，即对圆孔后光强起作用的半波带数量很少，设有**k**个半波带。

则有 $a_k \leq (\approx)\ a_1$，　　当k为奇数时，

$$A_k = \frac{a_1}{2} + \frac{a_k}{2} \approx a_1 \qquad I_p = a_1^2 = 4(\tfrac{a_1}{2})^2$$

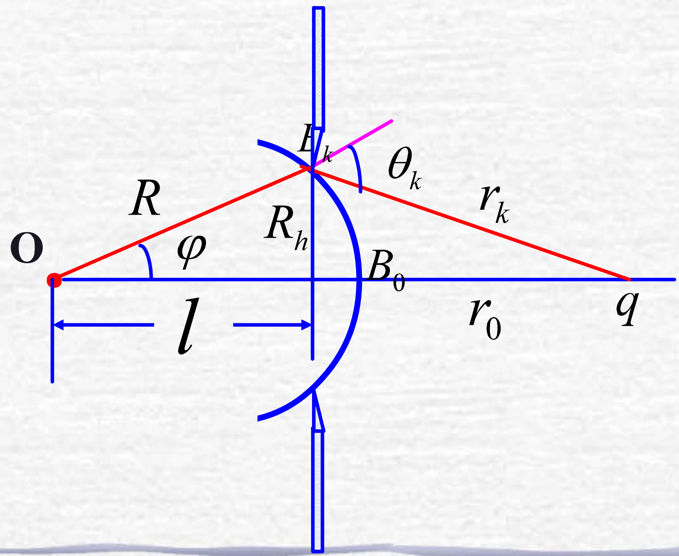
所以P点为亮点

当k为偶数时，

$$A_k = \frac{a_1}{2} - \frac{a_k}{2} \approx 0$$

$$I_p = 0$$

所以P点为暗点



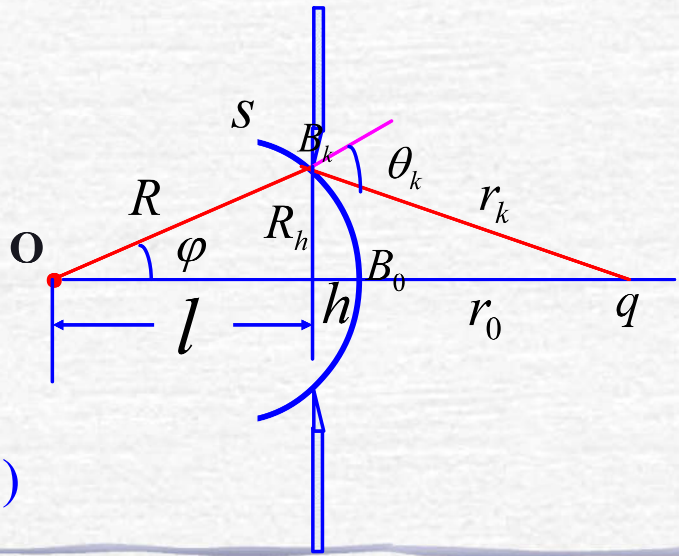
由此可见，想知道圆孔衍射场轴线上某点是亮点还是暗点，必须知道圆孔所包含的半波带数目。

