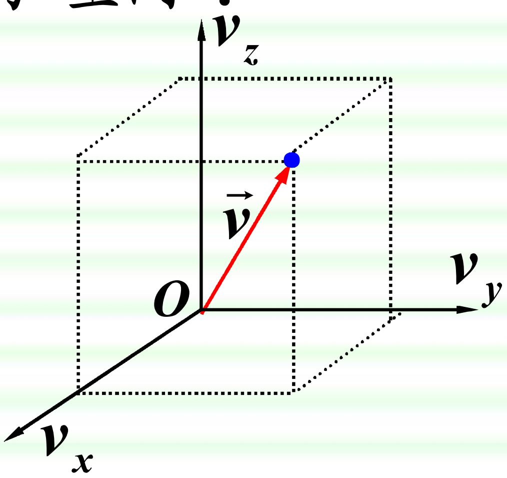
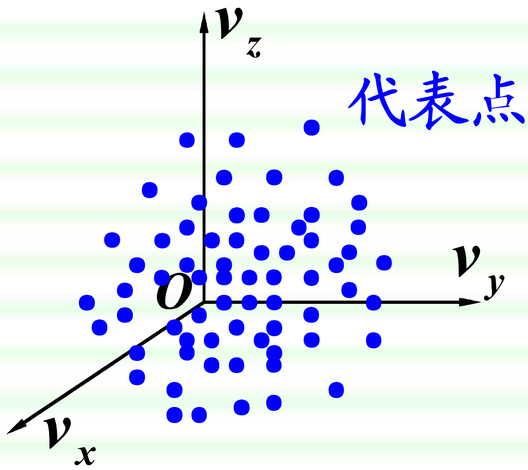
麦氏速度分布
玻尔兹曼分布

§ 3.1.4 速度分布律

1. 速度空间

速度空间——以分子速度分量为坐标架构起来的“空间”.





在速度空间内从原点到任一点的矢量代表一个粒子可能的速度.

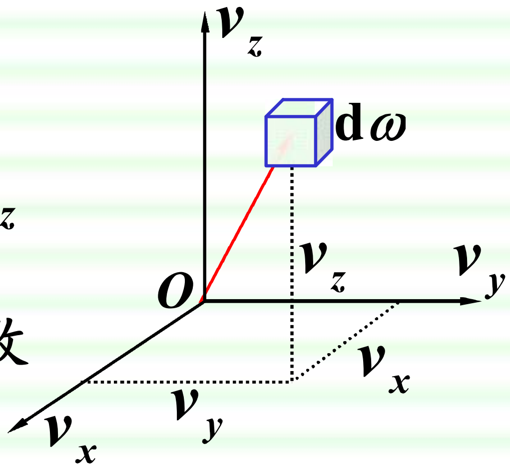
2.代表点在速度空间的分布

速度分布——指出速度分量分别在 $v_x - v_x + \mathrm{d}v_x$ $v_y - v_y + \mathrm{d}v_y$ $v_z - v_z + \mathrm{d}v_z$ 区间的分子数或比率.

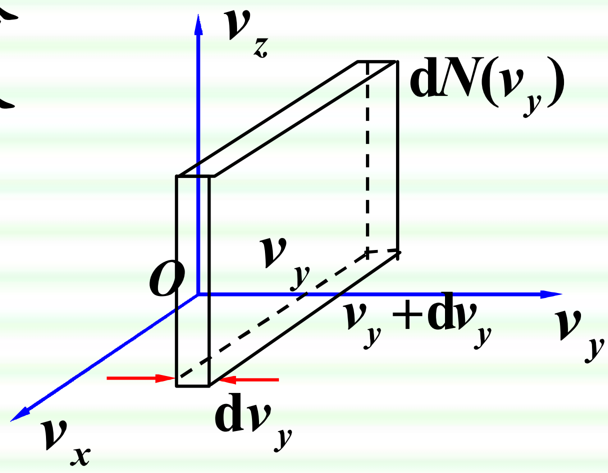
速度体积元　$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z$

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = f(v_x v_y v_z) \cdot \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z$$

