

# 第六章 光的衍射

## ( Diffraction of light )

### § 6.8 光栅衍射

#### grating diffraction

衍射光栅的定义：

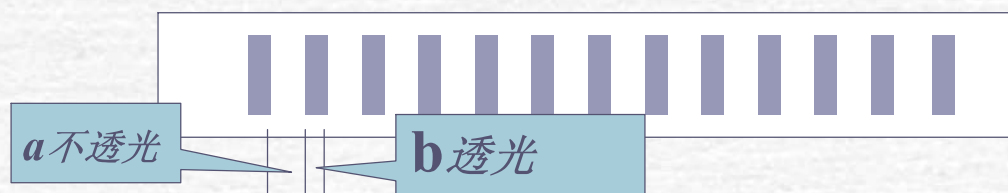
广义的说，任何具有空间周期性的衍射屏都可称为衍射光栅。这些具有空间周期性的衍射屏能**等宽度、等间隔地**分割入射光的波面。



聊城大学

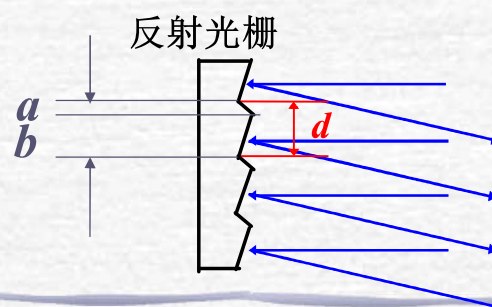
物理科学与信息工程学院

例如在一块不透明的板上刻划出一系列等宽度又等间距的平行狭缝。就是一种简单的一维透射式光栅。



在一张透明胶片上因曝光而记录的一系列等宽度又等间距的平行干涉条纹。便是一块一维的正弦光栅。

又如在一块很平的铝板上刻上一系列等间隔的平行槽纹，就是一块反射式光栅。



聊城大学

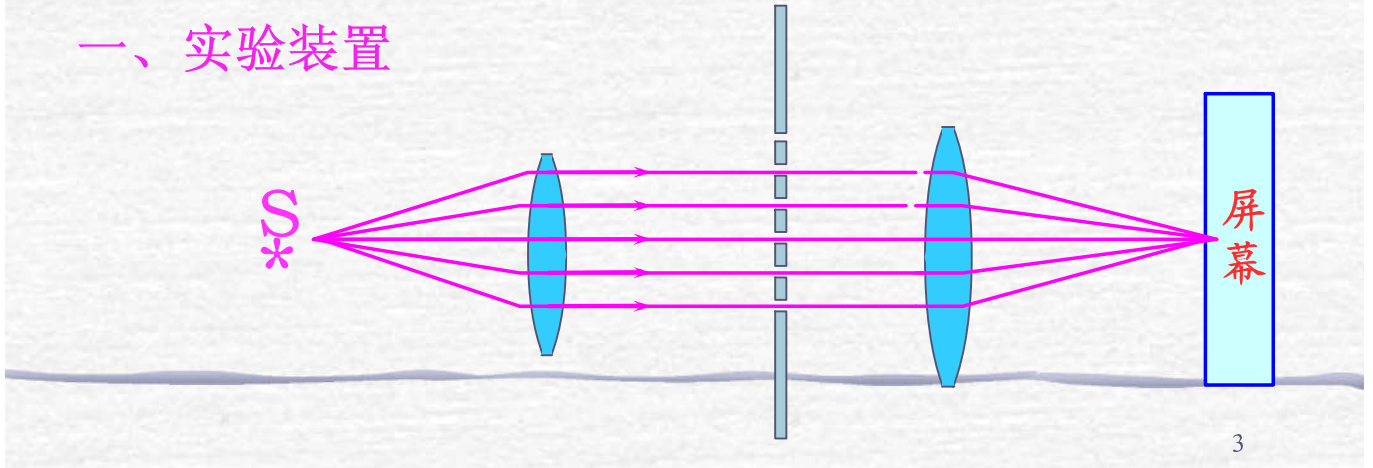
物理科学与信息工程学院

晶体由于内部原子排列具有空间周期性而成为天然的三维光栅。

光栅种类很多，有透射光栅和反射光栅。有平面光栅和凹面光栅，有黑白光栅和正弦光栅，有一维、二维和三维光栅。

光栅的种类虽然很多但其基本原理是相似的，下面以平面透射光栅为例讨论光栅衍射的基本原理。

### 一、实验装置



设光栅各缝的宽度都等于**b**，相邻两缝间不透明部分的宽度都等于**a**，则相邻狭缝上对应点之间的距离为：