如图，**O**点为点光源，光通过光阑上的圆孔，圆孔半径为$\mathbf{R_h}$，**S**为光通过圆孔时的波面。设圆孔包含有**k**个整数半波带。

$$R_{hk} = R_h$$

$$R_{hk}^2 = r_k^2 - (r_0 + h)^2$$

$$= r_k^2 - r_0^2 - 2r_0 h - h^2$$



由于$\mathbf{h \ll r_0}$，则$\mathbf{h^2}$可略去

$$R_{hk}^2 \approx r_k^2 - r_0^2 - 2r_0 h \qquad (1)$$

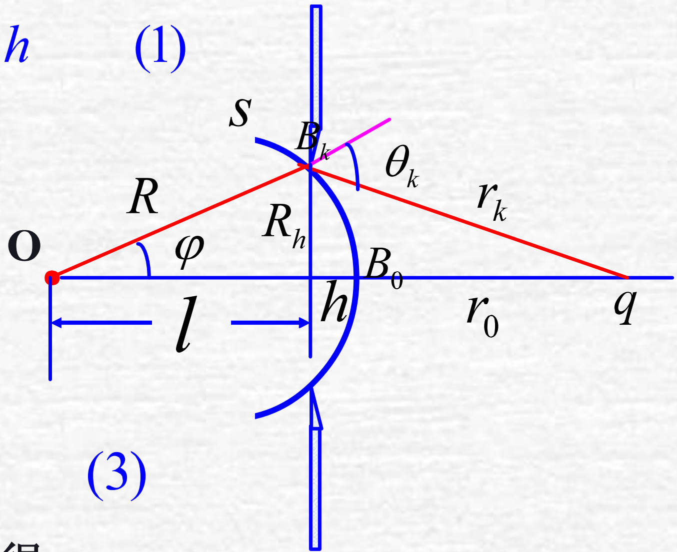
又因为 $R_{hk}^2 \approx r_k^2 - r_0^2 - 2r_0 h$ (1)

$$r_k^2 - r_0^2 = (r_0 + k\frac{\lambda}{2})^2 - r_0^2$$

$$\approx k\lambda r_0 \qquad (2)$$

(略去 $k^2\frac{\lambda^2}{4}$)

$$R_{hk}^2 = R^2 - (R-h)^2 = 2Rh \qquad (3)$$



由（1）、（2）、（3）式可得

$$h = \frac{k\lambda r_0}{2(R+r_0)}$$

$$R_{hk}^2 = R_h^2 = k\frac{r_0 R}{R+r_0}\lambda$$

$$\boxed{k = \frac{R_h^2}{\lambda}(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R})}$$

$$k = \frac{R_h^2}{\lambda}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R}\right)$$

由上式可见，圆孔包含的半波带的数目和圆孔的半径**R_h**，圆孔到**P**点的距离**r_0**，以及入射光波的波长λ，还有点光源到衍射屏距离**R**都有关。

若用平行光照射，则 $R \to \infty$

$$R_h = \sqrt{k\lambda r_0} \Rightarrow k = \frac{R_h^{\ 2}}{\lambda r_0}$$

当**R_h**、**R**、λ一定时，改变**r_0**，即改变光屏的位置，我们可以看到，光屏的中心点会有时明时暗的变化。

如果不用光阑，则相当于圆孔的半径无限大，也就是整个波面完全布被遮蔽，则最末一个波带发出的次波在到达P点时的振幅a_k无限小，此时**P**点的合振幅为

$$A_P = \frac{a_1}{2}$$

如果圆孔具有一定的大小，观察点**P**的位置仅使波面上的第一个波带露出，则

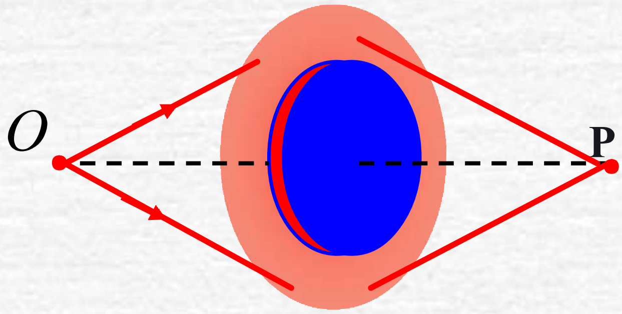
$$A_1 = a_1$$

与不用光阑时比较，振幅为完全不遮蔽时的2倍，光强则为不遮蔽时的4倍。

二、圆屏衍射　泊松亮斑

当点光源发出的光通过圆屏（盘）衍射时,由于圆屏不透明，被圆屏挡住部分的波面对轴线上p点的光强将没有贡献。 如图

设圆屏遮蔽了开始的k个半波带，从第k+1个半波带开始，其余所有的半波带所发出的次波都能到达P点。



这些半波带的次波在P点叠加后振幅为:

$$A_P = \frac{a_{k+1}}{2} \pm \frac{a_m}{2}$$

因m→∞，所以 $a_m \to 0$

$$A_p = \frac{a_{k+1}}{2}$$

因此 $$I_p = A_p^2 = \frac{a_{k+1}^2}{4}$$

当k不是很大时，有 $a_k \approx a_1$

$$I_p = A_p^2 \approx \frac{a_1^2}{4} = I_0$$

即P点的光强近似等于光在自由空间传播时的光强。应该是一个亮点。

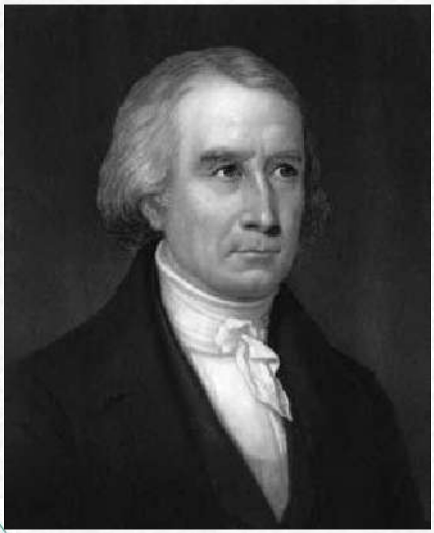
此亮点称为泊松（Possion 1781—11840）亮斑。这是几何光学中光的直线传播所不能解释的。

1818年在巴黎科学院大会上，菲涅尔提出了次波相干叠加原理，泊松根据由惠更斯—菲涅耳原理导出圆盘轴线上应是亮点。

泊松以此来证明惠更斯—菲涅耳原理是错误的。后来由阿拉果在实验中观察到圆屏衍射轴线上的亮点，证明了惠更斯—菲涅耳原理的正确性。

泊松（Poisson 1781－1840）法国数学家。 **1812**年当选为巴黎科学院院士。

泊松对积分理论、行星运动理论、热物理、弹性理论、电磁理论、位势理论和概率论都有重要贡献。他一生共发表**300**多篇论著。



阿拉果（**Arago 1786－1853**）
法国科学家

三、波带片

从前面的讨论可知，在相对于P点划分的半波带中，奇数序（1、3、5…….）（或偶数序）半波带所发出的次波在P点是同相位的，而奇数序和偶数序半波带所发出的次波在P点时反相的（相差π的奇数倍）。

若做一个特殊光阑，使之只允许序数为奇数的半波带或序数为偶数的半波带透光，则P点的振幅为同相位各次波叠加，因此叠加后将会振幅很大。

如图，若只允许序数为奇数的半波带透光，则P点的合振幅为

$$A_P = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k+1}$$
$$= \sum_k a_{2k+1}$$

如图，若只允许序数为偶数的半波带透光，则P点的合振幅为

$$A_P = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k} = \sum_k a_{2k}$$

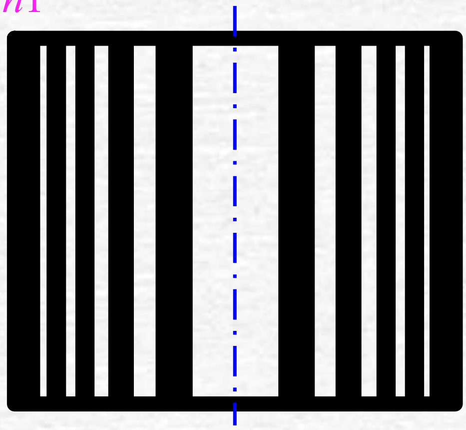
此时P点为光强很强的亮点。把这种特殊光阑称为菲涅耳波带片。

由

$$\boxed{k=\frac{R_h^2}{\lambda}\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{R}\right)}$$