$f(v_x v_y v_z)$ ——速度分布函数



问：在N个分子中，速度y分量落在$v_y - v_y + \mathrm{d}v_y$范围内分子数？



$$\frac{\mathrm{d}N(v_y)}{N} = f(v_y)\cdot \mathrm{d}v_y$$

3. Maxwell 速度分布律

平衡态下，理想气体，理论上有

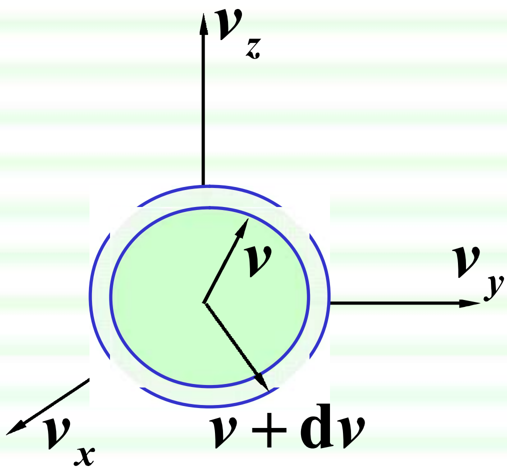
$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2kT}\cdot \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z$$

速率分布是速度分布的特殊情形

速率体积元 $\mathrm{d}\omega = 4\pi v^2 \mathrm{d}v \qquad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

代入速度分布式中

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2 \mathrm{d}v$$



3. 速度分量分布

速度分量在$v_x \sim v_x + \mathrm{d}v_x$ 间隔内的分子数$\mathrm{d}Nv_x$占总分子数N的比率

$$\frac{\mathrm{d}N_{v_x}}{N} = f(v_x)\mathrm{d}v_x$$

$$\frac{\mathrm{d}N_{v_x}}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-mv_x^2/2kT}\mathrm{d}v_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_y^2/2kT}\mathrm{d}v_y$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_z^2/2kT}\mathrm{d}v_z$$

计算得 $\Longrightarrow$ $$\frac{\mathrm{d}N_{v_x}}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-mv_x^2/2kT}\mathrm{d}v_x$$

$$f(v_x)=\frac{dN_{v_x}}{dv_x N}=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-mv_x^2/2kT}$$

$$f(v_y)=\frac{dN_{v_y}}{dv_y N}=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-mv_y^2/2kT}$$

$$f(v_z)=\frac{dN_{v_z}}{dv_z N}=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-mv_z^2/2kT}$$

可证， $f(v)=f(v_x)f(v_y)f(v_z)$

§3.1.5 误差函数

误差函数 $$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$$

$$=1-\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1\times3}{(2x^2)^2}-\frac{1\times3\times5}{(2x^2)^3}+\cdots\right)$$

从一般积分表所附的误差函数表（P104）中，可直接查出与不同x值对应的erf(x)的近似值。

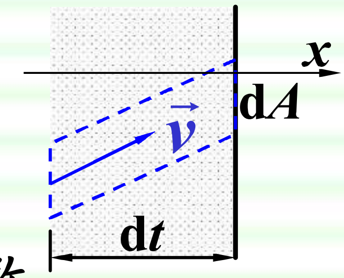
§3.1.6 统计规律性和涨落现象

涨落－一可测量的物理量某次测量的结果与其相应的统计平均值的偏差.

统计理论证明：如事件发生的次数为N，则实测值的涨落的最大幅度为 $\pm\sqrt{N}$

统计规律中伴有涨落，对粒子数很多的系统，在一定的精度要求范围内涨落可以不计；但在粒子数不多或精度要求很高的情况下，涨落是不可忽略的.