$$d = a + b$$

—称为光栅常量（数）

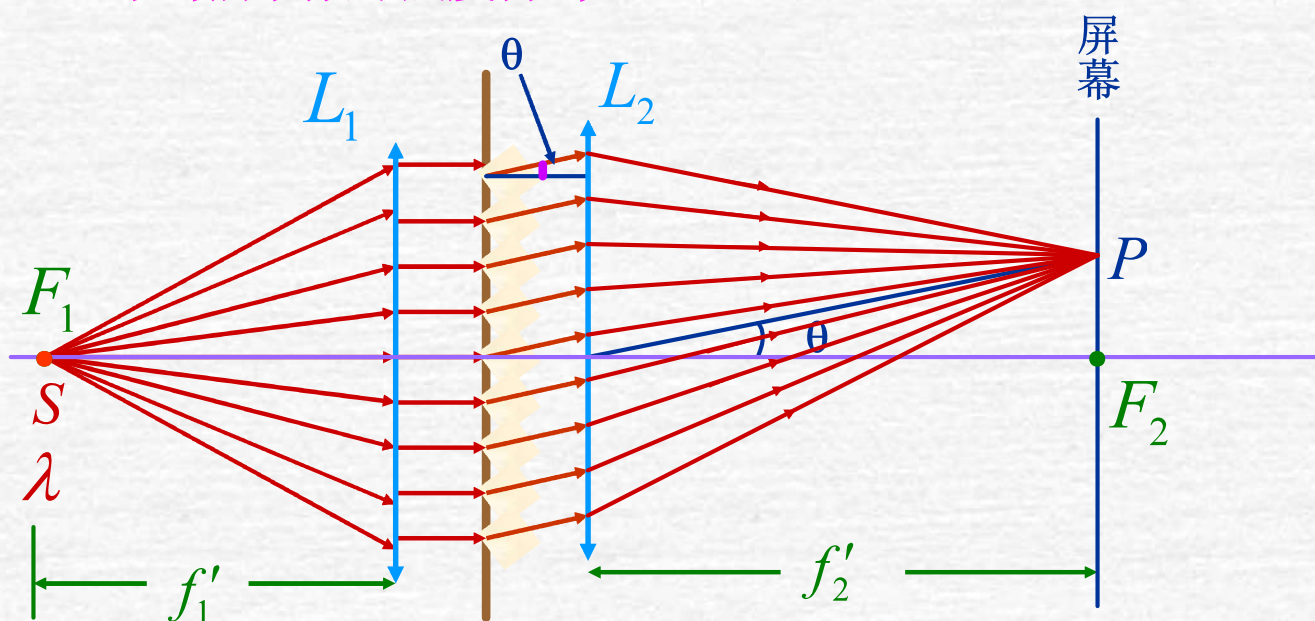
它反映光栅的空间周期性，其倒数表示每毫米内有多少条狭缝，称为光栅密度，实验室内常用（600~1200）/mm的光栅。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

## 二、光栅衍射的强度分布



当平行光来照射到一条细长狭缝上出现衍射图样时，其光强分布满足下式：



聊城大学

物理科学与信息工程学院

$$I = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \quad \text{其中} \quad u = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$$

光屏上所有最大值和最小值的位置分布仅取决于相应的衍射角，并不随缝的位置的改变而改变。

也就是说，当狭缝平行于自身做平动时，光屏上出现的图样仍维持原状，并不跟着移动。

如果在平面上开了许多相互平行的同样宽度的细长狭缝，则它们会给出与单缝同样的相互重叠的衍射图样，各最大值都在原来位置得到相应的加强。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