可得

$$R_{hk}=\sqrt{\frac{Rr_0}{R+r_0}k\lambda}=\sqrt{k}R_{h1}$$

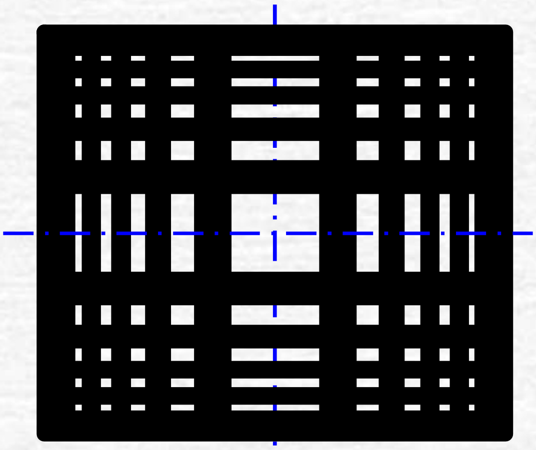


由上式，可较容易的制作波带片。

除了按上式可做成同心圆环带的波带片外，还可以做成长条形波带片。

这种波带片的特点是能使当在垂直于轴的平面上会聚成一条明亮直线。直线的方向与波带片的直线平行。

也可以做成方形波带片。



它能成一个明亮的十字线。

例题：一块波带片的孔径内有20个半波带，其中第1、3、5、~~~19等10个奇数带露出。第2、4、6、~~~20等10个偶数带遮蔽，试分析轴上场点的光强是自由传播时光强的多少倍？

解：波带片在轴上场点的振幅为

$$A_P = a_1 + a_3 + \cdots + a_{19} \approx 10a_1$$

自由传播波面不受限，轴上场点的振幅为 $A_{P0}=\dfrac{a_1}{2}$

则它们的振幅之比为 $\dfrac{A_P}{A_{P0}}=\dfrac{10a_1}{\dfrac{a_1}{2}}=20$

光强之比为 $\dfrac{I_p}{I_{p_0}}=\dfrac{A_p^2}{A_{p_0}^2}=400$

计算半波带数目***k***的公式：$\boxed{k=\dfrac{R_h^2}{\lambda}\left(\dfrac{1}{r_0}+\dfrac{1}{R}\right)}$

还可以写成：$\boxed{\dfrac{1}{r_0}+\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{\dfrac{R_{hk}^2}{k\lambda}}}$ 若令 $f'=\dfrac{R_{hk}^2}{k\lambda}$

则有 $$\frac{1}{R}+\frac{1}{r_0}=\frac{1}{f'}$$

和一般的会聚透镜成像公式相似。因此，上式称为**波带片的焦距公式**。

即波带片也有焦距，当R→∞时，有

$$\boxed{f'=r_0=\frac{R_{hk}^2}{k\lambda}}$$

从焦距公式可见，波带片的焦距取决于波带片通光孔的半径R_{hk},半波带的数目k，和光波的波长λ。

由于波带片的焦距和光波的波长有关，因此它的色差比一般透镜大的多。在激光出现以前，没有什么实用意义。由于激光的高度相干性（单色性好），使波带片的应用成为现实。目前主要用在激光准直方面。

将激光的高亮度和纯单色性与波带片相结合，可是激光束的定位精确度大大提高。

衍射式激光准直仪原理图

由望远镜出射的平行光经波带片后，在其焦点处形成一亮十字，若微调望远镜使射出的光是收敛的，则在光轴上波带片的焦距内形成一个亮的十字像。

目前，装有波带片的激光准直仪主要用于几十米至几百米甚至几千米范围内的准直调节。由于在几十米范围内十字亮线的宽度可窄到**0.2nm**，所以对中误差可以降到**10^{-5}**一下。

波带片的亮点相当于点光源成的像。

当使用单色光入射时，在$f'/3$，$f'/5$，$f'/7$等处也有亮点出现。即波带片有多个焦距，因而，与透镜成像的情况不同。对于给定的物点对应于不同的焦距，波带片可以给出多个像点。

波带片与普通透镜相比有自己的优点，例如：长焦距的普通物镜的设计与加工都是相当麻烦的。但不难制作长焦距的波带片，而且采用照相复制方法制造波带片比光学玻璃冷加工省事。

又如普通透镜无法将一个点光源成像为十字亮线。而方形波带片可以实现这一点。

起衍射聚焦作用的波带片和普通透镜相比，具有面积大，轻便，可折叠等优点。

特别适用于在远程通讯，测距以及航天技术中。波带片的焦距随波长的增加而缩短，正好和玻璃透镜的焦距色差相反。二者配合使用有利于消除光学系统的色差。

波带片不仅给惠更斯—菲涅耳原理提供令人信服的证据，而且在声波、微波、红外和紫外线、**X**射线的成像技术方面开辟了新的方向。在近代全息照相术等方面也获得了重要应用。

本节结束！