第六章 光的衍射

（ Diffraction of light）

§6.3 菲涅耳半波带

使用菲涅耳—基耳霍伏衍射积分公式计算菲涅耳衍射场十分复杂不易严格求解。

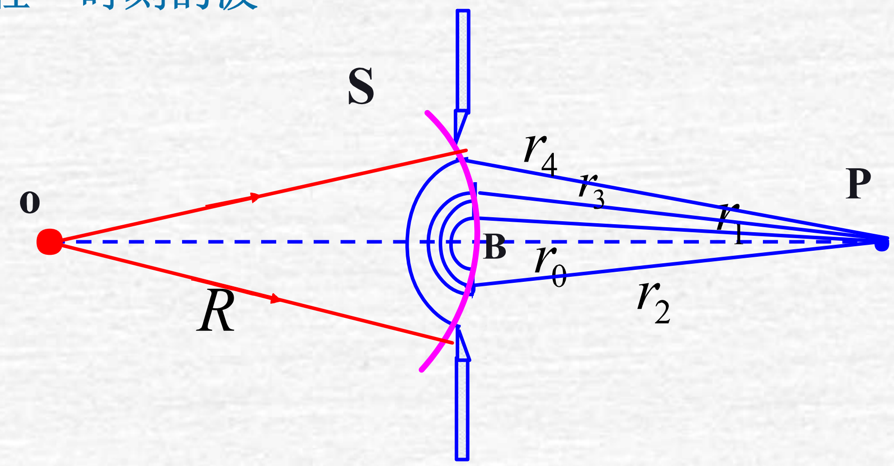
在衍射屏具有对称性的一些简单情况下，用代数加法或矢量加法代替积分运算，可以十分方便地对衍射现象作定性或半定量的解释。

本节主要介绍使用菲涅耳半波带法和矢量叠加法处理菲涅耳圆孔和圆屏衍射的问题。

一、菲涅耳半波带

现以点光源为例说明惠更斯－菲涅耳原理的应用。如图：

O为点光源，**S**为任一时刻的波面，**R**为半径。



为了确定光波到达对称轴上任一点P时，波面S所起的作用，连**O**，P与球面相交于B点，B点称为P点对于波面的极点。

令$PB_0 = r_0$，设想将波面分为许多环形带，使从每两个相邻带的相应边缘到P点的距离相差半个波长。

即 $$r_1 - r_0 = r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = \cdots = r_k - r_{k-1} = \frac{\lambda}{2}$$

在这种情况下，由任何相邻两带的对应部分所发出的次波到达P点时的光程差为λ/2，即它们的相位差为π，这样分成的环形带叫做菲涅耳半波带，简称半波带。

二、合振幅的计算

以a_1、a_2、a_3、…分别表示各半波带发出的次波在P点所产生的振幅。

由于相邻两个半波带所发出的次波到达P点时相位相差π，所以k个半波带所发出的次波在P点叠加的合振幅A_k为：

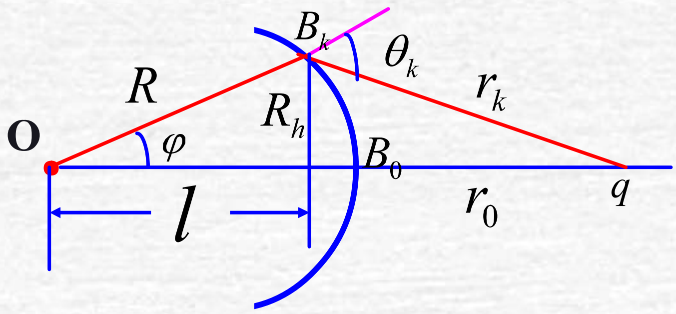
$$A_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \ldots\ldots + (-1)^{k+1} a_k$$

下面来比较a_1、a_2、a_3、…的大小。按惠更斯—菲涅耳原理，第k个半波带所发次波到达P点的振幅为：

$$a_k \propto K_{(\theta_k)} \frac{\Delta s_k}{r_k}$$

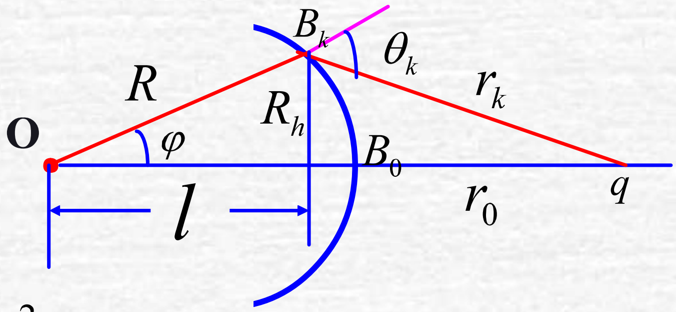
为了计算 $\frac{\Delta S_k}{r_k}$

如图，求球冠的面积：



$$S = 2\pi R \cdot R(1-\cos\varphi) \quad = 2\pi R^2(1-\cos\varphi) \qquad （1）$$

由图可得（余弦定理）



$$\cos\varphi = \frac{R^2 + (R + r_0)^2 - r_k^2}{2R(R + r_0)} \qquad (2)$$

将（**1**）、（**2**）式分别微分得

$$ds = 2\pi R^2 \sin\varphi d\varphi \qquad \sin\varphi d\varphi = \frac{r_k dr_k}{R(R + r_0)}$$