但是实际上，还必须考虑由各缝发出的多光束之间产生的干涉。

因此，如果相邻各缝间不透明部分的宽度也是严格相等的。那么各相邻光束在叠加时有相同的相位差，因而同时将出现多光束干涉图样，即宽大的黑暗背景中出现明晰锐利的亮条纹。

如果照射的光是复色光，则每一波长都将产生和它对应的细窄亮条纹。通常称为**光谱线**。

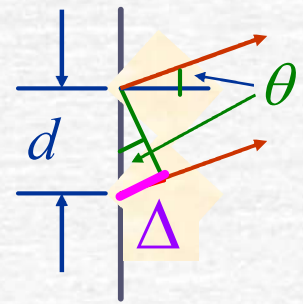


聊城大学

物理科学与信息工程学院

光栅有N条狭缝，缝宽为b，光栅常数为d。

由于透镜L<sub>2</sub>的作用，来自不同的狭缝的θ方向衍射光会聚在屏幕上同一点，形成多光束干涉。



$$\Delta = d \sin \theta$$

在夫琅和费远场条件下，各缝在P点产生的振动，振幅相同，相位不同. 相邻两缝在θ方向上的光程差为

$$\Delta = d \sin \theta,$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院



相位差为  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta.$

设最上面的狭缝在P点的光振动相位为零, 则各点P点产生的复振幅分别为

$$\tilde{E}_1 = \tilde{c} a \sin cu \cdot e^{i0},$$

$$\tilde{E}_2 = \tilde{c} a \sin cu \cdot e^{i\delta},$$

.....

$$\tilde{E}_n = \tilde{c} a \sin cu \cdot e^{i(n-1)\delta},$$

.....

$$\tilde{E}_N = \tilde{c} a \sin cu \cdot e^{i(N-1)\delta}.$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

于是P点的复振幅为

$$\begin{aligned}\tilde{E}_P &= \sum_{n=0}^{n=N-1} \tilde{c} a \sin cu \cdot e^{in\delta} = \tilde{c} a \sin cu \sum_{n=0}^{n=N-1} e^{in\delta} \\ &= \tilde{c} a \sin cu \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} \\ &= \tilde{c} a \sin cu \frac{e^{-iN\delta/2} - e^{iN\delta/2}}{e^{-i\delta/2} - e^{i\delta/2}} e^{i(N-1)\frac{\delta}{2}} \\ &= \tilde{c} a \sin cu \cdot \frac{\sin N \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} e^{i(N-1)\frac{\delta}{2}}\end{aligned}$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

上式的推导中,应用了等比数列前N项和公式

$$S_N = \frac{a_1(1-r^N)}{1-r}$$

式中  $a_1 = 1$ ,  $r = e^{i\delta}$

以及欧拉公式

$$e^{i\beta} - e^{-i\beta} = 2i \sin \beta.$$



所以  $\tilde{E}_P = \tilde{c} a \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{\sin N \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} e^{i(N-1)\delta}$ .

$$I = |\tilde{E}_P|^2 = \tilde{E}_P \cdot \tilde{E}_P^* = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 N \frac{\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 N \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}}$$



或

$$I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}$$

式中  $u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ ,  $v = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$ ,

光强公式中  $\frac{\sin^2 u}{u^2}$  称为衍射因子,

$\frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}$  称为缝间干涉因子.

可见光栅衍射的光强是单缝衍射图样和缝间干涉因子的乘积。单缝衍射因子对干涉主最大起调制作用。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

### 三、光栅衍射图样的主要特征

根据 
$$I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}.$$

可得出光栅衍射花样的主要特征是：一系列的主最大、次最大和光强为零的条纹有规律的分布。

#### 1. 主最大的角位置、光强和数目

由缝间干涉因子  $\frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}$ ， 当  $v = k\pi$  时  
( $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ )

即  $d \sin \theta = k\lambda$  时， 一称为光栅方程



聊城大学

物理科学与信息工程学院

由 
$$\lim_{\nu \rightarrow k\pi} \frac{\sin^2 N\nu}{\sin^2 \nu} = N^2.$$

在满足  $d\sin\theta = k\lambda$  的衍射方向上,

光强为 
$$I = N^2 I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}.$$

在屏幕的中心  $\theta = 0$ , 
$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 u}{u^2} = 1,$$

光强取得最大值:

$$I_{\max} = N^2 I_0.$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

主最大的数目:

由  $d \sin \theta = k\lambda$

由于衍射角  $\theta$  不可能大于  $90^\circ$ ，所以主最大的级次  $k_{\max}$  满足

$$|k_{\max}| < \frac{d}{\lambda}$$

例如，当  $\lambda = 0.4d$  时，则

$$\frac{d}{\lambda} = 2.5$$

只可能有  $k = 0, \pm 1, \pm 2$  的级次的主最大，而无更高级次的主最大。

若  $\lambda \geq d$ ，除零级主最大外，别无其它级主最大存在。



聊城大学

物理科学与信息工程学院



因此可以看出，光栅衍射主最大的数目最多为：

$$N = 2[k_{\max}] + 1$$

$[k_{\max}]$  表示只取整数部分

$$d \sin \theta = k\lambda$$

为入射平行光垂直照射光栅时的光栅方程

若平行光斜入射到光栅上，入射方向和光栅平面法线方向的夹角为  $\theta_0$ ，则光栅方程为：

$$d(\sin \theta \pm \sin \theta_0) = k\lambda \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$\theta$  其角度均取正值， $\theta$  和  $\theta_0$  在法线同侧时上式左边括号中取加号；在法线异侧是取减号。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