[例]用麦克斯韦按速度分量分布函数，求单位时间内碰撞到单位面积容器壁上的分子数Γ



[解] 设单位体积内分子数为n

单位体积内，在 $v_x - v_x + \mathrm{d}v_x$

区间的分子数 $nf(v_x)\mathrm{d}v_x$

在dt时间内与dA器壁相碰的分子数

$$nf(v_x)\mathrm{d}v_x \cdot v_x \mathrm{d}t\mathrm{d}A$$

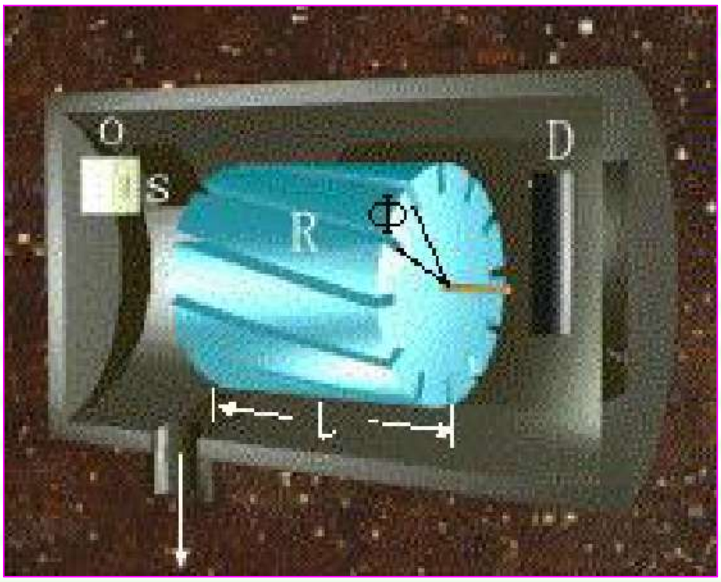
单位时间与单位面积器壁碰撞次数为

$$nv_x f(v_x)\mathrm{d}v_x = nv_x\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-mv_x^2/2kT}\mathrm{d}v_x$$

从$0\sim\infty$积分得 $\Gamma = n\left(\dfrac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2} = \dfrac{1}{4}n\bar{v}$