由上两式可得： $$\frac{ds}{r_k}=\frac{2\pi R dr_k}{R+r_0}$$

因为r_k>>λ，故可将dr_k看着相邻半波带间**r**的差值**λ/2**，**ds**看着半波带的面积，于是有

$$\frac{\Delta S_k}{r_k}=\frac{\pi R\lambda}{R+r_0}$$

由此可见： $\frac{\Delta S_k}{r_k}$ 与**k**无关

即它对每一个半波带都是相同的，这样影响a_k的大小因素中，只剩下倾斜因子 $K_{(\theta_k)}$了。

聊城大学 物理科学与信息工程学院

从一个半波带到与之相邻的半波带，θ_k变化甚微。

由
$$K_{(\theta_k)} = \frac{1+\cos\theta_k}{2}$$

$K_{(\theta_k)}$随着倾角的增大，而缓慢地逐渐减小。

当$\theta_k \to \pi$时，$K_{(\theta_k)} \to 0$ 由此可得

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \cdots\cdots \geq a_k$$

由于各半波带在P点的振幅其大小是缓慢的单调下降，因此近似地有：

$$a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2} \quad a_4 = \frac{a_3}{2} + \frac{a_5}{2} \quad \cdots, \ a_k = \frac{a_{k-1}}{2} + \frac{a_{k+1}}{2}$$

当k为奇数时，则

$$A_k=\frac{a_1}{2}+(\frac{a_1}{2}-a_2+\frac{a_3}{2})+(\frac{a_3}{2}-a_4+\frac{a_5}{2})+\ldots\ldots+\frac{a_k}{2}$$

当k为偶数时，则

$$\boxed{A_k=\frac{a_1}{2}+\frac{a_k}{2} \qquad (1)}$$

$$A_k=\frac{a_1}{2}+(\frac{a_1}{2}-a_2+\frac{a_3}{2})+(\frac{a_3}{2}-a_4+\frac{a_5}{2})+\ldots\ldots-\frac{a_k}{2}$$

$$\boxed{A_k=\frac{a_1}{2}-\frac{a_k}{2} \qquad (2)}$$

综合（1）、（2）两式，有：

$$\boxed{A_k=\frac{a_1}{2}+(-1)^{k+1}\frac{a_k}{2}}$$

对自由空间传播的球面波，波面为无限大，$k \rightarrow \infty$，$a_k \rightarrow 0$，则对于给定轴线上的一点P的振幅为：

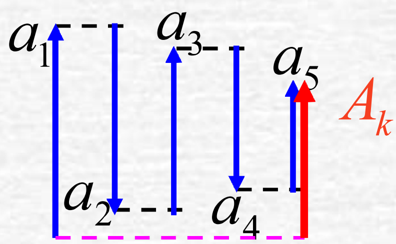
$$\boxed{A_0 = \frac{1}{2} a_1}$$

即球面波自由传播时，每个球面波上各次波波源在**P**点产生的合振动等于第一个半波带在**P**点产生的振动振幅得一半，强度为它的**4**分之**1**。

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{4} a_1^2}$$

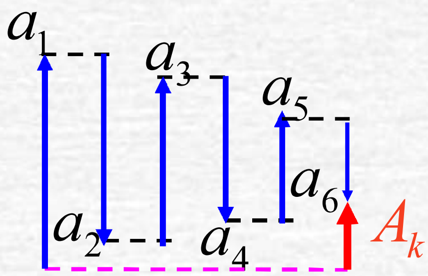
三、矢量合成法

各半波带在**P**点引起的振动可以用上下交替的矢量来表示。为清楚起见，将各矢量彼此错开，如图



奇数个半波带

矢量$\mathbf{a_1}$的起点在某一水平基线上，其余各矢量的起点都与前一矢量的终点等高，从基线指向最末一矢量a_k终点的即为合振动A_k的振动矢量。



偶数个半波带

应该说，把波面分成半波带是不够精细的，特别是当包含的不是整数半波带，在用半波带来处理就困难了。

这时可以将半波带进一步细分，如将第一个半波带分成**m**个环带，则相邻半波带到**P**点的光程差为：

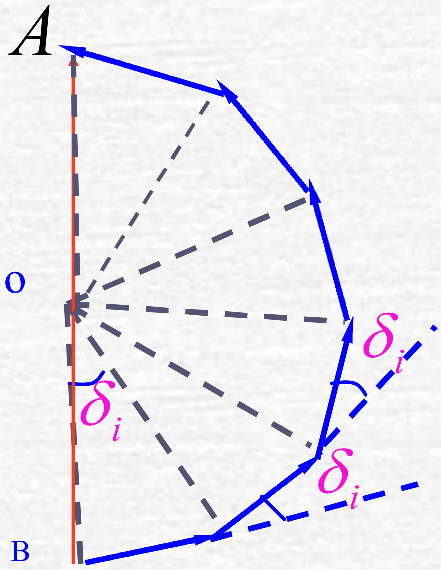
$$\Delta = \frac{\lambda}{2m}$$

相位差为：

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{m}$$

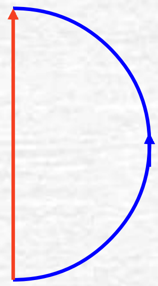
如果忽略倾斜因子的影响，则各个小波带在**P**点产生的振幅A_i近似相等。

若将m个小波带在P产生的振幅矢量首尾相接，并且每个依次转过$\delta_i = \pi/m$的角度，如图。



运用矢量合成的方法可知，则由第一个小波带的起始端到最后一个小波带的末端的连接的矢量即为整个波带的合成振幅矢量。

若m→∞，则$\delta_i \to 0$，$A_i \to 0$，多边形就变成了半圆形，如图。



本节结束！