## 2. 光强为零（暗纹）的角位置和数目

在光强公式中，两因子中任一因子为零，P点的光强都会为零。对于干涉因子，

当  $\sin N\upsilon = 0$   $\sin \upsilon \neq 0$  时，

$$\frac{\sin^2 N\upsilon}{\sin^2 \upsilon} = 0,$$

可以得最小光强  $I = 0$ 。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

因此最小值（暗纹）的位置满足

$$N\upsilon = \frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda} = k' \pi \quad \text{即}$$

$$d \sin \theta = \frac{k' \lambda}{N}$$

$$k' = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots \pm (N-1), \pm (N+1), \pm (N+2), \cdots, \\ \pm (2N-1), \pm (2N+1), \pm (2N+2), \cdots, \pm (3N-1), \pm (3N+1), \cdots$$

即  $k' \neq 0, N, 2N, 3N, \cdots$  的整数。

否则上式就变成决定主最大角位置的光栅方程了。

因此, 两个干涉主极大之间有  $(N-1)$  个由于干涉产生的光强为零的最小值。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

### 3. 次最大的角位置和数目

次最大的角位置可由  $\frac{d}{d\nu} \left( \frac{\sin N\nu}{\sin \nu} \right)^2 = 0$  求得

可以证明，各级次最大的光强远比主最大弱得多。其值不超过零级主最大的1/23，所以次最大和暗纹实际上混成一片，形成光强很弱的黑暗背景。对于总缝数N很大的光栅，次极大完全观察不到。

因为在两相邻主最大之间有N-1个暗纹，而相邻两零光强暗纹之间应有一个次最大。

因此，两相邻主最大之间必有N-2个次最大。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

## 4. 谱线的半角宽度

每一谱线（主最大值）的角宽度，它的左右两侧附加第一最小值的位置为范围，从主最大的中心到其一侧的附加第一最小值的角距离就是每一谱线的半角宽度。

对第K级来说：

$$\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta = \frac{(kN+1)\lambda}{Nd} - k\frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{Nd}$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

$$\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta = \Delta(\sin\theta) = \cos\theta \cdot \Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}$$

因此

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos\theta}$$

可见谱线的半角宽度 $\Delta\theta$ 与 $Nd$ 的乘积成反比， $Nd$ 愈大， $\Delta\theta$ 愈小，谱线愈窄，锐度愈好。

如果光源发出的光单色性很好，那么光栅给出的光谱是一组很明锐的谱线。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