§ 3.2 气体分子速率的实验测定

1.实验装置



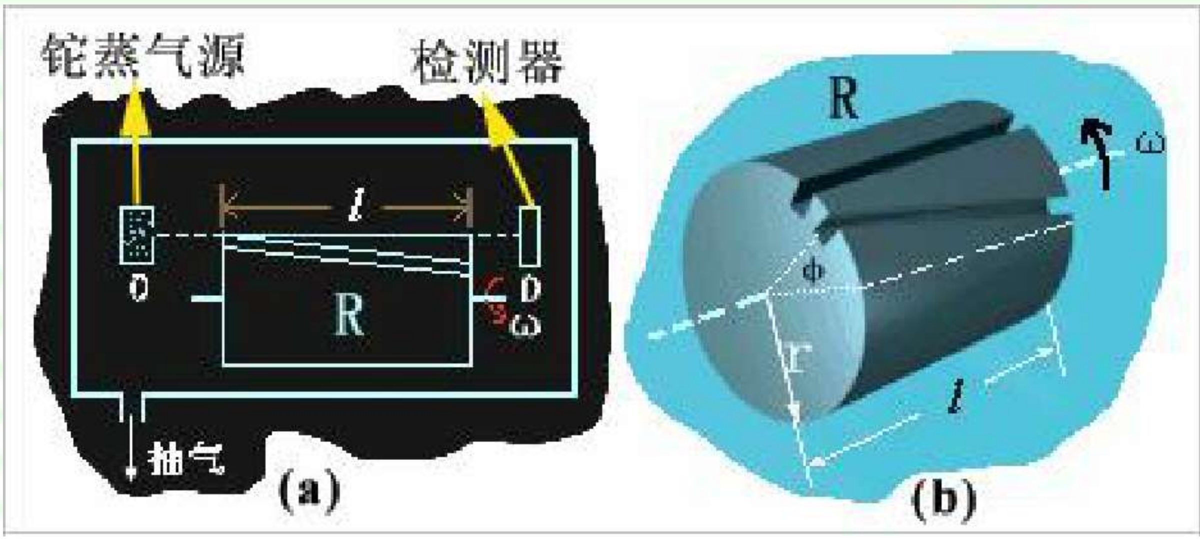
O——蒸汽源

S ——分子束射出方向孔

R ——长为 l,刻有螺旋形细槽的铝钢滚筒

D ——检测器,测定通过细槽的分子射线强度

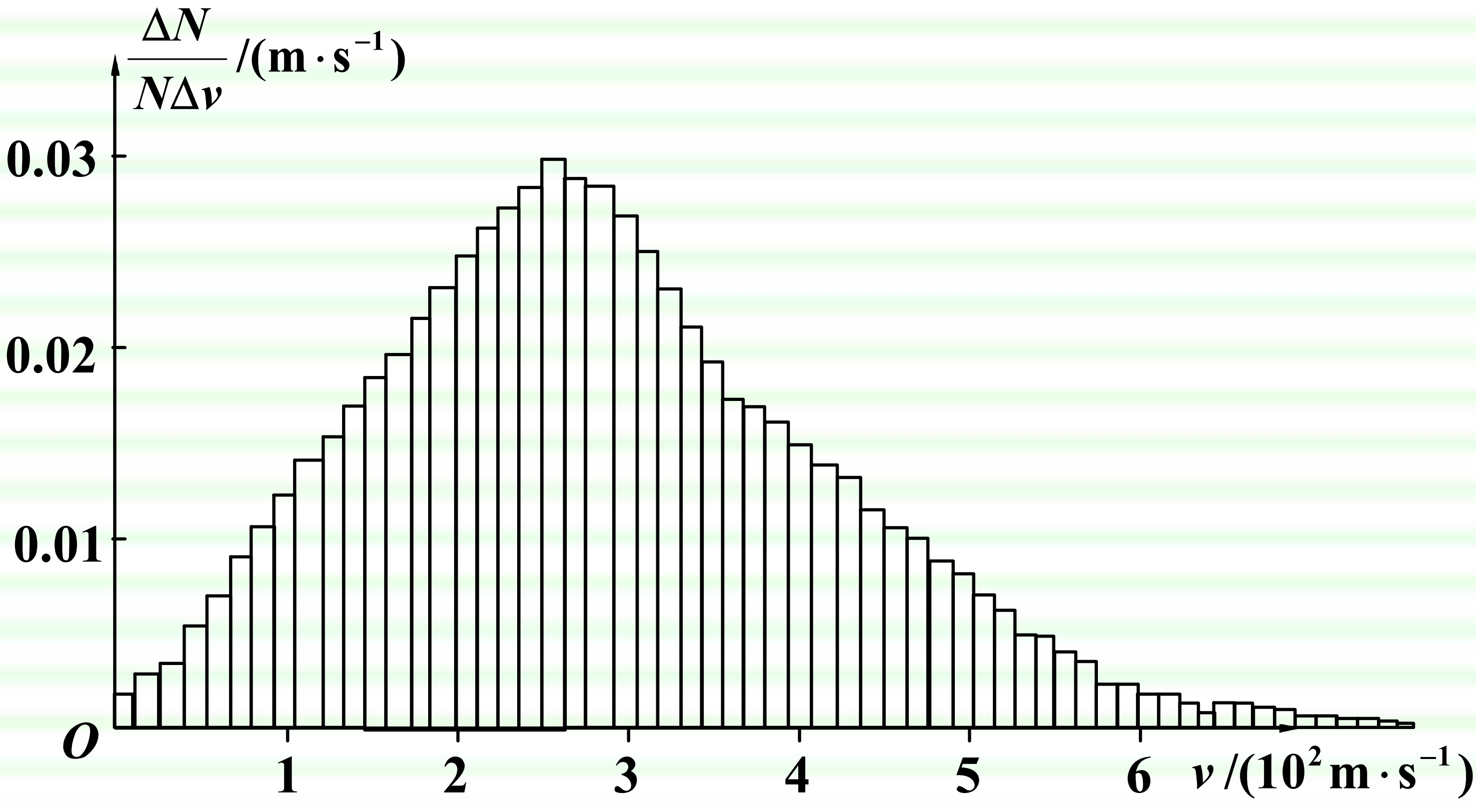
2.实验原理



$$l = vt$$
$$\varphi = \omega t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v = \frac{\omega}{\varphi} l}$$

只有满足此条件的分子才能到达*D*.