## 5. 光栅光强分布曲线

对于一定的波长来说，由光栅方程各级谱线之间的距离由光栅常量 $d$ 决定。

由前面的学习知道，缝间干涉因子决定主最大、次最大和暗纹的角位置，它们的强度分布还要乘上单缝衍射因子。

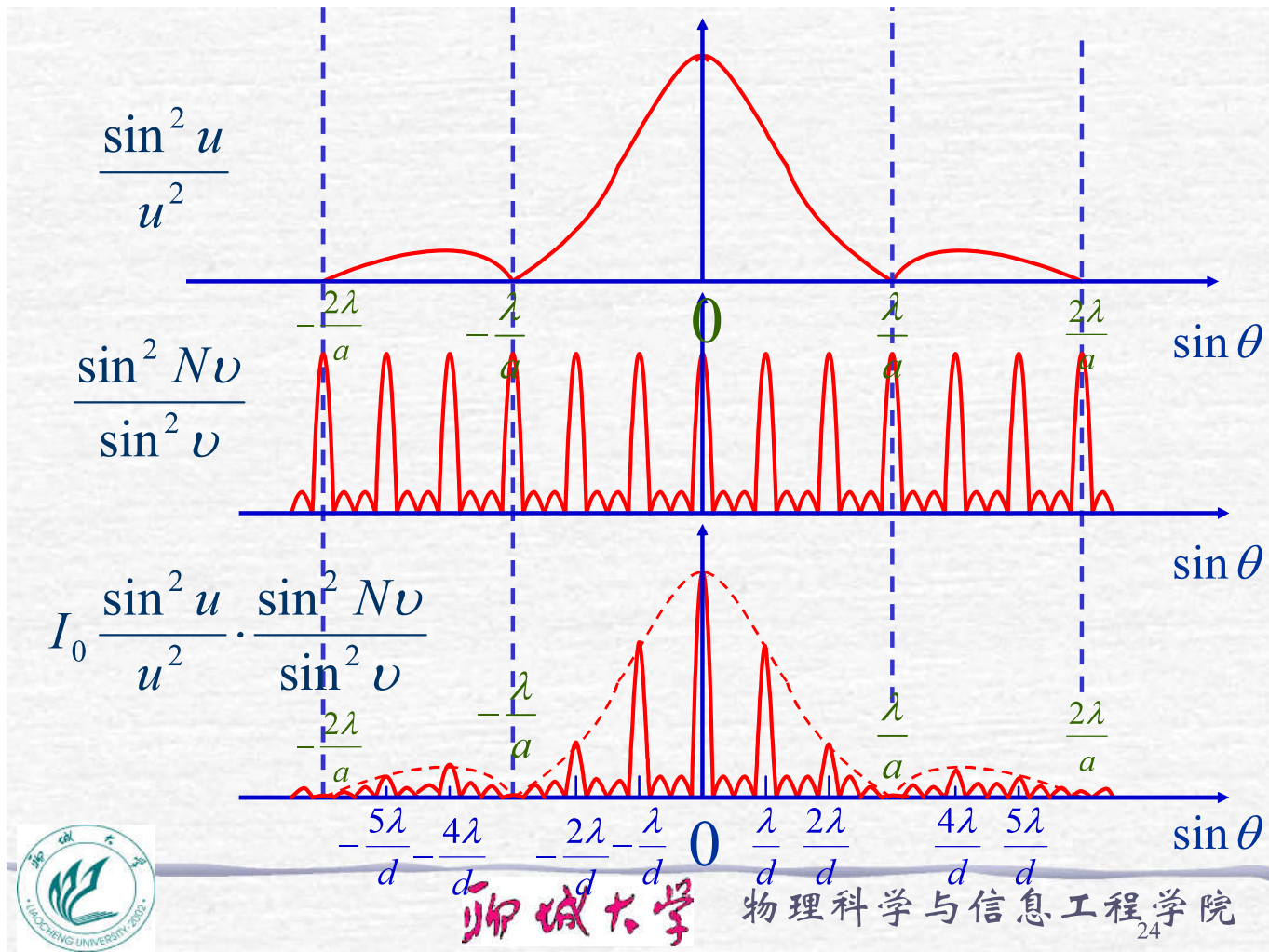
缝间干涉因子与单缝衍射因子相乘，就得到实际光强分布。单缝衍射因子的变化曲线可看作是各级主最大的强度的包络线。从而使不同级的主最大具有不同的强度。如图



聊城大学

物理科学与信息工程学院

23



聊城大学

物理科学与信息工程学院



## 6. 主最大（谱线）的缺级

若本应该由相应级的干涉主最大出现的地方，恰好是单缝衍射的暗纹所在的位置，此时合成光强为零，即本应该出现的主最大不再出现，这种现象称**缺级**。  
如图

缺级发生在衍射角  $\theta$ ，同时满足光栅方程（主最大）和单缝衍射极小两个条件的地方。

若在某衍射方向是  $j$  级衍射极小，又是  $K$  级干涉主最大，则有

$$\begin{cases} b \sin \theta = j\lambda, \\ d \sin \theta = k\lambda. \end{cases}$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

由上面两方程，得

$$k = \frac{d}{b} j.$$

第K级干涉主极大被 j级衍射极小调制掉

例如  $\frac{d}{b} = 3$ , 则  $k = \pm 3, \pm 6 \dots$  等级次

被调制掉，不出现.

由上式可见，光栅主最大的缺级与波长无关，而由光栅参数决定。

总之，光栅光强是多光束干涉被单缝衍射调制的结果.



聊城大学

物理科学与信息工程学院

## 四. 光栅光谱

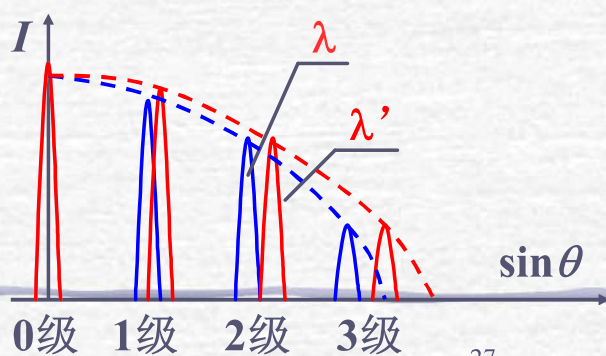
如果入射光是包含几种不同的波长的复色光，则除零级以外，各级主最大的位置各不相同。我们将可以看到在衍射图样中有几组不同颜色的谱线，分别对应于不同的波长。

由光栅的主极大满足光栅方程

$$d \sin \theta = k \lambda$$

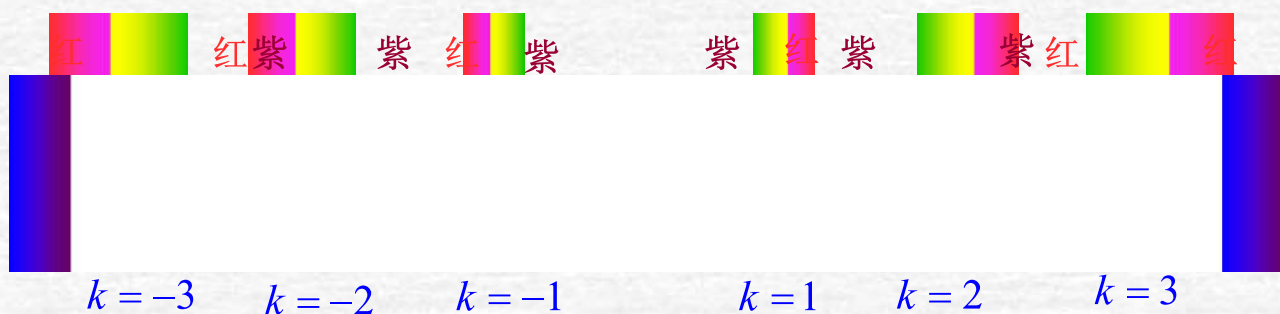
如果入射光中包含两个十分接近的波长 $\lambda$ 与 $\lambda'$ ，由于色散，它们各有一套窄而亮的主极大。

波长相差越大，级次越高，  
则分得越开。



把波长不同的同级谱线集合起来构成一组谱线，称为**光栅光谱**。

如果是白光，则光栅光谱中除零级仍为一条白色亮线外，其它各色谱线都排列成连续的谱带，第二、三级后可能发生重叠。如图



聊城大学

物理科学与信息工程学院

## 五. 闪耀光栅

透射光栅有一个很大的缺点，就是衍射图样中无色散的零级主最大占有总光能得很大一部分。其余的光能又分散在各级光谱中，致使每级光谱中的强度比较小。而实际使用光栅时往往只利用它的某一级光谱，这对光栅的利用是很不利的。