通过改变ω可获得不同速率区间的分子百分数.


$\frac{\Delta N}{N\Delta v}/(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$
0.03
0.02
0.01
O
1
2
3
4
5
6
$v/(10^2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})$

§3.3 玻尔兹曼分布律

1. 玻尔兹曼分布

求分子按空间位置的分布

玻尔兹曼把麦克斯韦速率分布推广到气体分子在任意力场中运动的情况.

设气体在保守力场中运动,用总能量代替麦克斯韦分布率中的动能.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{\text{推广}} E = E_k + E_p$$

即 $$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + E_p$$

气体在温度为T的平衡态下，在状态区间

$\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$　的分子数为

$$\mathrm{d}N = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-(E_k+E_p)/kT}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

——玻尔兹曼分布律

n_0 是$E_p=0$处单位体积内具有各种速度的分子数.

将上式对各种速度积分，考虑到分布函数必须满足归一化条件，得到:

$$\iiint\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-E_k/kT} \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z = 1$$

$$\mathrm{d}N' = n_0 e^{-E_p/kT} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

体积元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 内分子数

$$\boxed{n = n_0 e^{-E_p/kT}}$$ ——分子按势能的分布律

2. 重力场中微粒按高度的分布

(1)在重力场中,取 $z=0$ 处 $E_p=0$，则

$$E_p = mgz$$

在z处单位体积中的分子数为

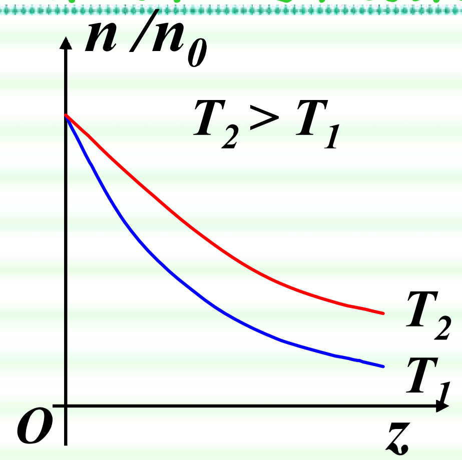
$$n = n_0 e^{-mgz/kT}$$

$$n = n_0 e^{-mgz/kT}$$

$$= n_0 e^{-\mu gz/RT}$$

m——一个分子质量

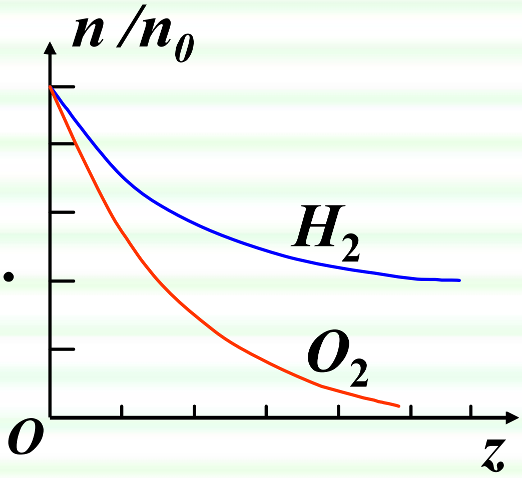
μ——摩尔质量



说明:

①大气分子数密度随重力势能的增加而按指数减小.

②分子质量越大,减小愈快.



③以上规律是分子运动与重力的共同作用，也是一统计规律.

④因实际上大气并不是恒温，故大气并不严格遵守上式，

(2) 气压与高度

$$p = nkT = n_0 kTe^{-mgz/kT}$$

$$= p_0 e^{-mgz/kT} = p_0 e^{-\mu gz/RT}$$

$p_0 = n_0 kT$ 为 $z = 0$ 处的压强

$$\Longrightarrow \qquad z = \frac{RT}{\mu g}\ln\frac{p_0}{p}$$

在航空中，根据此式，测定压强的变化可以估算飞行的高.