造成这种情况的原因是单缝衍射因子的零级与缝间干涉因子的零级主最大重叠。实际使用光栅时，通常只使用它的某一级光谱。

因此，只需设法把光能集中到这一光谱上来即可。用闪耀光栅即可解决这个问题。



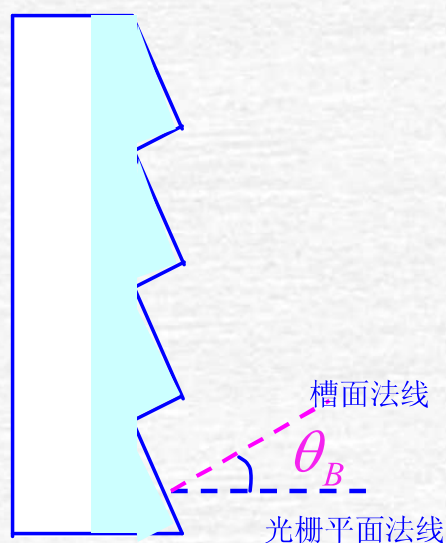
聊城大学

物理科学与信息工程学院

目前在分光仪器中使用的光栅几乎都是反射式的闪耀光栅。它的优点是：能将单缝的中央最大值的位置从没有色散的零级光谱转移到其他有色散的光谱级上。如图所示：

在一块玻璃板上镀一层反射率很高的金属层，然后用钢刀在金属层上等间隔地刻画很密的锯齿形沟槽，即形成了闪耀光栅。每个反射面相对于光栅平面有一定倾角

$\theta_B$ ，称**闪耀角**。

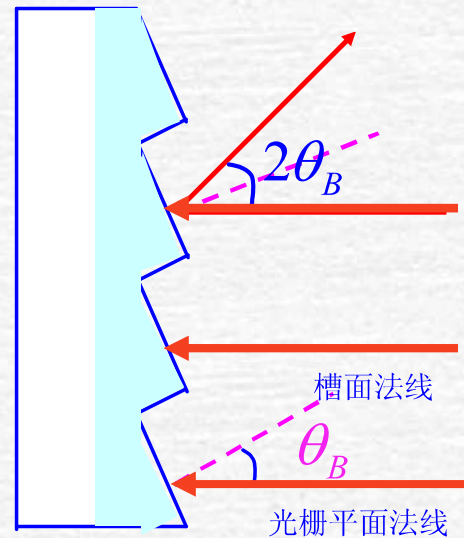


聊城大学

物理科学与信息工程学院

槽间干涉主极大的位置，仍有光栅方程  $d\sin\theta = k\lambda$  决定。 $d$  是相邻两槽间的距离，称为**光栅常数**， $\theta = 0^\circ$  对应零级干涉最大值。显然，各级最大值的位置与闪耀角  $\theta_B$  无关。

单槽面的衍射光的零级衍射最大值的位置，应在槽面反射方向有最大的衍射光强。



即单槽衍射光的中央最大值位于槽面的反射方向。

当入射光垂直于光栅平面时，单槽面产生的衍射峰位于  $\theta = 2\theta_B$  方向，显然，衍射零级最大随  $\theta_B$  变化。则槽间干涉的零级最大值与单槽面衍射的中央最大不再重合。



若光谱中对应的波长 $\lambda_{Bk}$ ，使下式成立：

$$d \sin 2\theta_B = k\lambda_{Bk}$$

则 $\lambda_{Bk}$ 称为第k级闪耀波长。

当 $k=1$ 时，光栅的单槽衍射零级最大值正好落在 $\lambda_{B1}$ 光波的一级光谱上。

又因为闪耀光栅 $d \approx b$ 。因此，光谱的其它级干涉最大值（包括零级）都几乎落在单槽衍射的暗纹位置处，形成缺级。如图

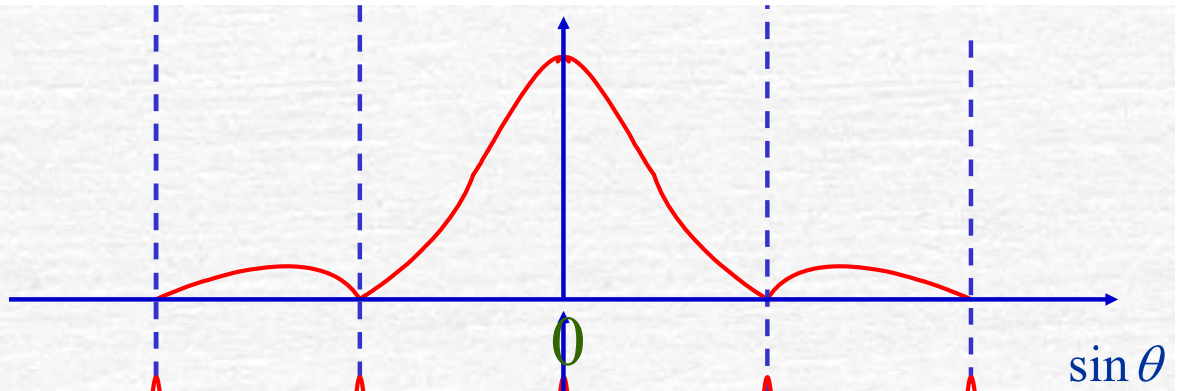


聊城大学

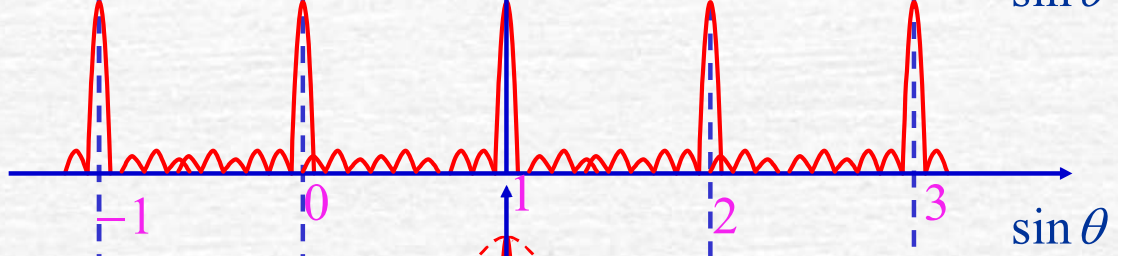
物理科学与信息工程学院



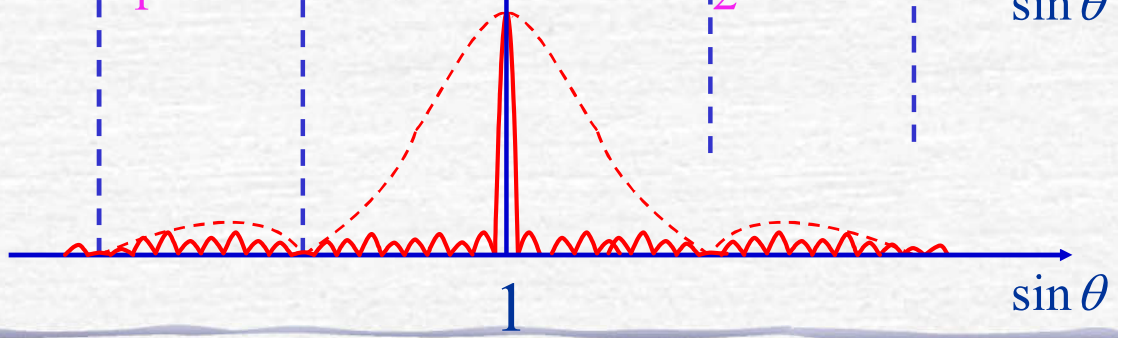
衍射



干涉



综合



聊城大学

物理科学与信息工程学院

这样一来，80%—90%的光能集中到的一级谱线中，使其强度大大增强，显然 $\lambda_{B1}$ 光的闪耀方向不可能严格地又是其它波长的闪耀方向，不过由于单缝衍射的零级最大值有一定的宽度，它可容纳 $\lambda_{B1}$ 附近一定波段内其它波长的一级谱线，使它们也得到相等程度的闪耀，有较大的强度。同时这些波长的其它级谱线也都很弱。

用同样的方法，也可以把光强集中到二级闪耀波长 $\lambda_{B2}$ 附近的二级光谱中去。



**例题 (P137)**：已知平面透射光栅夹缝的宽度  $b=1.582 \times 10^{-3} \text{mm}$ ，若以波长的氦氖激光垂直入射在这个光栅上，发现第四级缺级，会聚透镜的焦距为  $1.5 \text{m}$ ，试求：（1）屏幕上第一级亮条纹与第二级亮条纹的距离。（2）屏幕上所呈现的全部亮条纹数。

解：（1）设光栅中相邻两缝间不透明部分的宽度均等于  $a$ ，光栅常数  $d=a+b$ ，由第四级缺级。则有

$$d=4b=1.58 \times 4 \times 10^{-3}=6.328 \times 10^{-3} \text{mm}$$

且  $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots$  的级次都缺级。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

由光栅方程可知，第一级亮条纹和第二级亮条纹的角位置为：

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{d} = 0.1 \qquad \sin \theta_2 = \frac{2\lambda}{d} = 0.2$$

$$\theta_1 \approx 5.7^\circ$$

$$\theta_2 = 11.5^\circ$$

若会聚透镜的焦距为 $f$ ，则它们距中央亮条纹的中心位置的距离为：

$$x_1 = f \operatorname{tg} \theta_1,$$

$$x_2 = f \operatorname{tg} \theta_2$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

当 $\theta$ 很小时,

$$\operatorname{tg} \theta_1 \approx \sin \theta_1$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 \approx \sin \theta_2$$

因此

$$x_1 \approx f' \frac{\lambda}{d} \qquad x_2 \approx f' \frac{2\lambda}{d}$$

二者之间距为:

$$\Delta x = f' \frac{2\lambda}{d} - f' \frac{\lambda}{d} = f' \frac{\lambda}{d} = 15\text{cm}$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

(2) 由光栅方程:  $d \sin \theta = j \lambda$

$$j = \frac{d \sin \theta}{\lambda}$$

当 $\sin \theta = 1$ 时,  $j$ 最大, 则

$$j_{\max} = \frac{d}{\lambda} = 10$$

若考虑到 $j = \pm 4, \pm 8$ 缺级, 而 $j = 10$ 实际上看不到。  
则屏幕上呈现的全部亮条纹数为

$$N = 2(9 - 2) + 1 = 15(\text{条})$$

本节结束



聊城大学

物理科学与信息工程学院